



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



SahuarUS

Revista electrónica de Matemáticas

Vol. 5
Número 2

Septiembre 2021 · e-ISSN: 2448-5365



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Dra. María Rita Plancarte Martínez

Rectora

Dr. Ramón Enrique Robles Zepeda

Secretario General Académico

Dr. Luis Enrique Riojas Duarte

Secretario General Administrativo

Vicerrectoría de la Unidad Regional Centro

Dra. Diana María Meza Figueroa

Directora de Apoyo a Vinculación y
Difusión

Dr. Rodrigo Meléndrez Amavizca

Director de la División de Ciencias Exactas y
Naturales

Dr. Juan Pablo Soto Barrera

Jefe del Departamento de Matemáticas



Editor Responsable

Dr. Misael Avendaño Camacho

Comité Editorial

Dr. Manuel Adrian Acuña Zegarra

Dra. Carolina Espinoza Villalva

Dra. Carmen Geraldí Higuera Chan

Ing. Aaron Lara Ordoñez

Dra. Gloria Angélica Moreno Durazo

Dr. José Crispín Ruíz Pantaleón

Editores Asociados

Dr. José Luis Cisneros Molina

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, UNAM

Dr. Xavier Gómez Mont

Centro de Investigaciones en Matemáticas

Dr. Juan Carlos Hernández Gómez

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero,
Acapulco, Guerrero

Dr. Fernando Antonio Hitt Espinoza

Universidad de Quebec, Montreal, Canada

Dra. Roxana López Cruz

Facultad de Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,
Lima, Perú

Dr. Humberto Madrid de la Vega

Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas, Universidad
Autónoma de Coahuila

Dr. Pedro Miramontes Vidal

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

Dr. Carlos Gabriel Pacheco González

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

Dra. Sandra Evely Parada Rico

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS, volumen 5, número 2, septiembre 2021 - marzo 2022, es una publicación semestral, editada por la Universidad de Sonora, a través del Departamento de Matemáticas. Blvd. Luis Encinas y Rosales S/N, colonia Centro, Hermosillo, Sonora, México. C.P. 83000. Tel. (662) 2592155. Página web: sahuarus.unison.mx. Correo electrónico: sahuarus@unison.mx. Editor responsable: Misael Avendaño Camacho. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. **04-2017-062817342200-203**, e-ISSN: 2448-5365, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Los artículos publicados por [Sahuarus. Revista Electrónica de Matemáticas](http://Sahuarus.RevistaElectronica.deMatematicas) se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional](http://LicenciaCreativeCommonsAtribucion-NoComercial-SinDerivadas4.0Internacional), la cual permite la distribución y el uso del material publicado citando la fuente de la que proviene, prohíbe la modificación y el uso con fines comerciales.



Índice General

Un recorrido por el concepto de curvatura

José Luis Cisneros Molina 1 - 27

Cuádricas en \mathbb{R}^3 : Una aplicación en Geometría de Poisson

Cecilia Giottonini Maldonado & José Crispín Ruiz Pantaleón 28 - 44

Eva-Web: una herramienta para evaluar la accesibilidad de sitios web

Gabriel García, Angélica María Maldonado Vásquez & Miguel Ehécatl

Morales-Trujillo 45 - 57

Un recorrido por el concepto de curvatura

José Luis Cisneros Molina¹

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, Universidad Nacional Autónoma de México

¹jlcisneros@im.unam.mx

Resumen

La curvatura es uno de los conceptos más importantes en geometría diferencial. En este artículo daremos un recorrido por las ideas detrás de este concepto. Veremos diferentes maneras de definir la curvatura de curvas y diferentes tipos de curvaturas para superficies y variedades de dimensiones superiores.

Palabras Clave: Curvatura normal, curvaturas principales, curvatura Gaussiana, curvatura media, curvatura seccional, curvatura escalar, Teorema Egregio de Gauss, Teorema de Gauss-Bonnet.

DOI: 10.36788/sah.v5i2.120

Recibido: 8 de julio de 2021.

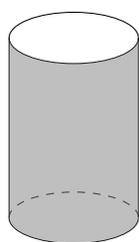
Aceptado: 14 de septiembre de 2021.

1. Introducción

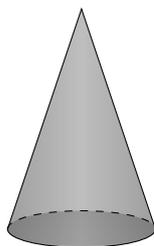
El objetivo de este artículo es presentar diferentes nociones de curvatura en geometría diferencial a partir de su significado geométrico en ejemplos, así como la expresión analítica de dichos conceptos. Es una introducción a la geometría diferencial, dirigido a estudiantes de ciencias e ingenierías quienes hayan cursado cálculo de varias variables. Comenzando con la idea intuitiva de que una línea recta no se curva, y de que una circunferencia de radio pequeño se curva más que una circunferencia de radio mayor, se definirá de manera geométrica y analítica la curvatura de curvas planas y en el espacio. Posteriormente, usando la curvatura de curvas planas, introduciremos las curvaturas normales de una superficie, y entre ellas, especificaremos a las curