

Junio 2023 • e-ISSN: 2448-5365

SahuarUS

Revista electrónica de Matemáticas

Vol. 7
Número 1



UNIVERSIDAD DE SONORA

Sahuarus. Revista Electrónica del Departamento de Matemáticas

SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS, año 7, número 1, volumen 7, junio 2023 - noviembre 2023, es una publicación semestral, editada por la Universidad de Sonora, a través del Departamento de Matemáticas. Blvd. Luis Encinas y Rosales S/N, colonia Centro, Hermosillo, Sonora, México. C.P. 83000. Tel. (662) 2592155. Página web: sahuarus.unison.mx. Correo electrónico: sahuarus@unison.mx. Editor responsable: Misael Avendaño Camacho. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. **04-2023-032214541100-102**, e-ISSN: 2448-5365, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Los artículos publicados por [Sahuarus. Revista Electrónica de Matemáticas](http://sahuarus.unison.mx) se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/), la cual permite la distribución y el uso del material publicado citando la fuente de la que proviene, prohíbe la modificación y el uso con fines comerciales.



Sahuarus. Revista Electrónica del Departamento de Matemáticas

Volumen 7, número 1, Junio-Noviembre 2023



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Universidad de Sonora

Rectora

María Rita Plancarte Martínez

Secretario General Académico

Ramón Enrique Robles Zepeda

Coordinador General de la Facultad Interdisciplinaria de Ciencias Exactas y Naturales

Juan Pablo Soto Barrera

Jefe del Departamento de Matemáticas

Jesús Francisco Espinoza Fierro

Editor Responsable

Misael Avendaño Camacho

Comité Editorial

Dr. Manuel Adrian Acuña Zegarra

M.C. Maricela Armenta Castro

Dra. Carolina Espinoza Villalva

Dr. Martín Gildardo García Alvarado

Dra. Carmen Geraldí Higuera Chan

Ing. Aaron Lara Ordoñez

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa

Dra. Gloria Angélica Moreno Durazo

Dr. José Crispín Ruíz Pantaleón

Dr. José Luis Soto Munguía

Editores Asociados

Dr. José Luis Cisneros Molina

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, UNAM

Dr. Xavier Gómez Mont

Centro de Investigaciones en Matemáticas

Dr. Juan Carlos Hernández Gómez

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Acapulco, Guerrero

Dr. Fernando Antonio Hitt Espinoza

Universidad de Quebec, Montreal, Canada

Dra. Roxana López Cruz

Facultad de Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú

Dr. Humberto Madrid de la Vega

Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas, Universidad Autónoma de Coahuila

Dr. Pedro Miramontes Vidal

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

Dr. Carlos Gabriel Pacheco González

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

Dr. Sandra Evely Parada Rico

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

ÍNDICE

ARTÍCULOS

- Estabilidad de sistemas lineales positivos por politopos invariantes
Horacio Leyva Castellanos, Francisco A. Carrillo Navarro,
Griselda Quiroz Compeán, Ricardo Femat Flores 1-19
- El método de soluciones fundamentales y su uso en problemas Dirichlet para el
operador de Laplace
Jesús Felipe Centeno Mora 20-46

Estabilidad de sistemas lineales positivos por politopos invariantes

Horacio Leyva Castellanos¹, Francisco A. Carrillo Navarro^{2,*}, Griselda Quiroz Compeán³ y Alejandro Femat Flores⁴

Universidad de Sonora^{1,2}

Universidad Autónoma de Nuevo León³

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica⁴

¹horacio.leyva@unison.mx, ²armando.carrillo@unison.mx, ³griselda.quirozcm@uanl.edu.mx, ⁴rfemat@ipicyt.edu.mx.

Resumen

El objetivo principal de este artículo es describir la estabilidad de sistemas lineales positivos mediante politopos invariantes en el espacio de estados, de forma que a cada sistema estable le corresponde una familia de politopos invariantes. Además, para el caso del plano, presentamos una manera de estabilizar sistemas lineales positivos mediante el diseño de controles lineales.

Palabras Clave: Sistemas Positivos, Politopo Convexo, Invarianza Positiva.

DOI: 10.36788/sah.v7i1.136

Recibido: 10 de marzo de 2023

Aceptado: 5 de mayo de 2023

1. Introducción

Los sistemas positivos se caracterizan por la invariancia del ortante positivo \mathbb{R}_+^n en el espacio de estados, y se usan para representar dinámicas en: economía, modelos compartimentales, poblaciones, mezclas de sustancias químicas, ver los trabajos [6, 10, 13, 14, 18, 19]. El objetivo principal de este trabajo es abordar la estabilización asintótica global (GAS) de sistemas positivos a través de la invariancia de conjuntos politópicos P , con $0 \in \text{int}P$, definido como curvas de nivel de funciones lineales por partes $V(x) = \max\{v_1^T x, \dots, v_k^T x\}$, donde v_i^T representa el vector transpuesto v_i . A través de la invariancia de conjuntos convexos en el espacio de estados, podemos describir el comportamiento de soluciones de sistemas lineales positivos. Como V no es diferenciable, para cada solución $x(t)$ de un sistema lineal, es posible demostrar que la función compuesta $V(x(t))$ es decreciente para concluir que el origen $x = 0$ es asintóticamente estable, según el Teorema 2.7.20 en [4] y el Teorema 6.2 en [1].

La investigación de propiedades y soluciones para sistemas positivos es motivado por la capacidad de representación y predicción que estos sistemas tienen en varias y distintas aplicaciones. En [8, 15], se presentan las condiciones para la existencia de un politopo invariante

* Autor de correspondencia

y la estabilidad del sistema lineal positivo bajo perturbaciones específicas. En [2] se trabajó la estabilización de sistemas lineales invariantes en el tiempo con criterios algebraicos. En cambio, en este artículo consideramos una función de Lyapunov lineal por partes, de modo que obtenemos la invariancia positiva de los conjuntos de tipo simplex S contenidos en el ortante positivo, que involucra a la estabilidad asintótica de las soluciones del sistema positivo. Adicionalmente, dichos resultados diseñan controles estabilizadores que preservan la positividad del sistema.

Las propiedades de las matrices de Metzler describen las características de las soluciones de sistemas lineales positivos autónomos. Considere el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}_+^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Metzler, es decir, una matriz cuyas entradas fuera de la diagonal son no negativas. En [11] se prueba que el caso lineal es un sistema positivo si y sólo si la matriz A es Metzler. Es conocido que el punto de equilibrio $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable bajo (1) si y sólo si la matriz A es Hurwitz, esto es que todos sus valores propios tienen parte real negativa ($\sigma(A) \subset \text{int } \mathbb{C}^-$). También, las propiedades de las matrices Metzler permiten describir el comportamiento de las soluciones del sistema (1), en particular mediante el teorema de Perron–Frobenius y la Proposición 1 de [19]. Mediante una Proposición para sistemas lineales, establecemos condiciones suficientes para la invariancia de una familia de politopos (n -octaedros y n -simplex) bajo el sistema lineal positivo (1). De acuerdo con la Proposición 1 de [19], se prueba que A es también una matriz Hurwitz si y sólo si existe $L \in \mathbb{R}^n$ tal que $L > 0$ y $L^T A < 0$, ver por ejemplo [3, 5, 19]. Dada una matriz Metzler y Hurwitz A en (1), sea L_q la familia de vectores positivos que satisface la desigualdad $L_q^T A < 0$. Además, a cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzler y Hurwitz le corresponde un cono convexo abierto $C_A \subset \text{int } \mathbb{R}_+^n$, cuya amplitud está relacionada con la robustez del sistema lineal positivo definido por la matriz A .

Determinaremos dos tipos de politopos para describir la estabilidad, definimos los politopos P y S ; el politopo $P \subset \mathbb{R}^n$, que es un n -octaedro (también conocido como politopo cruzado) con centro en el origen y $2n$ vértices. En cambio, el politopo S es un n -simplex con el origen en uno de sus $n + 1$ vértices, tal que $S = P \cap \mathbb{R}_+^n$. Ambos politopos se definen con un vector positivo $L_q = -q^T A^{-1} \in C_A \subset \text{int } \mathbb{R}_+^n$, donde $q \in \mathbb{R}^n$ es positivo y si A es matriz Metzler y Hurwitz, entonces la matriz $-A^{-1}$ es una matriz no-negativa, esto está demostrado en el Teorema 6.5.3, página 206 en [16]. Para este caso de sistemas lineales positivos, incluimos una demostración de la invariancia de una familia de politopos S explícitamente dados, según la Proposición 2.1 de [7].

Como se dijo anteriormente, con el fin de mostrar la robustez del sistema lineal (1) con matriz A Metzler y Hurwitz, definimos un cono abierto n -dimensional C_A , de manera que cada elemento $L \in C_A$ genera politopos invariantes bajo el sistema lineal (1), de forma que es posible establecer un vínculo entre las propiedades estables de tales politopos invariantes y las propiedades del intervalo de matrices Metzler estables definidas en [5].

2. Preliminares y la formulación del problema

2.1. Notación

Se dice que una matriz A es *positiva* si todas sus entradas a_{ij} son positivas.

Para las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, con $A \neq B$, usamos la siguiente notación

- $A > B$ significa que $a_{ij} > b_{ij}$, para toda i, j .
- $A \geq B$ significa que $a_{ij} \geq b_{ij}$, para toda i, j .
- A^T es la transpuesta de la matriz A .
- A^{-1} es la inversa de la matriz A .
- \mathbb{R}_+ es el conjunto de números reales no negativos.
- \mathbb{R}_+^n es llamado el *ortante positivo* de \mathbb{R}^n , dado por $\{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$.
- Para un vector $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \in \mathbb{R}^n$ representa un vector con componentes $|x_i|$.
- $x^T y$ denota el producto interior de los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2.2. Politopos

En la literatura se manejan básicamente dos maneras de representar politopos, una es llamada H -representación, que consiste en una intersección acotada de un número finito de semiespacios (desigualdades lineales) ver [20]. Otra manera de definir un politopo es mediante el envolvente convexo de un conjunto finito de puntos, conocida como la V -representación mediante vértices. Con el objetivo de estudiar la estabilidad del sistema lineal positivo, consideramos también las siguientes representaciones del octaedro n -dimensional (ver [22]), con el vector $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)^T$ que resulta de la Proposición 1, caso(1.3) de [19]. Es conocida la equivalencia de tales representaciones, demostrada en [20]. En particular, el octaedro n -dimensional o *hiperoctaedro* P con $2n$ vértices y 2^n caras, podemos representarlo de las siguientes formas

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{L}x \leq \rho\}, \quad (2)$$

donde $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{k \times n}$, con $k = 2^n$ y $\rho = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$, los renglones de la matriz \mathcal{L} representan los gradientes L_i de los hiperplanos que definen las caras del hiperoctaedro. Otra representación es de la forma de un envolvente convexo de los $2n$ vértices que se obtienen al permutar el signo en los vectores de la base canónica $\left(\pm \frac{1}{l_1}e_1, \pm \frac{1}{l_2}e_2, \dots, \pm \frac{1}{l_n}e_n\right)$ con $l_i > 0$, para toda $i = 1, \dots, n$, lo escribimos como

$$P = \text{conv} \left\{ \pm \frac{1}{l_1}e_1, \pm \frac{1}{l_2}e_2, \dots, \pm \frac{1}{l_n}e_n \right\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

con la base canónica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

En [22] se muestra la siguiente representación para el hiperoctaedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_{i=1, \dots, k} \{L_i^T x\} \leq 1\} \text{ con } k = 2^n,$$

donde L_i es el gradiente de i -ésima cara del politopo.

También consideramos una forma equivalente a la H -representación

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L^T |x| \leq 1\}, \quad (4)$$

donde $L = (l_1, \dots, l_n)^T$ es el gradiente la cara principal, es decir, de la cara en el ortante positivo \mathbb{R}_+^n y $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)^T$.

Igualmente, la equivalencia de estas últimas representaciones se muestra en [20]. En este trabajo no hacemos distinción, de manera que pasaremos de una representación a otra según convenga.

Consideremos el siguiente par de definiciones (ver definiciones 2 y 5 en [17]):

Definición 1. *Una función politópica es una función positiva definida la cual es definida de la forma*

$$V(x) = \max_{i=1, \dots, k} \{v_i^T x\}, \quad (5)$$

donde los vectores $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$ son diferentes de cero.

Definición 2. *Una curva de nivel de una función positiva definida $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por números reales $c_2 > c_1 \geq 0$ como*

$$V^{-1}[c_1, c_2] = \{x \in \mathbb{R}^n : c_1 \leq V(x) \leq c_2\}.$$

Entonces, para cada politopo convexo $P \subset \mathbb{R}^n$, con $0 \in \text{int } P$, existen vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \in \mathbb{R}^n$, tal que, mediante la función politópica (5), podemos representar P como

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\}, \quad (6)$$

donde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función convexa y positivamente homogénea, es decir, $V(rx) = rV(x)$ para cualquier número real $r \geq 0$, para la representación (5)-(6) de un politopo ver el Teorema 1.1 en [22] y p. 174 en [20]; en particular, ∂P de la definición (6) viene dado por la curva de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = 1\}$. Supondremos que el conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y convexo con $0 \in \text{int } P$.

De acuerdo a los resultados de invariancia que se presentan en [12], para el caso de los politopos,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Gx \leq b\},$$

donde $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Consideramos la presentación del siguiente Lema que describe como se puede justificar la invariancia en términos de los vértices del politopo.

Lema 3. *El politopo P es un conjunto invariante para el sistema continuo (1) si y solo si se cumple la siguiente desigualdad*

$$G_i A v_j \leq 0, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, \dots, l_i,$$

donde G_i es el i -ésimo renglón de G y v_j son los vértices del politopo P , para $j = 1, 2, \dots, l_i$, donde l_i es la i -ésima cara del politopo.

Demostración. *Según la demostración del Lema 3.5 en [12], para tener la nueva equivalencia basta con considerar que cualquier punto $x \in \partial P$ (tal que, $G_i x = b_i$) se puede escribir como una suma convexa de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_{l_i}\}$ de la i -ésima cara que corresponde, de modo que*

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{l_i} v_{l_i}, \quad \text{where } 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad \text{with } \sum_j \lambda_j = 1,$$

por lo tanto

$$G_i A x = \sum_j \lambda_j G_i A v_j \leq 0,$$

ya que $G_i A v_j \leq 0$ para $j = 1, 2, \dots, l_i$ y para toda $i = 1, \dots, m$. □

Observación 4. *Según el Lema 3, si el politopo $P = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es invariante bajo el sistema lineal (1), entonces el politopo $cP = \text{conv}\{cv_1, cv_2, \dots, cv_k\}$, para cualquier cualquier escalar $c > 0$, también es invariante bajo el sistema (1).*

Ejemplo 5. *Dado el sistema lineal inestable a lazo abierto*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

donde el polinomio característico de la matriz es $(\lambda - 1)^2$. Con el control lineal $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$ y considerando el vector renglón $k = (k_1, k_2)$, obtenemos el sistema de realimentación

$$A + bk = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2) = \begin{pmatrix} 2 + k_1 & 1 + k_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando los vectores

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

la función no negativa $V(x) = \max_{i=1, \dots, k} \{w_i^T x\}$ es equivalente a

$$V(x_1, x_2) = \max \left\{ \frac{1}{3} |x_1 + x_2|, |x_1 - x_2| \right\},$$

consideremos el cuadrilátero

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid V(x_1, x_2) \leq 1\},$$

de manera similar

$$P = \text{conv} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Con el fin de obtener la invariancia de P bajo el sistema de realimentación, es suficiente que

$$\begin{aligned} G_1(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 1, 2 \\ G_2(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 2, 3 \\ G_3(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 3, 4 \\ G_4(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 4, 1 \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

por simetría del politopo P , es suficiente que

$$\begin{aligned} G_1(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 1, 2 \\ G_2(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 2, 3 \end{aligned}$$

entonces, con los valores $k_2 = -2 - \frac{1}{2}k_1$ y $k_1 < -2$ las cuatro desigualdades anteriores se satisfacen. El cuadrilátero P es invariante bajo el sistema lineal (1), con

$$A + bk = \begin{pmatrix} 2 + k_1 & -1 - \frac{1}{2}k_1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } \det(A + bk) = -(1 + \frac{1}{2}k_1) > 0 \text{ y } \text{tr}(A + bk) = k_1 + 2 < 0.$$

Las desigualdades (7) implican que la función $V(x(t))$ es decreciente bajo la soluciones $x(t)$ del sistema de realimentación.

3. Resultados principales

Para abordar el problema de estabilización de un sistema lineal positivo, consideramos una función de Lyapunov con peso L^T , dada por

$$V(x) = \sum_{i=1}^n l_i |x_i| = L^T |x|, \quad (8)$$

tal que $V(x)$ es decreciente, para concluir que el origen $x = 0$ es un equilibrio globalmente asintóticamente estable para el sistema lineal positivo.

Considerando el politopo como el conjunto convexo y cerrado dado por (4), para probar la estabilidad con la función $V(x)$ dada por (8), haremos uso del siguiente Teorema donde identificamos X como \mathbb{R}^n y a M con el equilibrio $x = 0$.

Teorema 6. (Ver Teorema 2.7.20 in [4])

Un conjunto compacto $M \subset X$ es asintóticamente globalmente estable si y solo si existe una función uniformemente continua y no acotada $V(x)$ definida en X tal que

$$i) V(x) = 0 \text{ si } x \in M \text{ y } V(x) > 0 \text{ si } x \notin M.$$

$$ii) V(x(t, x_0)) < V(x_0) \text{ para } x_0 \notin M \text{ y } t > 0.$$

En (1.3) de la Proposición 1 de [19], para la familia de matrices Metzler A , se demuestra que la equivalencia entre ser A matriz Hurwitz y la existencia de un vector positivo $L > 0$ tal que $L^T A < 0$. En el siguiente Lema mostramos la familia de vectores positivos $L > 0$.

Lema 7. Sea A una matriz Metzler y Hurwitz, tal que el vector $L^T := -q^T A^{-1}$, para cualquier vector positivo q , entonces $L^T A < 0$.

Demostración. Según el Teorema 3 de la sección 6.5 de [16], la matriz $-A^{-1}$ es no-negativa si y solo si A es la matriz Hurwitz, tal que

$$L^T A = -q^T A^{-1} A = -q^T < 0.$$

□

Teorema 8. Si A es una matriz Metzler y Hurwitz, entonces el politopo convexo P dado por (4) es invariante con respecto al sistema lineal (1).

Demostración. Primero se prueba que la función $V(x(t)) = L^T |x(t)|$ es decreciente. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, tal que la vecindad N_x para x no contenga puntos en los ejes, de modo que las entradas x_i del vector x no cambian de signo. Sea $L^T := -q^T A^{-1}$, para q cualquier vector positivo, tal que al derivar la función

$$\begin{aligned} V(x) &= L^T |x| \\ &= l_1 s_1 x_1 + l_2 s_2 x_2 + \cdots + l_n s_n x_n, \end{aligned}$$

donde $s_i = \text{sign}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, con la función signo

$$\text{sgn}(x_i) = \frac{d|x_i|}{dx_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i > 0 \\ -1 & \text{si } x_i < 0 \end{cases},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= (l_1 s_1, \dots, l_n s_n) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = (l_1 s_1, \dots, l_n s_n) \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & -a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1 (-l_1 a_{11} s_1 + l_2 a_{21} s_2 + \cdots + l_n a_{n1} s_n) + \cdots \\
&\quad + x_n (l_1 a_{1n} s_1 + l_2 a_{2n} s_2 + \cdots + l_{n-1} a_{n-1n} s_{n-1} - l_n a_{nn} s_n) \\
&= |x_1| \left(-l_1 a_{11} + l_2 a_{21} \frac{s_2}{s_1} + \cdots + l_n a_{n1} \frac{s_n}{s_1} \right) + \cdots \\
&\quad + |x_n| \left(l_n a_{1n} \frac{s_1}{s_n} + l_2 a_{2n} \frac{s_2}{s_n} + \cdots + l_{n-1} a_{n-1n} \frac{s_{n-1}}{s_n} - l_n a_{nn} \right) \\
&= |x_1| \left(-l_1 a_{11} + \sum_{i \neq 1} l_i a_{i1} \frac{s_i}{s_1} \right) + \cdots + |x_n| \left(-l_n a_{nn} + \sum_{i \neq n} l_i a_{in} \frac{s_i}{s_n} \right)
\end{aligned}$$

como $\frac{s_i}{s_j} \leq 1$, entonces

$$|x_j| \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} \frac{s_i}{s_j} \leq |x_j| \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n,$$

de aquí tenemos que

$$\begin{aligned}
x_j (-l_j a_{jj} s_j + \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} s_i) &= |x_j| (-l_j a_{jj} + \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} \frac{s_j}{s_i}) \\
&\leq |x_j| (-l_j a_{jj} + \sum_{i \neq j} l_i a_{ij}) = |x_j| L^T A_j
\end{aligned}$$

donde A_j es the j -ésima columna de la matriz A . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= (l_1 s_1, \dots, l_n s_n) A x \\
&\leq L^T A |x| \\
&= -q^T A^{-1} A |x| \\
&= -q^T |x| < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E,
\end{aligned}$$

donde

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Ahora, consideremos el caso $x_0 \in E$, con la solución correspondiente $\varphi(t, x_0)$ del sistema lineal (1). Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n \setminus E$ tal que el segmento lineal $p_1 p_2$ que interseca al conjunto E en x_0 , se sabe que el conjunto $e^{At} p_1 p_2$ es un segmento lineal para cada $t > 0$, así que $\dot{V}(p_1) < 0$ y $tV(p_2) < 0$, por lo que la función $V(x(t))$ es decreciente en x_0 : $V(\varphi(t, x_0)) < V(x_0)$ para $t > 0$. Concluimos que $V(x(t))$ es decreciente en \mathbb{R}^n . De acuerdo al Teorema 2.7.20 de [4], el politopo convexo P es invariante con respecto al sistema lineal $\dot{x} = Ax$, por lo que el origen $x = 0$ es asintóticamente estable. \square

Resumiendo, para cada matriz Metzler y Hurwitz A existe una correspondiente familia de politopos P que son invariantes con respecto al sistema lineal (1).

Ejemplo 9. *Este ejemplo está tomado de [8]. Dada la matriz A Metzler y Hurwitz y el vector positivo L :*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } L^T = (5q_1 + 10q_2 + 20, 10q_1 + 13q_2 + 12, 5q_1 + 17q_2 + 13),$$

cada par de valores (q_1, q_2) definen un politopo P invariante con respecto al sistema lineal $\dot{x} = Ax$.

3.1. El cono de una matriz Metzler

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzler y Hurwitz, definimos el *cono convexo* $C_A \subset \mathbb{R}_+^n$ como

$$C_A := \{L \in \mathbb{R}_+^n : L^T A < 0\},$$

por los Teoremas para matrices Metzler y Hurwitz dados en [15], tenemos que C_A no es un conjunto vacío bajo las condiciones dadas en dichos Teoremas. Mediante el Lema 7 representamos a cualquier elemento del cono C_A con el vector L .

Lema 10. *El cono C_A contiene n vectores linealmente independientes.*

Demostración. *Por (1.3) de la Proposición 1 de [19], existe un vector $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) > 0$, tal que $lA < 0$.*

Mostraremos que los vectores $C_1, C_2, \dots, C_n \in C_A$, definidos como $C_i = l + \varepsilon e_i^T$, con $\varepsilon > 0$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ como la base canónica de \mathbb{R}^n , son linealmente independientes.

Es suficiente demostrar que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} l_1 + \varepsilon & l_2 & \cdots & l_n \\ l_1 & l_2 + \varepsilon & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_1 & & & l_n + \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon^n + \varepsilon^{n-1} (l_1 + l_2 + \cdots + l_n) > 0. \end{aligned}$$

□

El siguiente Teorema establece una relación entre los conos de un intervalo de matrices Metzler. Según la definición 12.2 de intervalo de matrices, de la página 529 de [5], denotado por $[A, B]$ tal que $B - A \geq 0$, considere el siguiente intervalo de matrices:

$$\mathbf{A} := \{A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n} : a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+, \text{ para toda } i, j\},$$

donde a_{ij}^\mp son entradas de A^\mp .

Teorema 11. Si $A \in \mathbf{A}$, entonces $C_{A^+} \subset C_A \subset C_{A^-}$.

Demostración. Para el caso $A \leq A^+$ demostraremos que si $L \in C_{A^+}$, entonces $L \in C_A$.

Sea $B \geq 0$ la matriz tal que

$$A + B = A^+,$$

y sea $L^T \in C_{A^+} \subset \mathbb{R}_+^2$, entonces

$$L^T (A + B) = L^T A + L^T B < 0.$$

Como $L^T B > 0$, se sigue que $L^T A < 0$. Esto es $L^T \in C_A$. Concluimos que $C_{A^+} \subset C_A$. El caso $A^- \leq A$ es similar, por lo tanto

$$C_{A^+} \subset C_A \subset C_{A^-}.$$

□

El resultado muestra que si la *robustez paramétrica* (con respecto a las variaciones de las entradas de la matriz) de la estabilidad del sistema $\dot{x} = A^+x$ es grande, la robustez del sistema $\dot{x} = Ax$ también es grande.

Considere el sistema

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}, \quad (9)$$

donde $x \in \mathbb{R}_+^n$, $b \in \mathbb{R}_+^n$, con $\bar{u} > 0$. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz Metzler y Hurwitz, tenemos un equilibrio positivo \bar{x} dado por:

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} > 0.$$

Para un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, definimos el conjunto de (*adición de Minkowski*) como

$$\bar{x} + P := \{\bar{x} + x \mid x \in P\}. \quad (10)$$

La siguiente Proposición es una consecuencia inmediata del Teorema 8.

Proposición 12. Si A es una matriz Metzler y Hurwitz, entonces el politopo convexo $\bar{x} + P$ dado por (10) es invariante con respecto al sistema (9).

Demostración. Sea $y(t) = x(t) - \bar{x}$, entonces el sistema (9) y $\dot{y} = Ay$ son equivalentes. Por lo tanto, el Teorema 8 implica que $x(t) \in \bar{x} + P$ para toda $t \geq 0$. □

Ejemplo 13. Consideremos el sistema (9) con

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{u}. \quad (11)$$

con $\bar{u} \geq 0$ constante, tal que esto genera el equilibrio positivo \bar{x} :

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u} \end{pmatrix}.$$

Para cualquier escalar $m > 0$, consideremos el vector positivo $q^T = (m, 1)$, para definir el vector L^T :

$$L^T = -q^T A^{-1} = \left(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7}, \frac{3}{7}m + \frac{4}{7} \right), \quad (12)$$

así que considerando también la función no negativa

$$L^T |x| = \left(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7} \right) |x_1| + \left(\frac{3}{7}m + \frac{4}{7} \right) |x_2|,$$

definimos los cuadriláteros invariantes

$$P_m = \{x \in \mathbb{R}^2 : L^T |x| \leq c, c > 0\}.$$

De acuerdo con la Proposición 12, tenemos que el politopo $\bar{x} + P_m$ es positivamente invariante bajo el sistema (11).

Observación 14. Si establecemos el valor $\bar{u} > 0$, con $k > m$, entonces $P_k \subset P_m$, de modo que $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = \{0\}$.

En particular, para el valor $\bar{u} = 2$, con $m \geq \frac{1}{8}$, tenemos que $\bar{x} + P_m \subset \mathbb{R}_+^2$, ver la figura 1.

Ejemplo 15. Consideremos un sistema lineal que pueda representar los subsistemas para la concentración de insulina plasmática descritos en [18, 21],

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}, \quad (13)$$

donde las variables de estado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ representan la concentración de insulina en los principales órganos del cuerpo humano (cerebro, corazón, pulmones, hígado, estómago, riñones y piel). El sistema de control propuesto en [15] considera el valor $\bar{u} = 23.349$ y el vector no negativo $b = (0, 0, 0, 0, 0, 1.418, 0)$, con el equilibrio correspondiente $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$:

$$\bar{x} = \left(\frac{21379}{1000}, \frac{21379}{1000}, \frac{21379}{1000}, \frac{12789}{1000}, \frac{16439}{1000}, \frac{4019}{125}, \frac{14483}{1000} \right).$$

Sea $q^T = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7)$ cualquier vector positivo, para definir el vector $L^T = -q^T A^{-1}$, el cual nos permite definir la función no negativa

$$L^T |x| = q_1 |x_1| + q_2 |x_2| + \dots + q_7 |x_7|,$$

y definimos el politopo convexo

$$H = \{x \in \mathbb{R}^7 : L^T |x| \leq 1\},$$

con una traslación obtenemos el politopo $\bar{x} + H$, el cual podemos representar también como

$$\bar{x} + H = \{x \in \mathbb{R}^7 : L^T |x - \bar{x}| \leq 1\}.$$

Podemos ver que si $q_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, 7$, entonces sucede que $\bar{x} + H \subset \mathbb{R}_+^7$.

De acuerdo con la Proposición 12, tenemos que el politopo $\bar{x} + H$ es positivamente invariante con respecto al sistema (13).

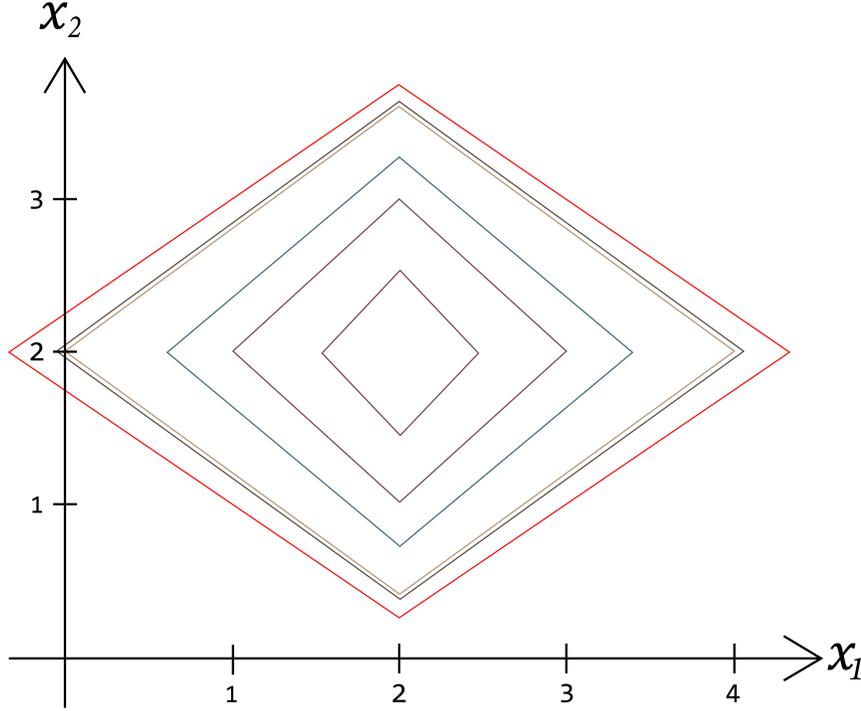


Figura 1: Para $(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7})|x_1 - 2| + (\frac{3}{7}m + \frac{4}{7})|x_2 - 2| = 1$, el rombo en línea dorada es para $m = \frac{1}{8}$ y el rombo más pequeño y el más grande son para $m = 3$ y $m = 0$ respectivamente.

Proposición 16. *Si A es una matriz Metzler y Hurwitz, entonces el politopo convexo S es invariante con respecto al sistema lineal (1).*

Demostración. *Podemos ver esta Proposición como un corolario de la Proposición 8, para el caso $|x| = x$, ya que $V : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$.* \square

Una forma de probar la invariancia del n -Simplex $S = P \cap \mathbb{R}_+^n$ es mediante la Proposición 2.1 de [7] para el sistema lineal (1), para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$, también para esto se puede consultar el Teorema 1.1 en [22] y p. 174 en [20].

Proposición 17. *(Ver la Proposición 2.1 en [7]) Cualquier politopo convexo no vacío $P \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto positivamente invariante del sistema (1) si y solo si existe una matriz Metzler $N \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tal que:*

$$QA - NQ = 0 \quad (14)$$

$$N\omega \leq 0. \quad (15)$$

donde

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Qx \leq \omega\}.$$

La siguiente proposición se refiere a la invariancia de la familia de n -Simplex S .

Proposición 18. *Si A es una matriz Metzler y Hurwitz y $L \in \mathbb{R}^n$, $L > 0$ un vector que satisface $L^T A < 0$, entonces el politopo convexo S es invariante con respecto al sistema lineal (1), donde S está definido por $n + 1$ desigualdades lineales (una \mathcal{H} -representación de un politopo)*

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Qx \leq \bar{w}\}.$$

Demostración. *Consideremos la matriz Metzler $M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, dada por*

$$M = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -L^T A & 0 \end{pmatrix},$$

y representemos el politopo S como

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Qx \leq \bar{w}\},$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} -e_1^T \\ \vdots \\ -e_n^T \\ L^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \\ L^T \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $e_i \in \mathbb{R}^n$ es el i -ésimo vector canónico. Entonces

$$M\bar{w} = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -L^T A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

esto satisface (15) de la Proposición 17. Además

$$QA = \begin{pmatrix} -A \\ L^T A \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad MQ = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -L^T A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I \\ L^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \\ L^T A \end{pmatrix},$$

entonces

$$QA - MQ = 0$$

y esto satisface (14) de la Proposición 17. □

En nuestro caso particular, asumimos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Metzler y Hurwitz, y definimos el vector positivo $L^T := -q^T A^{-1} \in \mathbb{R}_+^n$, para cualquier vector $q > 0$, además

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Qx \leq \bar{w}\},$$

con matriz $Q \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ y vector $\bar{\omega}$ dado por

$$Q = \begin{pmatrix} I_n \\ L^T \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y la invariancia de S con respecto a (1) con A matriz Metzler está demostrada por la matriz $M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ dada por

$$M = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -q & 0 \end{pmatrix},$$

donde M es parametrizada por el vector positivo q .

De acuerdo con la Proposición 1 de [19], podemos observar la siguiente generalización.

Observación 19. *Si el sistema lineal (1) es positivo, sea D la matriz tal que $\det DA \neq 0$. Sea además el vector $L^T = -q^T(DA)^{-1}$, con cualquier vector $q > 0$. Entonces, considerando el sistema lineal*

$$\dot{x} = DAx,$$

tenemos la equivalencia

$$L^T < 0 \quad \Leftrightarrow \quad DA \text{ es Hurwitz.}$$

Esta doble implicación es inmediata por el Teorema 2.7.20 en [4], por la invariancia del politopo P y por el Teorema 3 de la sección 6.5 de [16].

Para una aplicación de la Observación anterior véase [9].

Ejemplo 20. *Lo siguiente es un ejemplo para la Observación 19.*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad DA = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix},$$

así que el vector $L^T = -q^T(DA)^{-1} < 0$, con cualquier vector $q > 0$, y ya que $-(DA)^{-1} = -\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, entonces para el sistema $\dot{x} = DAx + b\bar{u}$, con $b = (b_1, b_2)^T > 0$ y $\bar{u} > 0$, tenemos el equilibrio \bar{x} :

$$\bar{x} = -(DA)^{-1}b\bar{u} = \frac{\bar{u}}{35} \begin{pmatrix} 6b_1 + b_2 \\ b_1 + 6b_2 \end{pmatrix},$$

así que, si $b\bar{u} > 0$, entonces $\bar{x} > 0$.

De acuerdo con el Lema 7, dada una matriz Metzler y Hurwitz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, consideramos

$$L^T = -q^T A^{-1},$$

donde el vector positivo q es arbitrario, y definimos la familia de politopos

$$U := \{x \in \mathbb{R}_+^n : L^T \bar{x}_1 \leq L^T x \leq L^T \bar{x}_2\},$$

donde $\bar{x}_1 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_2$, tal que la frontera ∂U de U es formada por los $n + 2$ segmentos de hiperplano de dimensión $n - 1$; luego los n segmentos pertenecen a la frontera $\partial \mathbb{R}_+^n$ y dos segmentos de hiperplanos r_1 y r_2 pueden ser representados por

$$r_i = \{x \in \mathbb{R}_+^n : L^T(x - \bar{x}_i) = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Proposición 21. *El politopo U es invariante con respecto al sistema lineal (9).*

Demostración. *Debido a que es un sistema positivo, es suficiente demostrar que*

$$L^T \dot{x} > 0 \text{ para } x \in r_1$$

y

$$L^T \dot{x} < 0 \text{ para } x \in r_2.$$

donde

$$L^T \dot{x} = L^T(Ax + b\bar{u}) = -q^T A^{-1}(Ax + b\bar{u}) = -q^T x + q^T \bar{x} = -q^T(x - \bar{x}).$$

Con cualquier vector positivo q tal que $q^T(x - \bar{x}) = 0$, se cumplen las siguientes desigualdades

$$q^T(x - \bar{x}_1) > 0 > q^T(x - \bar{x}_2),$$

tal que para $x \in r_1$, tenemos

$$L^T \dot{x} = -q^T(x - \bar{x}) > 0,$$

y para $x \in r_2$ tenemos

$$L^T \dot{x} = -q^T(x - \bar{x}) < 0.$$

□

Por ejemplo, consideremos el sistema (11) con (12), tal que genera el equilibrio positivo $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} = (\bar{u}, \bar{u})^T$, entonces para constantes $\bar{u} = 1, 2, 3$, los equilibrios $\bar{x}_1 = (1, 1)^T$, $\bar{x}_2 = (2, 2)^T$, $\bar{x}_3 = (3, 3)^T$ son generados.

Para cualquier escalar $m > 0$, considere el vector positivo $q^T = (m, 1)$, para definir el vector L^T :

$$L^T = -q^T A^{-1} = \left(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7} \quad \frac{3}{7}m + \frac{4}{7} \right),$$

tal que podemos definir el cuadrilátero

$$U := \{x \in \mathbb{R}_+^2 : m + 1 \leq x_1 \left(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7} \right) + x_2 \left(\frac{3}{7}m + \frac{4}{7} \right) \leq 3m + 3\}.$$

Concluimos que para el valor $\bar{u} = 2$ y cualquier valor $m > 0$, el cuadrilátero U es invariante con respecto al sistema lineal (11).

3.2. Diseño de una función de retroalimentación lineal para la estabilización de un sistema lineal positivo

Consideremos un sistema lineal positivo con entrada escalar positiva u , dado por

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (16)$$

de modo que, nos acercamos al siguiente problema de diseño:

Dado un sistema lineal positivo del tipo (16) inestable a lazo abierto, proponemos encontrar los vectores $L^T > 0$ y K para que tengamos la desigualdad

$$L^T(A + bK)x < 0 \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}. \quad (17)$$

Para cualquier vector positivo $q > 0$, definimos el vector $L^T = -q^T A^{-1}$, y establecemos el objetivo de diseñar el vector K para que satisfaga (17).

Ejemplo 22. *Considérese (16) definido por*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con constantes positivas a_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Vemos que la matriz A es una matriz Metzler pero no una matriz Hurwitz. Ahora, considerando $|A| = -(a_1 a_4 + a_2 a_3) < 0$ y encontrando un vector renglón $K = (k_1, k_2)$, tal que la matriz

$$A + bK = \begin{pmatrix} a_1 + k_1 & a_2 + k_2 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix},$$

es Metzler y satisface la desigualdad (17). Con

$$A^{-1} = -\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix},$$

tal que

$$\begin{aligned} I + A^{-1}bK &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1, k_2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|} (|A| - a_4 k_1) & -\frac{1}{|A|} a_4 k_2 \\ -\frac{1}{|A|} a_3 k_1 & \frac{1}{|A|} (|A| - a_3 k_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L^T(A + bK) &= -q^T(I + A^{-1}bK) = -(q_1, q_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|} (|A| - a_4 k_1) & -\frac{1}{|A|} a_4 k_2 \\ -\frac{1}{|A|} a_3 k_1 & \frac{1}{|A|} (|A| - a_3 k_2) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{|A|} (a_3 k_1 q_2 - |A| q_1 + a_4 k_1 q_1), \frac{1}{|A|} (a_3 k_2 q_2 - |A| q_2 + a_4 k_2 q_1) \right), \end{aligned}$$

con $k_1 = -2a_1$ y $k_2 = 0$,

$$\begin{aligned} L^T(A + bK) &= \left(\frac{1}{|A|} (a_3(-2a_1)q_1 - |A|q_1 + a_4(-2a_1)q_1), \frac{1}{|A|} (-|A|q_2) \right) \\ &= \left(-\frac{1}{|A|} (|A|q_1 + 2a_1 a_3 q_2 + 2a_1 a_4 q_1), -q_2 \right) < 0. \end{aligned}$$

4. Conclusiones

Hemos presentado resultados que permiten describir la geometría de la estabilidad para una familia de sistemas lineales positivos. Se describe también la estabilidad de sistemas positivos bajo la invariancia de una familia de n -octaedros y n -Simplex. Tal familia de polítopos se define como conjunto de nivel de funciones lineales por partes. Para el caso general, el Lema 3 establece condiciones necesarias y suficientes sobre los vértices para tener la invariancia de un polítopo, de manera que puedan servir para diseñar un estabilizador lineal, damos un ejemplo en el plano para mostrar el estabilizador diseñado.

Para el caso de sistemas lineales positivos, donde la matriz A es Metzler y Hurwitz, se define un cono convexo C_A , cuyos elementos vectores L configuran hiperoctaedros P que son positivamente invariantes con respecto al sistema lineal (1). Con el Teorema 11 mostramos el vínculo entre el tamaño del cono C_A y la robustez del sistema lineal (1). También para sistemas positivos, mediante la Proposición 16 mostramos la invariancia de una familia de conjuntos n -Simplex S , delimitada por los ejes y el hiperplano definido por los vectores $L \in C_A$. Damos ejemplos en el plano para mostrar los polítopos invariantes y la estabilización de un sistema.

Para los sistemas no lineales autónomos $\dot{x} = f(x)$, con campo vectorial $f(x)$ de clase \mathcal{C}^1 , hay resultados parciales sobre condiciones suficientes para la existencia, unicidad y estabilidad de los equilibrios positivos. En general, los resultados recientes consideran casos especiales de $f(x)$.

Referencias

- [1] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [2] Z. Bartosiewicz, “Stability and stabilization of linear positive systems on time scales,” *Positivity*, vol. 24, no. 5, pp. 1361–1372, 2020. DOI: 10.1007/s11117-020-00735-z
- [3] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. SIAM, 1994.
- [4] N. P. Bhatia and G. P. Szegö, *Stability theory of dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [5] S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel, “Robust control: the parametric approach,” in *Advances in control education 1994*. Elsevier, 1995, pp. 49–52.
- [6] V. S. Bokharaie, O. Mason, and F. Wirth, “Stability and positivity of equilibria for subhomogeneous cooperative systems,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 74, no. 17, pp. 6416–6426, 2011. DOI: 10.1016/j.na.2011.06.023
- [7] E. B. Castelan and J. C. Hennes, “On invariant polyhedra of continuous-time linear systems,” *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 38, no. 11, pp. 1680–1685, 1993. DOI: 10.1109/9.262058
- [8] B. Du, S. Xu, Z. Shu, and Y. Chen, “On positively invariant polyhedrons for continuous-time positive linear systems,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 17, pp. 12 571–12 587, 2020. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2020.05.013
- [9] A. C. Enthoven and K. J. Arrow, “A Theorem on Expectations and the Stability of Equilibrium,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 288–293, 1956. DOI: 10.2307/1911633
- [10] A. Fall, A. Iggidr, G. Sallet, and J.-J. Tewa, “Epidemiological models and Lyapunov functions,” *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 2, no. 1, pp. 62–83, 2007. DOI: 10.1051/mmnp:2008011
- [11] L. Farina and S. Rinaldi, *Positive linear systems: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2000, vol. 50.
- [12] Z. Horváth, Y. Song, and T. Terlaky, “A Novel Unified Approach to Invariance for a Dynamical System,” *arXiv preprint arXiv:1405.5167*, 2014. DOI: 10.48550/arXiv.1405.5167
- [13] W. Leontief, *Input-output economics*. Oxford University Press, 1986.
- [14] H. Leyva, G. Quiroz, F. Carrillo, and R. Femat, “Rapid insulin stabilization via sliding modes control for T1DM therapy,” in *Memorias del Congreso Nacional de Control Automática AMCA*, 2013.

- [15] H. Leyva, F. A. Carrillo, G. Quiroz, and R. Femat, “Robust stabilization of positive linear systems via sliding positive control,” *Journal of Process Control*, vol. 41, pp. 47–55, 2016. DOI: 10.1016/j.jprocont.2016.03.001
- [16] D. G. Luenberger, *Introduction to dynamic systems: theory, models, and applications*. Wiley New York, 1979, vol. 1.
- [17] M. W. McConley, B. D. Appleby, M. A. Dahleh, and E. Feron, “A control Lyapunov function approach to robust stabilization of nonlinear systems,” in *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, vol. 1. IEEE, 1997, pp. 329–333.
- [18] G. Quiroz and R. Femat, “On hyperglycemic glucose basal levels in Type 1 Diabetes Mellitus from dynamic analysis,” *Mathematical biosciences*, vol. 210, no. 2, pp. 554–575, 2007. DOI: 10.1016/j.mbs.2007.06.004
- [19] A. Rantzer, “Scalable control of positive systems,” *European Journal of Control*, vol. 24, pp. 72–80, 2015. DOI: 10.1016/j.ejcon.2015.04.004
- [20] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*. Princeton university press, 1997, vol. 11.
- [21] J. T. Sorensen, “A physiologic model of glucose metabolism in man and its use to design and assess improved insulin therapies for diabetes,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1985.
- [22] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*. Springer New York, NY, 1995.

Como citar este artículo: Leyva Castellanos, H. , Carrillo Navarro, F. A. , Quiroz Compeán, G., y Femat Flores, R. (2023). Estabilidad de sistemas lineales positivos por politopos invariantes. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365, 7(1): 1–19. <https://doi.org/10.36788/sah.v7i1.136>.

El Método de Soluciones Fundamentales y su uso en problemas Dirichlet para el operador de Laplace

Centeno Mora Jesús Felipe¹,
Universidad Autónoma de Querétaro.
¹centeno17@hotmail.com

Resumen

En esta trabajo se hace una exposición del Método de Soluciones Fundamentales (MFS, por sus siglas en inglés), el cual es un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales parciales elípticas con condiciones en la frontera. La exposición se concentra en el caso particular del operador de Laplace, se presentan además ejemplos de prueba para tal operador con condiciones en la frontera del tipo Dirichlet sobre dominios circulares con variantes en cuanto a la configuración, como lo son la elección de diferentes fronteras virtuales y la variación en la distribución tanto de los puntos de colocación como de las ubicaciones de las fuentes puntuales. Se obtuvieron datos con el propósito de observar el impacto que cada configuración tuvo en la exactitud y en la estabilidad numérica del método.

Palabras Clave: Condición Dirichlet, condiciones en la frontera, estabilidad numérica del método, exactitud, Método de Soluciones Fundamentales, MFS, operador de Laplace, operador elíptico.

DOI:10.36788/sah.v7i1.134

Recibido:23 de enero de 2023

Aceptado 05 de junio de 2023

Introducción

“El método de soluciones fundamentales (MFS por sus siglas en inglés) es una técnica para la solución numérica de ciertos problemas elípticos con valores en la frontera que pertenece a la clase de métodos conocida generalmente como métodos de frontera.”

[Fairweather & Karageorghis, 1998, p. 69].

Entre los antecedentes del MFS se pueden mencionar los llamados métodos de Trefftz, en los cuales, dado una ecuación diferencial parcial elíptica con condiciones en la frontera, la solución se aproxima a través de combinaciones lineales de soluciones particulares de la ecuación dada, todo lo anterior suponiendo que dichas combinaciones lineales son densas en el espacio de soluciones. Esta manera de abordar los problemas elípticos fue presentada por Erich Trefftz en el año 1926. Posteriormente Mergelyan demostró en 1952 que funciones holomorfas en dominios acotados simplemente conexos en \mathbb{C} pueden ser aproximadas mediante polinomios, mientras que si los dominios son múltiplemente conexos (i. e. conexos pero no

simplemente conexos) entonces las funciones se pueden aproximar usando funciones racionales. El trabajo de Mergelyan fue la culminación de los avances realizados por Runge, Walsh, Lavrent'ev y Keldysh en el tema de aproximaciones polinómicas y racionales desde finales del siglo XIX. El Método de Soluciones Fundamentales representa una continuación de toda la labor mencionada, ya que las soluciones particulares de la ecuación diferencial parcial bajo consideración son las soluciones fundamentales, denotadas por $\phi(x, s)$, con $x, s \in \mathbb{R}^n$ del correspondiente operador diferencial [Smyrlis, 2009].

Definición 1. Si \mathcal{L} denota un operador diferencial parcial en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y tenemos la ecuación $\mathcal{L}u = 0$ en Ω , decimos que una **solución fundamental** de dicha ecuación diferencial es una función $\phi(x, s)$ [esta notación se usará de aquí en adelante] tal que:

$$\mathcal{L}_x \phi(\cdot, s) = \delta_s, \quad s \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

donde $\mathcal{L}_x \phi$ indica que la función ϕ se deriva con respecto a x y δ_s es la medida de Dirac con masa unitaria en s .

Nótese que la función ϕ está definida en todas partes, excepto cuando $x = s$, donde es singular. Por lo tanto se dice que s es la singularidad de la solución fundamental.

En particular, si \mathcal{L} es elíptico con coeficientes constantes, entonces $\phi(\cdot, s)$ es real-analítica en $\mathbb{R}^n \setminus \{s\}$ y satisface que $\mathcal{L}_x \phi(x, s) = 0$ para todo x en $\mathbb{R}^n \setminus \{s\}$ (para la justificación de estos hechos, véase [Rudin, 1973, pp. 201 - 204]). Felix Browder demostró en 1962 que las soluciones fundamentales de operadores elípticos con singularidades en un conjunto abierto arbitrario U fuera de un dominio conexo $\bar{\Omega}$, son densas, en el sentido de la norma uniforme, en el espacio $\mathcal{X} = \{u \in C^m(\Omega) : \mathcal{L}u = 0 \text{ en } \Omega\} \cap C(\bar{\Omega})$. Posteriormente Weinstock amplió los resultados de Browder a dominios acotados que satisfacen una condición de regularidad más débil, a saber, la condición de segmento. Por lo mencionado acerca de la naturaleza de los operadores elípticos y que, a diferencia de otras clases de operadores, ha permitido avances importantes en el análisis teórico de sus soluciones fundamentales, se explica que el MFS esté tan enfocado en la resolución de problemas del tipo elíptico.

En el Método de Soluciones Fundamentales, las singularidades de las soluciones fundamentales son ubicadas *fuera* del dominio Ω , debido a lo cual debe recalcarse lo siguiente: **la combinación lineal de soluciones fundamentales que se usa en el MFS es solución exacta de la ecuación diferencial en consideración, en el dominio Ω ; cuando se habla de una solución aproximada se está haciendo referencia al problema con condiciones en la frontera, es decir, a la ecuación acompañada de las condiciones de frontera estipuladas.** Cabe mencionar que las soluciones fundamentales fueron introducidas por Laurent Schwartz, mientras que los autores Malgrange y Ehrenpreis demostraron la existencia de dicho tipo de soluciones para operadores diferenciales parciales con coeficientes constantes [Smyrlis, 2009]. El MFS fue introducido por Kupradze y Aleksidze en 1963 e inicialmente se conoció como Método de series generalizadas de Fourier. En esta versión inicial del método, para la solución de problemas de Laplace, como el siguiente

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con condiciones tipo Dirichlet en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, sin agujeros, las singularidades eran colocadas sobre una *frontera virtual*, es decir, una frontera prescrita $\partial\Omega'$ de un dominio Ω' , satisfaciendo que $\bar{\Omega} \subset \Omega'$. La función $\phi(x, y) = e_1(x - y)$, donde

$$e_1(x) = \begin{cases} -\frac{\log|x|}{2\pi}, & \text{si } n = 2 \\ -\frac{|x|^{2-n}}{(2-n)\omega_{n-1}}, & \text{si } n > 2 \end{cases} \quad (2)$$

es una solución fundamental del operador Laplaciano (más precisamente de $-\Delta$, el cual es un operador elíptico de acuerdo a la definición), donde ω_{n-1} es el área de la superficie de la esfera unitaria S^{n-1} en \mathbb{R}^n y $|\cdot|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^n .

Las primeras innovaciones técnicas realizadas al MFS fueron llevadas a cabo por Mathon y Johnston en 1977. En el tratamiento que realizaron dichos autores los coeficientes de la combinación lineal que sirve como aproximación a la solución se elegían de manera tal que se minimizara la distancia (L^2) de la solución aproximada a los datos de frontera. La ubicación de las singularidades no era preestablecida, sino que también se determinaba a través del proceso de minimización, esto implicaba que se tuviera que resolver un problema de optimización no lineal.

En las décadas más recientes se han formulado varias maneras de implementar el MFS, pero hay dos que son las de uso más extendido:

- En la primera versión las singularidades se ubican en una superficie fija. Esto da origen a la necesidad de resolver un sistema lineal. *Ésta es la versión que se utiliza en el presente trabajo.*
- En la versión alternativa la ubicación de las singularidades se determina como parte de la solución del problema discreto. Esto conduce a un proceso de optimización no lineal. [Smyrlis, 2009].

“Los primeros usos del método fueron para la solución de varios problemas de potencial lineal en dos y tres variables espaciales. Desde entonces ha sido aplicado a una variedad de problemas más complicados tales como problemas de potencial plano involucrando condiciones en la frontera no lineales tipo radiación, problemas de frontera libre, problemas biarmónicos, problemas elastostáticos y problemas de dispersión de ondas.” [Fairweather & Karageorghis, 1998, p. 71].

El Método de Soluciones Fundamentales se ha convertido, por su relativa facilidad de implementación, en una opción viable ante otros métodos clásicos, como lo son: el método de diferencias finitas (FDM), el método de elemento finito (FEM), el método de volumen finito (FVM) y el método de elemento de frontera (BEM). Todos estos métodos son conocidos como métodos ‘dependientes de malla’, mientras que el MFS pertenece a los métodos ‘libres de malla’. [Tsai et al., 2006].

Planteamiento

En la formulación del MFS que se usa en la presente investigación, los coeficientes, c_j , de la combinación lineal de soluciones fundamentales, que representa la aproximación a la solución del problema dado, se obtienen por medio de la colocación de los datos de frontera. En el caso de un problema con condición Dirichlet, lo anterior se realiza al elegir M puntos $\{s_j\}_{j=1}^M$ sobre $\partial\Omega'$ (la frontera virtual), en los cuales se ubican las llamadas *fuentes puntuales* (singularidades); y N puntos $\{x_k\}_{k=1}^N$, los *puntos de colocación*, sobre la frontera real $\partial\Omega$, y se requiere que la solución aproximada $u_{M,N}$ satisfaga:

$$u_{M,N}(x_k; c) = \sum_{j=1}^M c_j \phi(x_k, s_j) = f(x_k), \quad k = 1, \dots, N \quad (3)$$

donde los $c = \{c_j\}_{j=1}^N$, son los coeficientes por determinar y $f(x_k)$ es la condición de frontera evaluada en el punto x_k . La igualdad (3) determina un sistema lineal no homogéneo $M \times N$. Si se cumple que $M = N$, el sistema tiene solución única si la matriz del sistema no es singular. En esta investigación el MFS se implementará usando el mismo número de fuentes puntuales, s_j , que de puntos de colocación x_k , por consecuencia la matriz del sistema será siempre una matriz cuadrada, y por ello en lo subsecuente se denotará con u_N a la solución aproximada.

Es importante mencionar que, teóricamente, el hecho de ubicar las fuentes puntuales ‘más lejos’ del dominio, Ω , nos da como resultado un peor condicionamiento, es decir, la estabilidad del problema se ve disminuida; sin embargo la exactitud de la solución aproximada se incrementa. La cuestión relacionada con el condicionamiento tiene importancia significativa, ya que si se quiere sacrificar estabilidad con el objetivo de aumentar la exactitud, entonces se deben tomar en cuenta otros factores tales como la precisión de la computadora en la cual realicemos los cálculos.

“Bogomolny (1985) mejoró los fundamentos teóricos del MFS cuando se consideran ubicaciones *a priori* de las fuentes puntuales. Como resultado, el MFS se vuelve más fácil y más eficiente en implementaciones prácticas. Sin embargo, el mal condicionamiento y la ubicación de las fuentes puntuales son cuestiones problemáticas desde el punto de vista numérico.” [Tsai et al., 2006, p. 103].

Sin embargo, para el orden del error, se cuenta con resultados para ciertas configuraciones [Fairweather & Karageorghis, 1998, pág. 5], por ejemplo: para los dominios circulares de radio r , con frontera virtual igualmente circular, de radio R , en los que tanto las singularidades como los puntos de colocación sean distribuidos uniformemente, se sabe que:

$$\sup_{P \in \Omega} |u(P) - u_N(P)| = O\left(\left(\frac{r}{R}\right)^N\right) \quad (4)$$

Planteamiento del problema elíptico

Se considera ahora el **problema elíptico**:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, & \text{en } \Omega \\ Bu = f, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

donde \mathcal{L} es un operador diferencial parcial elíptico, u es la variable dependiente por ser determinada, Ω es un subconjunto abierto acotado en \mathbb{R}^n , B es el operador diferencial asociado con la función f de la condición de frontera y $\partial\Omega$ denota la frontera del dominio Ω . La forma del operador B que especifica la **condición de frontera** se expresa a través de:

$$Bu(x) = \begin{cases} a(x) + u(x), & x \in \partial\Omega_1 \text{ (condición tipo Dirichlet)}, \\ a(x) + \frac{\partial u}{\partial n}(x), & x \in \partial\Omega_2 \text{ (condición tipo Neumann)}, \\ a(x) + b(x)u(x) + c(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x), & x \in \partial\Omega_3 \text{ (condición tipo Robin)}, \end{cases} \quad (6)$$

donde a , b y c son funciones prescritas, y $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$. El objetivo del Método de Soluciones Fundamentales es aproximar la solución a (5) a través de una función que tiene la forma:

$$u_N(x; c) = \sum_{j=1}^N c_j \phi(x, s_j)$$

es decir, una función que es combinación lineal de soluciones fundamentales $\phi(x, s_j)$ de la ecuación diferencial dada, donde las s_j son las ubicaciones de las singularidades de dichas funciones.

El presente trabajo de investigación se basa fundamentalmente en el análisis teórico presentado por Yiorgos Smyrlis [Smyrlis, 2009], ya que en su propuesta se estudia la aproximación a través de soluciones fundamentales usando normas más adecuadas, como lo son las normas de los espacios $C^\ell(\bar{\Omega})$. Tales normas corresponden a las formulaciones clásicas de los problemas elípticos con valores en la frontera. Otra ventaja es que los dominios incluidos en las justificaciones pueden poseer agujeros.

Metodología

Antes de exponer los pasos que se seguirán en la implementación del MFS, cabe mencionar que Bogomolny (1985) propuso ubicar a las fuentes puntuales, *i. e.* las singularidades de las soluciones fundamentales, uniformemente distribuidas sobre la frontera de un círculo que *abarque* al dominio computacional Ω . Por otro lado Heise (1976) propone ubicarlas sobre una frontera virtual, denotada por $\partial\Omega'$, que sea equidistante de la frontera real, $\partial\Omega$. El autor Tsai (véase [Tsai et al., 2006]) sugiere seguir el método de Heise, que generalmente proporciona mejores resultados en dominios con formas básicas; de manera que, siguiendo tal recomendación, el procedimiento para ubicar a las fuentes puntuales que se siguió en los primeros experimentos numéricos en esta investigación es el siguiente: considerando el dominio computacional en cuestión, Ω , y siendo $\partial\Omega$ su frontera, entonces:

- I. Los puntos de colocación se distribuyen uniformemente sobre $\partial\Omega$.
- II. Se localiza el centro geométrico, x_c , del dominio Ω (el centro geométrico también es conocido como **centroide**).
- III. Las fuentes puntuales se ubican de acuerdo a la ecuación siguiente

$$s = x_k + \lambda(x_k - x_c) \quad (7)$$

donde s_j y x_k son las coordenadas de las ubicaciones de las fuentes puntuales y de los puntos de colocación, respectivamente; λ es un parámetro escalar que determina la ‘cercanía’ de las fuentes puntuales, s_j , a la frontera real, $\partial\Omega$.

La figura 1 muestra de manera esquemática el resultado de aplicar el procedimiento anterior a cierto dominio (en este caso un dominio rectangular):

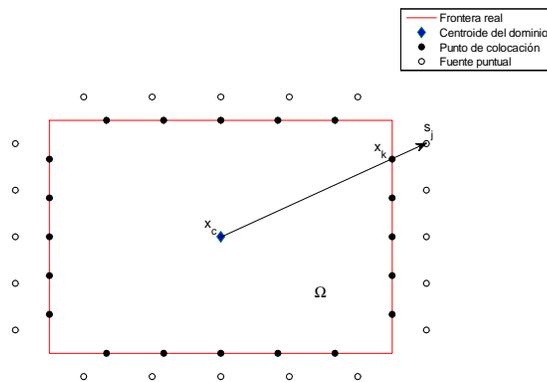


Figura 1: Esquema del procedimiento de ubicación de las fuentes puntuales

Sin embargo, uno de los propósitos de este trabajo es explorar distintas variantes en cuanto a las configuraciones de las fronteras virtuales, de manera que cuando se usó una frontera virtual de distinta forma a la de la frontera real, se usó el procedimiento siguiente:

- I. Los puntos de colocación se distribuyen uniformemente sobre $\partial\Omega$.
- II. Se localiza el centro geométrico, x_c , del dominio Ω .
- III. Las fuentes puntuales no se obtienen a través de una transformación homotética sino de una transformación proyectiva de los puntos de colocación, con x_c como foco de la proyección y con $\lambda > 1$; de manera que la ecuación (7) sigue siendo válida para cada una de las fuentes puntuales consideradas de manera individual.

Una vez que fueron realizados los experimentos con distribución uniforme de los puntos de colocación, se procedió al uso de distribuciones no uniformes. La distribución en estos casos se basó en el concepto de "nodos de Chebyshev". El lector puede encontrar una breve explicación al respecto en la siguiente sección. El procedimiento que se siguió fue el siguiente:

- I. Los puntos de colocación se distribuyen uniformemente sobre $\partial\Omega$ (o en función del experimento, la distribución uniforme se realiza sobre la frontera virtual).
- II. Las fuentes puntuales se distribuyen de forma no uniforme, basados en el concepto de nodos de Chebyshev (o dependiendo del experimento, se usa la distribución no uniforme de los puntos de colocación). Cabe destacar que en este caso la ecuación (7) deja de ser válida (*i. e.* un punto de colocación específico no se encuentra sobre el mismo radio-vector que su correspondiente fuente puntual).

Una vez explicada la metodología seguida para ubicar a las fuentes puntuales, ahora se continúa con la exposición de los pasos por seguir en la implementación del Método de Soluciones Fundamentales. A grandes rasgos la implementación numérica del MFS consiste en:

1. Si la ecuación diferencial correspondiente a nuestro problema es $\mathcal{L}u = 0$ en Ω , determinar una función, $\phi(x, s)$, tal que $\mathcal{L}_x\phi(\cdot, s) = \delta_s$, con $s \in \mathbb{R}^n$ (*i. e.* determinar la solución fundamental para la ecuación dada).
2. Seleccionar $\{x_k\}_{k=1}^N$ de puntos sobre $\partial\Omega$ (*frontera real*). Éstos son los puntos de colocación.
3. De acuerdo a la configuración específica del experimento, determinar la ubicación de las fuentes puntuales $\{s_j\}_{j=1}^N$ usando alguno de los procedimientos de los párrafos inmediatos anteriores de esta misma sección.
4. Se toma una de las s_j y se obtiene $\phi(x, s_j)$; el resultado de dicha sustitución debe ser acompañado por un coeficiente c_j que queda por determinar. Se realiza el mismo procedimiento para las demás s_j y finalmente se obtiene $w(x) := \sum_{j=1}^N c_j\phi(x, s_j)$.
5. Se toma uno de los x_k (ver el paso 2) y se sustituye en la condición de frontera, se obtiene después $w(x_k)$ y se establece una ecuación entre los resultados correspondientes. Se realiza el mismo procedimiento para las demás x_k . De esta manera, se obtiene el sistema lineal (3).
6. Se soluciona el sistema lineal (3), obtenido en el paso 5. De esta manera quedan determinados los coeficientes c_j de la combinación lineal del paso 4; dicha combinación lineal de soluciones fundamentales es la aproximación, $u_N(x; c) = \sum_{j=1}^N c_j\phi(x, s_j)$, a la solución del problema que está en cuestión.

En el presente trabajo se analizará la exactitud del MFS, así como su estabilidad numérica; para ello se seleccionarán *ejemplos de prueba*, es decir, problemas con soluciones exactas conocidas [dichas soluciones se denominarán *soluciones de prueba*], se aplicará el método, se tomarán puntos en el dominio del problema [denominados de aquí en adelante como *puntos de prueba*], se evaluará tanto la aproximación como la solución exacta en dichos puntos y se determinará el error relativo y el **número de condición** de la matriz del sistema. De esta manera se pretende observar cómo varía la exactitud y la estabilidad numérica del método con respecto a los siguientes factores: la distancia de la frontera virtual, $\partial\Omega'$, al dominio del problema (Ω), la cantidad de términos, N , usados en la aproximación, la configuración de la frontera virtual usada y la manera en que se distribuyen los puntos de colocación y las fuentes puntuales.

Ejemplos de prueba y resultados

Operador Laplaciano

Denotemos por Ω un dominio plano (i. e. un conjunto abierto, conexo y no vacío en \mathbb{R}^2). La ecuación de Laplace se expresa de la forma siguiente:

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (8)$$

Una función $u \in C^2(\Omega)$ que satisfaga (8) es llamada *función armónica en Ω* [Pinchover, 2005].

Para el operador Laplaciano la solución aproximada al problema con valores en la frontera, expresada como combinación lineal de soluciones fundamentales (ver [Tsai et al., 2006], [Smyrlis, 2009]), es de la forma:

$$u_N(x; c) = \sum_{i=1}^N c_i \left[\frac{-1}{2\pi} \ln \left(\frac{|x - s_i|}{R} \right) \right], \quad R > 0, \quad x \in \Omega \quad (9)$$

donde N es el número de puntos de colocación usados (que en este trabajo coincide con el número de fuentes puntuales); los c_j son los coeficientes por determinar, y los s_j son las ubicaciones de las fuentes puntuales, determinadas a partir de las directivas expuestas en la sección de Metodología.

Problemas con condición en la frontera tipo Dirichlet

El problema de Laplace con condición en la frontera tipo Dirichlet es de la forma:

$$\begin{cases} \Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

Para la implementación numérica se requiere tener los valores de la función desconocida u en N puntos diferentes ubicados en la frontera $\partial\Omega$.

En los ejemplos de prueba siguientes se usa el procedimiento expuesto en la Metodología, en la implementación del MFS.

Nodos de Chebyshev

Cuando se quiere aproximar una función, $f(x)$, a través del uso de una interpolación polinomial, dentro de un intervalo $[a, b]$, y se usan nodos uniformemente espaciados dentro de dicho intervalo, se observa un fenómeno conocido como **fenómeno de Runge**. Este fenómeno consiste en la presencia de grandes oscilaciones cerca de los extremos del intervalo. Si la cantidad de nodos es aumentada, entonces las oscilaciones incrementan aún más su amplitud. Este fenómeno es indeseado ya que significa una sensible disminución de la exactitud de la aproximación en las regiones cercanas a los extremos del intervalo.

Al usar nodos de Chebyshev para construir un polinomio de interpolación, el error debido al fenómeno de Runge es mucho más pequeño. Bajo la condición de usar nodos de Chebyshev, el error de hecho tenderá a ser cero conforme aumenta el número de nodos usados. Los **nodos de Chebyshev**, en el intervalo $[-1, 1]$, son los valores de abscisas que se obtienen al aplicar la siguiente fórmula

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \text{ para } k = 0, 1, \dots, n-1$$

donde n es la cantidad de nodos deseados. [Mathews & Fink, 1999, pp. 232 - 240].

Si se quiere obtener los nodos de Chebyshev en el intervalo $[a, b]$, lo que se hace es aplicar una transformación afín a las abscisas obtenidas mediante la fórmula anterior, de manera que

$$x_k = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + \frac{a+b}{2}, \text{ para } k = 0, 1, \dots, n-1$$

ésta es la fórmula que se usó en los ejemplos de prueba de este sección, pero se usó para determinar los valores del parámetro t que determinan la ubicación de los puntos de colocación, de acuerdo a las ecuaciones paramétricas que generan las respectivas fronteras de los dominios.

Dominio circular

OBSERVACIONES PRELIMINARES:

1. Los dominios utilizados en la presente investigación son todos circulares; bibliografía, resultados numéricos y teóricos para otro tipo de dominios pueden encontrarse en [Smyrlis, 2009, pág. 1402 y 1403].
2. En los experimentos se calcula en unos casos, el error relativo cuando la distancia de las singularidades al dominio se deja fija y lo que cambia es la cantidad de puntos utilizados; en otros casos se calcula el error relativo que se obtiene al variar la distancia de las singularidades al dominio, dejando fija la cantidad de puntos usados. Esto tiene como finalidad comparar el efecto por separado de ambos factores y reportarlo en las conclusiones.

- Solución de prueba: $f(x, y) = x + y + 3$

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$

Esquemas de las configuraciones usadas en los experimentos

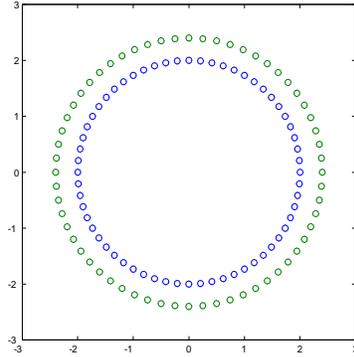


Figura 2: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar distribuciones uniformes. Dominio circular con frontera virtual circular.

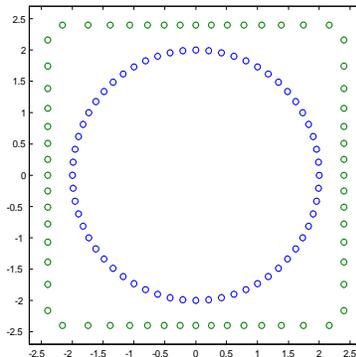


Figura 3: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar distribuciones uniformes. Dominio circular con frontera virtual cuadrada.

Comportamiento del error relativo al interior del dominio

Experimento 0.0a

Se usaron en el experimento los valores de $N = 10, 15, 20, 25$ y 30 términos en la solución aproximada; en todos los casos se mantuvo el parámetro λ (el parámetro que determina la ubicación de la frontera virtual) en un valor $\lambda = 1,2$, lo que implica que las fuentes puntuales se ubicaron sobre una circunferencia de radio $2,4$ ($2 \times 1,2 = 2,4$). Se presenta en la figura

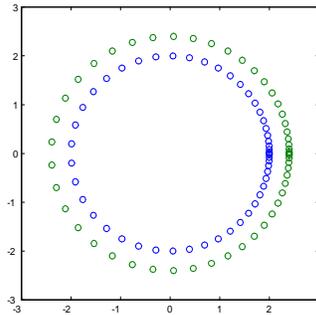


Figura 4: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar NODOS DE CHEBYSHEV. Dominio circular con frontera virtual circular.

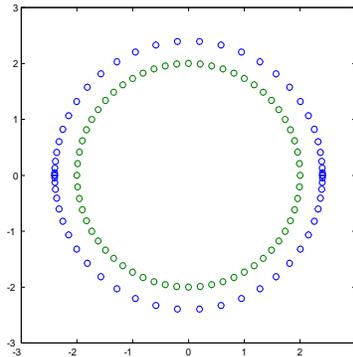


Figura 5: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar NODOS DE CHEBYSHEV. Dominio circular (distribución uniforme) con frontera virtual circular (distribución no uniforme simétrica).

8 el comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio:

Se observa que el error disminuye al incrementarse el número de términos incluidos en la aproximación; de hecho, al tomarse el valor máximo de error relativo en cada una de las gráficas y calcular la variación porcentual entre dos valores consecutivos, se observaron disminuciones alrededor del 70% por cada incremento de 5 términos usados en la solución aproximada [véase el cuadro 1].

Experimento 0.0c

En el experimento se usaron los valores $\lambda = 1,2, 1,3, 1,4, 1,5$ y $1,6$; en todos los casos se mantuvo la cantidad de términos usados en la aproximación en 10. Entonces en este experimento el objetivo fue observar el comportamiento del error al cambiar la distancia de la frontera virtual con respecto al dominio del problema, manteniendo fija la cantidad de términos en la combinación lineal de soluciones fundamentales. Se presenta en la figura 9 el

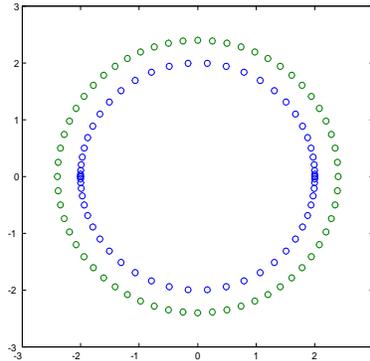


Figura 6: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar NODOS DE CHEBYSHEV. Dominio circular (distribución no uniforme simétrica) con frontera virtual circular (distribución uniforme).

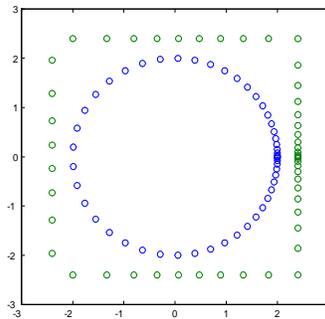


Figura 7: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar NODOS DE CHEBYSHEV. Dominio circular con frontera virtual cuadrada.

Gráfica ($\lambda = 1,2$)	Valor máximo de error relativo sobre la gráfica	Variación porcentual
10 términos	0.0362493251182666	
15 términos	0.00953803573420945	-73.6876874173774
20 términos	0.00284544375165032	-70.1674031116831
25 términos	0.000912127443548269	-67.9442813438415
30 términos	0.000305176460177167	-66.5423442375552

Cuadro 1: Experimento 0.0a. Cuadro comparativo. Dominio circular

comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio:

Se observa que el error disminuye al incrementarse el valor del parámetro λ . De igual manera que en el primer experimento, se tomó el máximo valor de error relativo en cada una

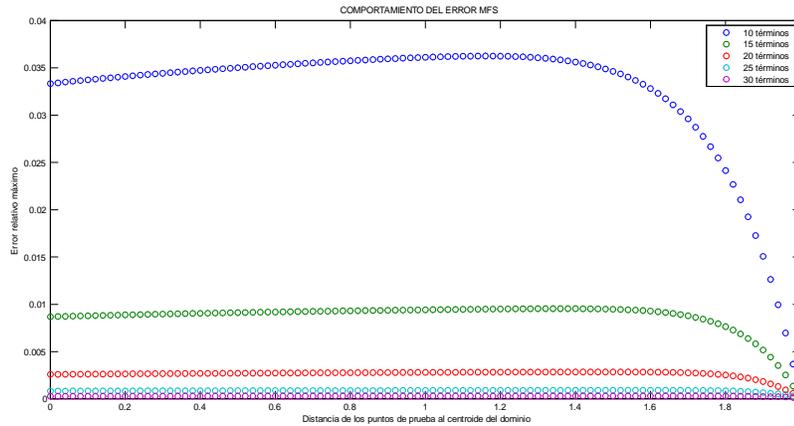


Figura 8: Experimento 0.0a. Comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. Número de términos en la solución aproximada: 10, 15, 20, 25 y 30. Lambda= 1.2

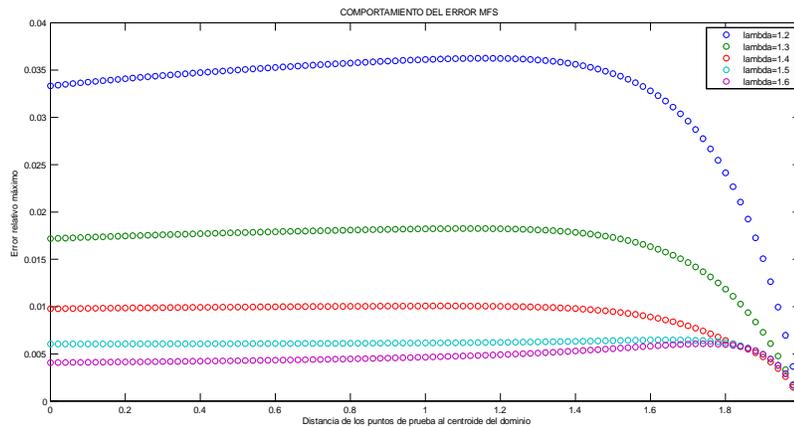


Figura 9: Experimento 0.0c. Comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. Valores de lambda: 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6. Número de términos en la aproximación: 10

de las gráficas, observándose una disminución porcentual, en tal valor, de alrededor del 50 %, en el paso de $\lambda = 1,2$ a $\lambda = 1,3$, sin embargo, la disminución fue decreciendo hasta llegar a un valor de aproximadamente 6.3 %, en el paso de $\lambda = 1,5$ a $\lambda = 1,6$ [véase el cuadro 2].

Experimento 0.1a

En el experimento, se tuvo como objetivo observar el comportamiento del error relativo máximo, pero esta vez utilizando una frontera virtual de forma cuadrada. Se usaron



Gráfica (10 términos)	Valor máximo de error relativo sobre la gráfica	Variación porcentual
$\lambda = 1,2$	0.0362493251182666	
$\lambda = 1,3$	0.0182478238784219	-49.6602383109568
$\lambda = 1,4$	0.0100611333666954	-44.8639277004821
$\lambda = 1,5$	0.00647995374155604	-35.5941969420052
$\lambda = 1,6$	0.00606802537479935	-6.35696462021003

Cuadro 2: Experimento 0.0c. Cuadro comparativo. Dominio circular

10, 15, 20, 25 y 30 términos en la solución aproximada; en todos los casos se mantuvo el parámetro λ (el parámetro que determina la ubicación de la frontera virtual) en un valor $\lambda = 1,2$, lo que implica que las fuentes puntuales se ubicaron sobre un cuadrado de lado 4,8 ($4 \times 1,2 = 4,8$). Se presenta en la figura 10 el comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio:

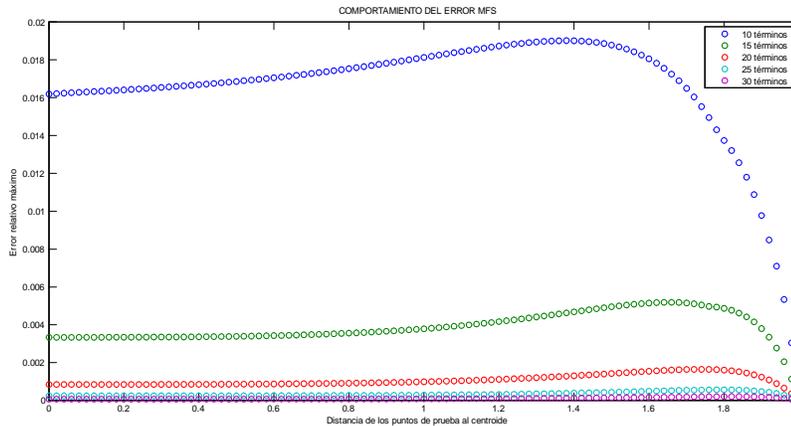


Figura 10: Experimento 0.1a. Comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular, frontera virtual cuadrada. Número de términos en la solución aproximada: 10, 15, 20, 25 y 30. Lambda= 1.2

Se observa que el error disminuye al incrementarse el número de términos incluidos en la aproximación; en este experimento la disminución porcentual entre dos valores consecutivos de error relativo máximo se encuentra alrededor del 65 %, como puede verse en el cuadro 3.

Experimento 0.1c

En el experimento se usó el parámetro lambda (el parámetro que determina la ubicación de la frontera virtual) con valores de 1,2, 1,3, 1,4, 1,5 y 1,6 ; en todos los casos se mantuvo el número de términos en la solución aproximada en un valor de 10. Se presenta en la figura 11 el comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio:



Gráfica ($\lambda = 1,2$)	Valor máximo de error relativo sobre la gráfica	Variación porcentual
10 términos	0.0190122256152687	
15 términos	0.00518781446479891	-72.7132710826208
20 términos	0.00164807593008317	-68.2317873689214
25 términos	0.000567637420719408	-65.5575686557863
30 términos	0.000208801864135600	-63.2156273504713

Cuadro 3: Experimento 0.1a. Cuadro comparativo. Dominio circular

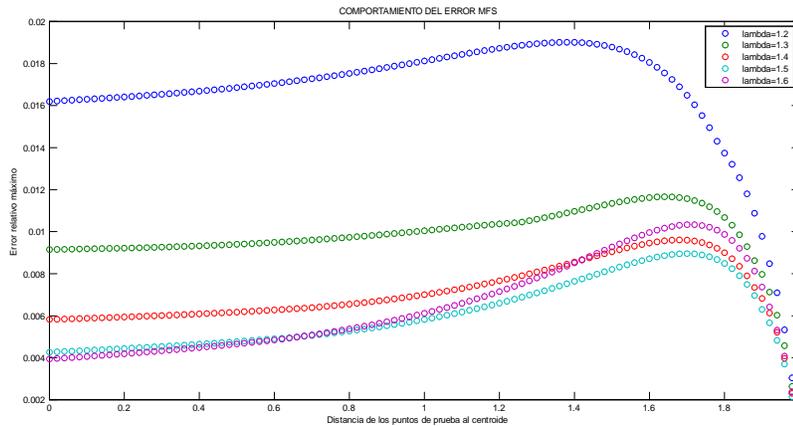


Figura 11: Experimento 0.1c. Comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular, frontera virtual cuadrada. Número de términos en la solución aproximada: 10. Lambda= 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6

Se observa que en general el error disminuye al incrementarse el parámetro lambda; sin embargo, las disminuciones porcentuales en los valores consecutivos máximos de error relativo son menores, en comparación con los experimentos anteriores. Tales disminuciones van desde un valor de 38.6 %, en el paso de $\lambda = 1,2$ a $\lambda = 1,3$, hasta incluso un aumento de 15.35 % en el error, esto al pasar de $\lambda = 1,5$ a un valor de $\lambda = 1,6$ [véase el cuadro 4].

Gráfica (10 términos)	Valor máximo de error relativo sobre la gráfica	Variación porcentual
$\lambda = 1,2$	0.0190122256152687	
$\lambda = 1,3$	0.0116608238349425	-38.6667080913574
$\lambda = 1,4$	0.00960607295190737	-17.6209752597230
$\lambda = 1,5$	0.00895814247293495	-6.74500893566266
$\lambda = 1,6$	0.0103339560910179	15.3582466704413

Cuadro 4: Experimento 0.1c. Cuadro comparativo. Dominio circular



Variación porcentual del error relativo

Experimento 0.0b

En el experimento, el propósito consistió en repetir el esquema del experimento 0.0a (manteniendo $\lambda = 1,2$ fijo), pero explorando el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo entre los valores máximos de 2 gráficas consecutivas para valores mayores de N . La figura 12 muestra el resultado de este experimento. El dato a destacar es que el último punto en el cual la variación porcentual fue negativa se obtuvo con un $N = 175$ y una disminución porcentual de 9.719%.

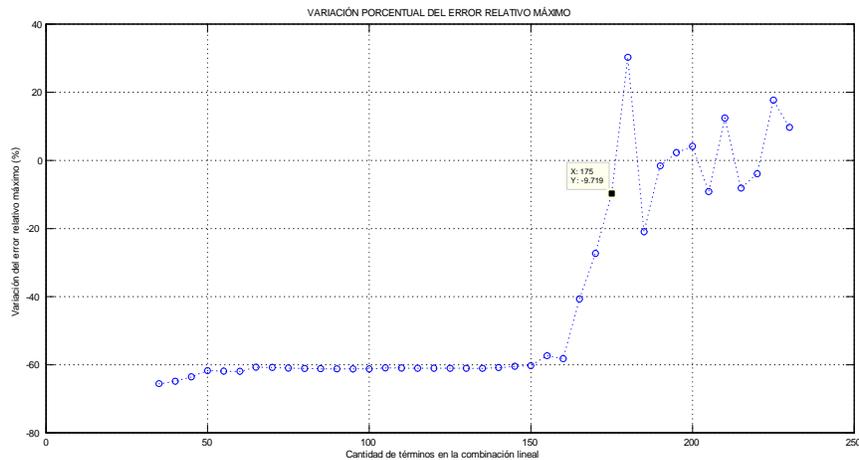


Figura 12: Experimento 0.0b. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N . Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. Lambda= 1.2

Experimento 0.0d

En el experimento, el propósito consistió en repetir el esquema del experimento 0.0c (dejando $N = 10$ fijo), pero explorando el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo entre los valores máximos de 2 gráficas consecutivas para valores mayores de λ . La figura 13 muestra el resultado de este experimento. El dato a destacar es que el último punto en el cual la variación porcentual fue negativa se obtuvo con un $\lambda = 1,65$ y una disminución porcentual de 0.841%.

Experimento 0.0u

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 4, con nodos de Chebyshev en ambas fronteras. Se mantuvo el valor $\lambda = 1,2$ fijo y se varió el valor de N . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 38.75% usando 235 términos en la aproximación al problema con valores en la frontera.

Experimento 0.0v

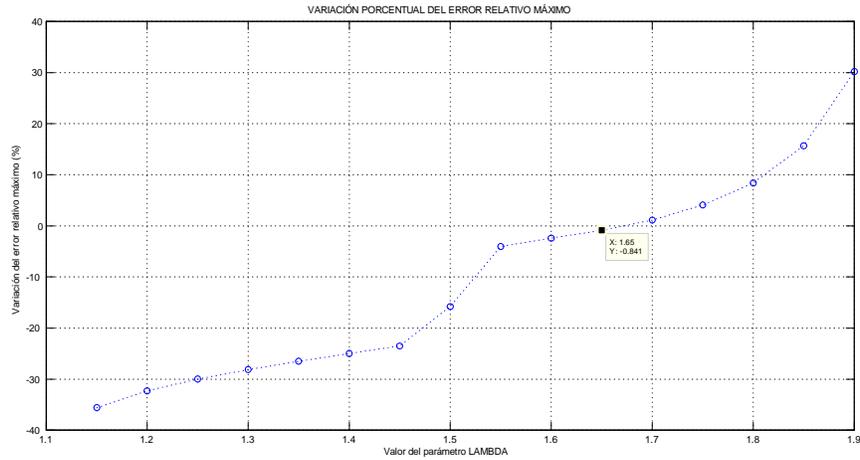


Figura 13: Experimento 0.0d. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. $N = 10$

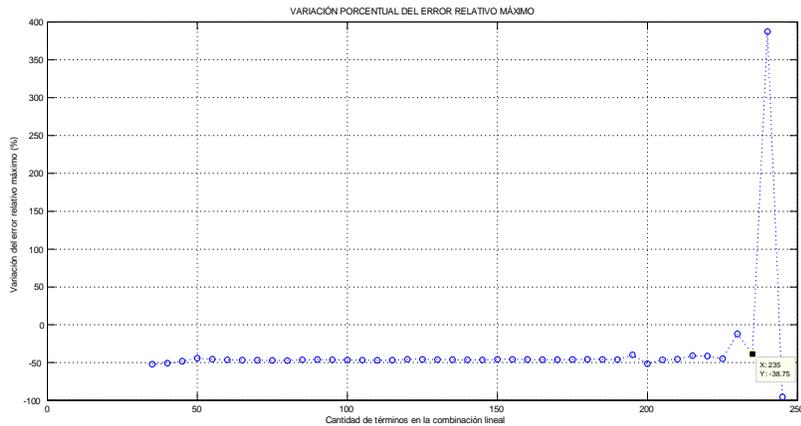


Figura 14: Experimento 0.0u. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N . Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. $\lambda = 1.2$

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 4, con nodos de Chebyshev en ambas fronteras. Se mantuvo el valor $N = 10$ fijo y se varió el valor de λ . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 0.5742% usando el parámetro lambda con un valor de 1.5.

Experimento 0.0w

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 5, con nodos de Chebyshev sólo en la frontera virtual. Se mantuvo el valor $\lambda = 1,2$ fijo y se varió el



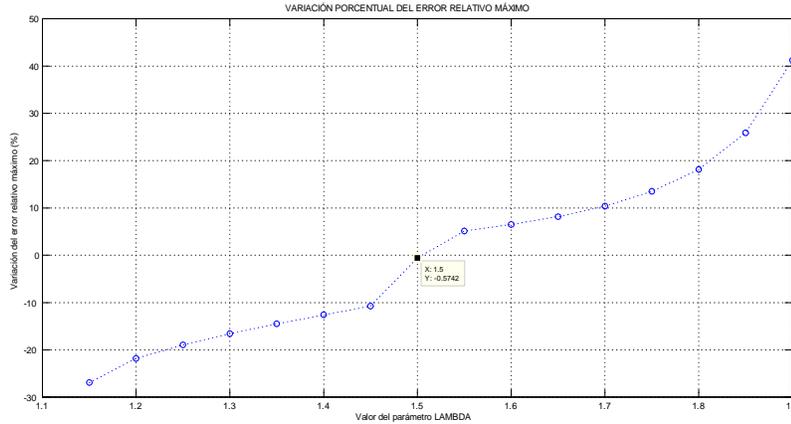


Figura 15: Experimento 0.0v. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. N= 10

valor de N . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 98.66 % usando 66 términos en la aproximación al problema con valores en la frontera. Se destaca la inestabilidad observada en el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo.

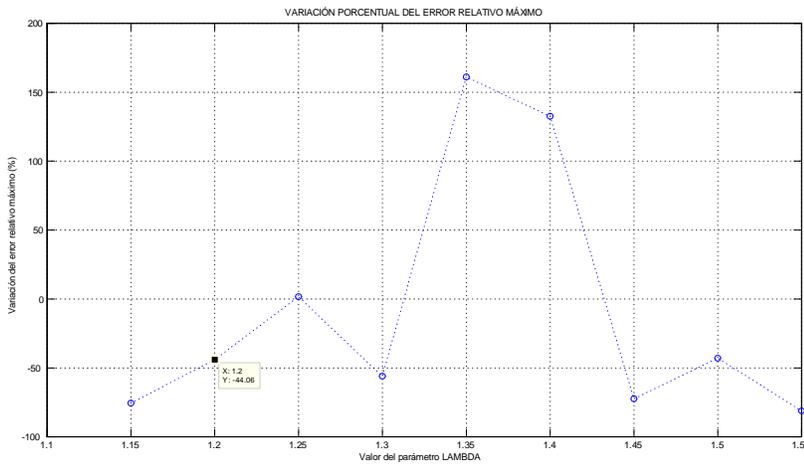


Figura 16: Experimento 0.0w. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. Lambda= 1.2

Experimento 0.0x

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 5, con nodos de Chebyshev sólo en la frontera virtual. Se mantuvo el valor $N = 10$ fijo y se



varió el valor de λ . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 43.72 % usando el parámetro lambda con un valor de 1.1. Se destaca la inestabilidad observada en el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo.

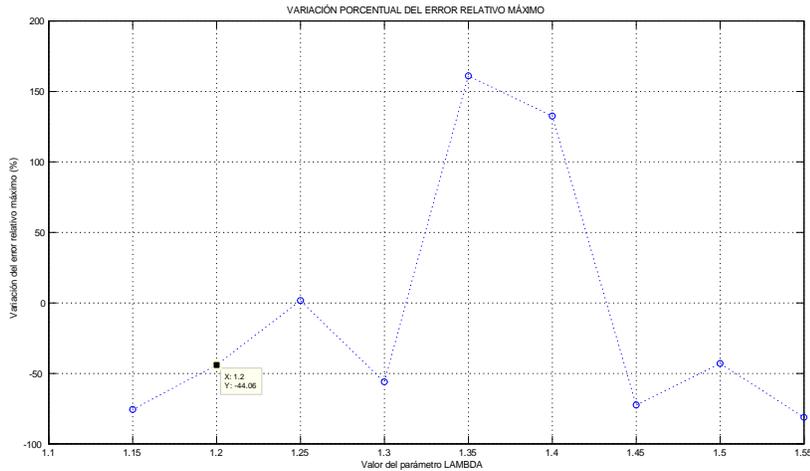


Figura 17: Experimento 0.0x. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. $N=10$

Experimento 0.0y

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 6, con nodos de Chebyshev sólo en la frontera real. Se mantuvo el valor $\lambda = 1,2$ fijo y se varió el valor de N . Se observó que la última variación porcentual negativa se obtuvo al usar 36 términos en la aproximación al problema con valores en la frontera.

Experimento 0.0z

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 6, con nodos de Chebyshev sólo en la frontera real. Se mantuvo el valor $N = 10$ fijo y se varió el valor de λ . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 44.06 % usando el parámetro lambda con un valor de 1.2. Se destaca la inestabilidad observada en el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo.

Experimento 0.1b

En el experimento, el propósito consistió en repetir el esquema del experimento 0.1a (dejando $\lambda = 1,2$ fijo), pero explorando el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo entre los valores máximos de 2 gráficas consecutivas para valores mayores de N . La figura 20 muestra el resultado de este experimento. El dato a destacar es que el último punto en el cual la variación porcentual fue negativa se obtuvo con un $N = 155$ y una disminución porcentual de 56.28 %.

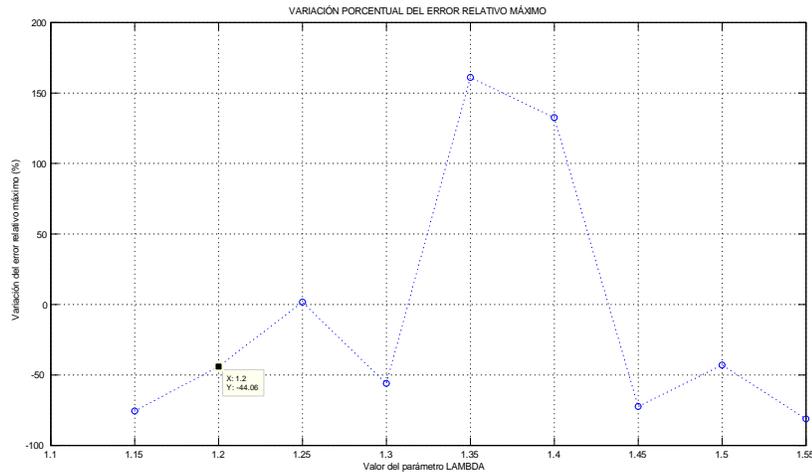


Figura 18: Experimento 0.0y. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N . Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. $\lambda = 1.2$

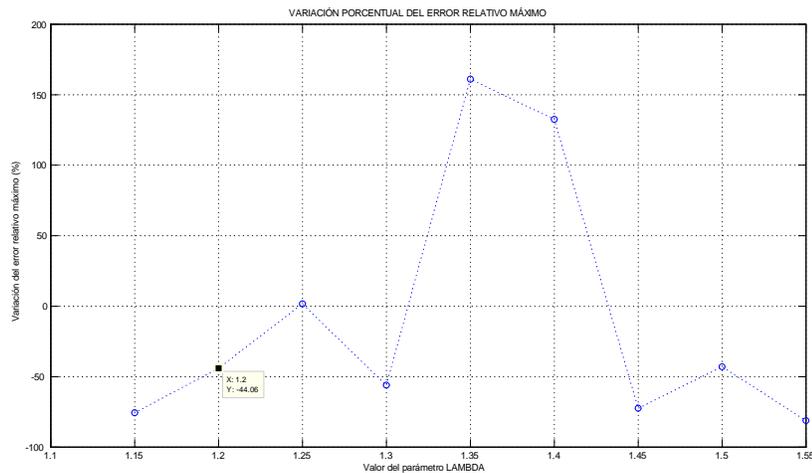


Figura 19: Experimento 0.0z. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de λ . Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. $N = 10$

Experimento 0.1d

En el experimento, el propósito consistió en repetir el esquema del experimento 0.1c (dejando $N = 10$ fijo), pero explorando el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo entre los valores máximos de 2 gráficas consecutivas para valores mayores de λ . La figura 21 muestra el resultado de este experimento. El dato a destacar es que el último punto en el cual la variación porcentual fue negativa se obtuvo con un $\lambda = 1,5$ y una

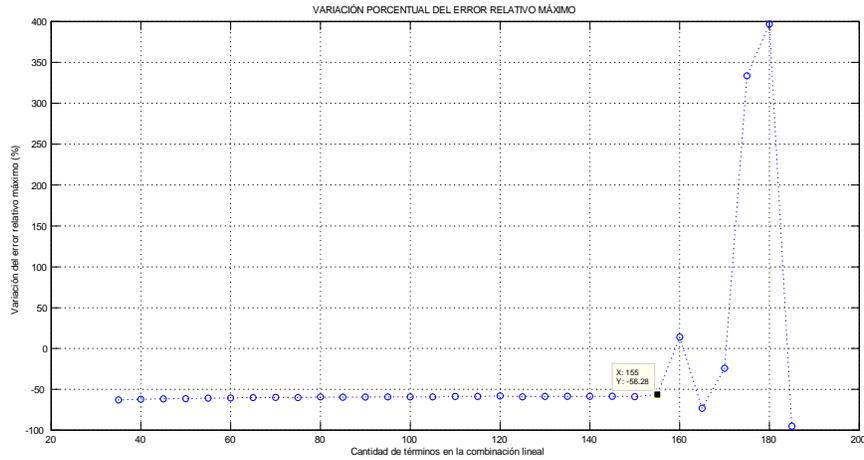


Figura 20: Experimento 0.1b. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual cuadrada. Lambda= 1.2

disminución porcentual de 1.602 %.

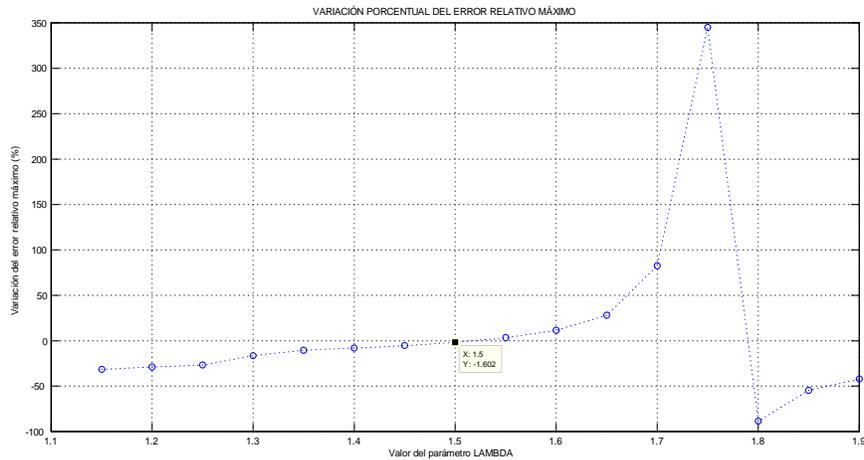


Figura 21: Experimento 0.1d. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual cuadrada. N= 10

Experimento 0.1x

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 7, con nodos de Chebyshev en ambas fronteras. Se mantuvo el valor $\lambda = 1,2$ fijo y se varió el valor de N. Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 25.92 % usando 150 términos en la aproximación al problema con valores en la frontera.



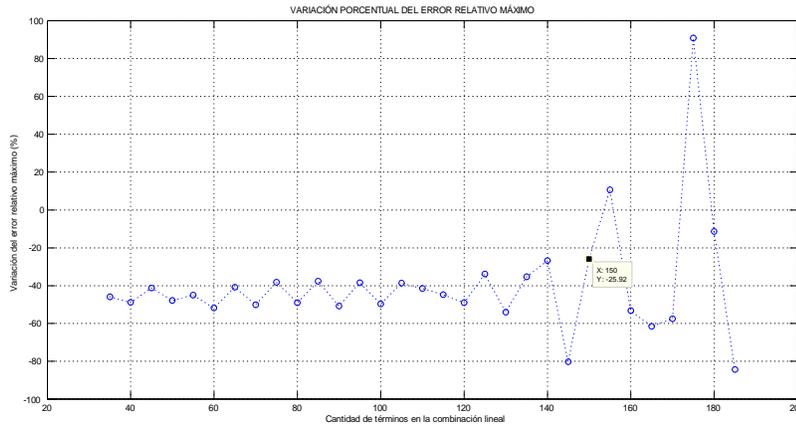


Figura 22: Experimento 0.1x. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual cuadrada. NODOS DE CHEBYSHEV. Lambda= 1.2

Experimento 0.1y

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 7, con nodos de Chebyshev en ambas fronteras. Se mantuvo el valor $N = 10$ fijo y se varió el valor de λ . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 0.7143% usando el parámetro lambda con un valor de 1.35.

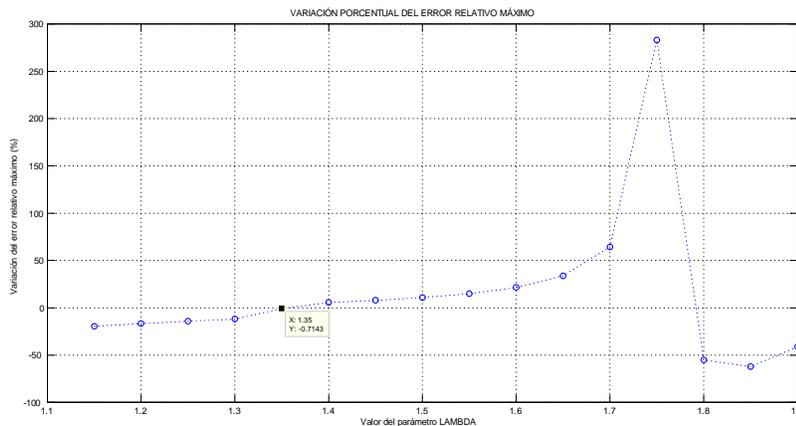


Figura 23: Experimento 0.1y. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual cuadrada. NODOS DE CHEBYSHEV. N= 10

Comportamiento del error relativo con variación conjunta de N y de λ
Experimento 0.0e



Este experimento consistió en tomar puntos de prueba en el interior del dominio Ω , ubicados justo a la mitad de la distancia entre el centroide del dominio y la frontera $\partial\Omega$; se dejó fijo el valor de λ y se varió N , obteniendo el error relativo máximo sobre tales puntos; después se usaron otros valores fijos de λ , variando N para obtener otras curvas del comportamiento del error relativo máximo.

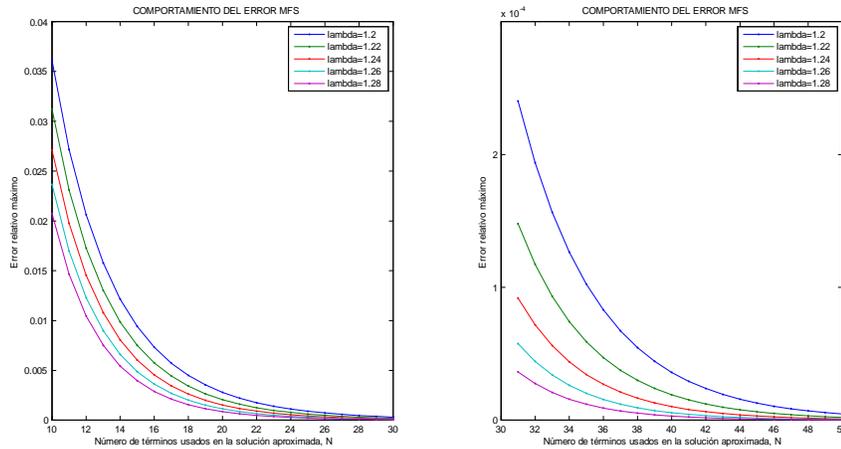


Figura 24: Experimento 0.0e. Comportamiento del error relativo máximo en función del número de términos usados en la solución aproximada (N). Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. Razón de homotecia= $1/2$. Lambda= 1.2, 1.22, 1.24, 1.26 y 1.28

Experimento 0.1e

Este experimento consistió en tomar puntos de prueba en el interior del dominio Ω , ubicados justo a la mitad de la distancia entre el centroide del dominio y la frontera $\partial\Omega$; se dejó fijo el valor de λ y se varió N , obteniendo el error relativo máximo sobre tales puntos; después se usaron otros valores fijos de λ , variando N para obtener otras curvas del comportamiento del error relativo máximo. La diferencia entre este experimento y el anterior (0.0e), es que en este caso la frontera virtual es un cuadrado.

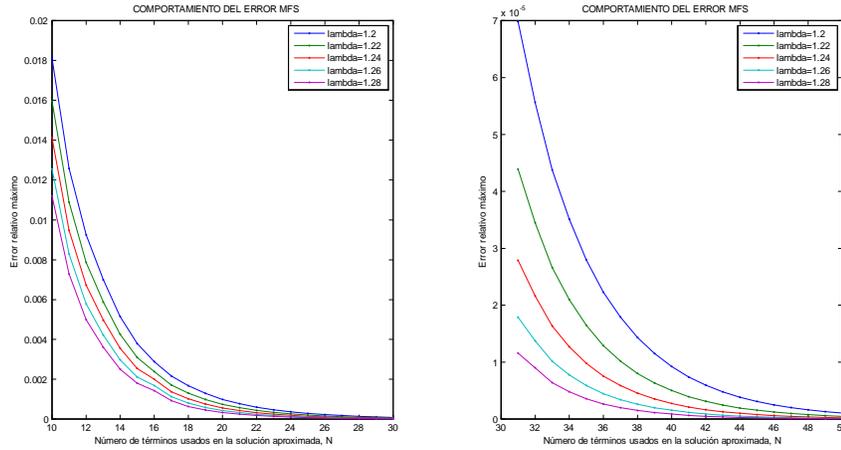


Figura 25: Experimento 0.1e. Comportamiento del error relativo máximo en función del número de términos usados en la solución aproximada (N). Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual CUADRADA. Razón de homotecia= $1/2$. Lambda= 1.2, 1.22, 1.24, 1.26 y 1.28

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en los experimentos numéricos que se presentan en el capítulo de *ejemplos de prueba*, se puede concluir lo siguiente:

1. El comportamiento del error relativo en el Método de Soluciones Fundamentales (MFS) al interior del dominio computacional Ω , cualitativamente no presenta variaciones, independientemente de la configuración utilizada, el error relativo presenta un incremento gradual a partir del centroide del dominio, alcanzando un máximo y después disminuye de manera pronunciada al considerar puntos de prueba más cercanos a la frontera del dominio, $\partial\Omega$.
2. Al examinar la variación porcentual del error relativo, se observó que la variación porcentual es más estable en las configuraciones en las cuales se dejó fijo el parámetro λ , mientras que el valor de N , *i. e.* el número de términos usados en la solución aproximada, se incrementa. En cualquier caso, después de un intervalo de valores (ya sea de N o de λ) en el cual la variación porcentual del error relativo es negativa, se presenta un punto a partir del cual la variación puede ser cero e incluso positiva, esto se debe a peores niveles en el condicionamiento de la matriz del sistema y al límite de precisión de la computadora.
3. Los experimentos mostraron que el error relativo disminuye al incrementar N y al incrementar el valor de λ , lo que es consistente con los resultados de los trabajos publicados por otros autores con respecto al uso del Método de Soluciones Fundamentales.

4. Para finalizar; en el cuadro 5 se presentan los valores de N , error relativo y número de condición para dos configuraciones con dominio circular y utilizando una circunferencia como frontera virtual en ambos casos, teniendo como variante en las configuraciones el hecho de que en una de ellas las distribuciones de las fuentes puntuales y de los puntos de colocación son uniformes, mientras que en el otro caso se utiliza la distribución de Chebyshev, tanto de las fuentes puntuales como de los puntos de colocación.

N	DISTRIBUCIÓN UNIFORME		DISTRIBUCIÓN CHEBYSHEV	
	<i>Error relativo</i>	<i>Núm. de condición</i>	<i>Error relativo</i>	<i>Núm. de condición</i>
10	0.0362493251182666	6.20400984003610	0.0835586293179330	24.6137972334419
20	0.00284544375165032	31.4331409849893	0.0136138210545008	1720.00718582358
30	0.000305176460177167	117.921033125207	0.00298299971027662	151727.592011873
40	3.69921115493869e-05	391.600765933839	0.000702064377755314	16074630.6281557
50	5.16279218030927e-06	1218.23141373402	0.000180391851476531	1902780913.43487
60	7.49824821836914e-07	3637.71769353108	4.72634794804972e-05	242360540849.190
70	1.15652029677408e-07	10560.4870877230	1.29020026750458e-05	32496278216458.8
80	1.75908129253443e-08	30031.8748261809	3.54929366726821e-06	4.20780718692759e+15
90	2.65362735507691e-09	84070.0391751296	9.99772892000442e-07	1.54868089879080e+18
100	3.99120369157408e-10	232436.848845377	2.83071678517915e-07	1.55395852536464e+17

Cuadro 5: Cuadro resumen 1. Dominio circular. Lambda= 1.2 en todos los casos

Se observa en el cuadro 5 que los mejores niveles, tanto de error relativo como de número de condición, fueron obtenidos al usar la configuración con distribución uniforme de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales.

Agradecimientos

Se agradece a los revisores anónimos por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo y por sus valiosas observaciones.

Referencias

- [Chazarain & Piriou, 1982] Chazarain, J. & Piriou, A. (1982). *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*. Studies in Mathematics and its Applications. The Netherlands: North-Holland Publishing Company.
- [Deville et al., 1993] Deville, R., Godefroy, G., & Zizler, V. (1993). *Smoothness and renormings in Banach spaces*. Number 64 in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman Scientific & Technical.
- [Edwards, 1994] Edwards, R. E. (1994). *Functional Analysis*. USA: Dover.
- [Evans, 1998] Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. USA: American Mathematical Society.
- [Fairweather & Karageorghis, 1998] Fairweather, G. & Karageorghis, A. (1998). The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advances in Computational Mathematics*, (9), 69 – 95.
- [Kirillov & Gvishiani, 1981] Kirillov, A. A. & Gvishiani, A. D. (1981). *Theorems and problems in Functional Analysis*. USA: Springer-Verlag.
- [Kreyszig, 1978] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. USA: John Wiley & Sons.
- [Kupradze, 1967] Kupradze, V. D. (1967). On the approximate solution of problems in mathematical physics. *Russian Mathematical Surveys*, 22(2), 58 – 108.
- [Mathews & Fink, 1999] Mathews, J. H. & Fink, K. D. (1999). *Numerical Methods using MATLAB*. USA: Prentice Hall, 3rd edition.
- [Munkres, 2000] Munkres, J. R. (2000). *Topology*. USA: Prentice Hall, 2nd edition.
- [Pinchover, 2005] Pinchover, Y. & Rubinstein, J. (2005). *An Introduction to Partial Differential Equations*. USA: Cambridge University Press, 1st edition.
- [Renardy & Rogers, 2004] Renardy, M. & Rogers, R. C. (2004). *An Introduction to Partial Differential Equations*. Texts in applied Mathematics. USA: Springer, 2nd edition.
- [Rudin, 1973] Rudin, W. (1973). *Functional Analysis*. USA: McGraw-Hill Book Company.
- [Smyrlis, 2009] Smyrlis, Y. S. (2009). Applicability and applications of the method of fundamental solutions. *Mathematics of Computation*, 78(267), 1399 – 1434.
- [Tsai et al., 2006] Tsai, C. C., Lin, Y. C., Young, D. L., & Atluri, S. N. (2006). Investigations on the accuracy and condition number for the method of fundamental solutions. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 16(2), 103 – 114.

[Vladimirov, 1971] Vladimirov, V. S. (1971). *Equations of Mathematical Physics*. USA: Marcel Dekker, Inc.

[Weinstock, 1973] Weinstock, B. M. (1973). Uniform approximation by solutions of elliptic equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 41(2), 513 – 517.

Como citar este artículo: J. F. Centeno Mora. El Método de Soluciones Fundamentales y su uso en problemas Dirichlet para el operador de Laplace. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365,7 (1), 20–46. <https://doi.org/10.36788/sah.v7i1.134>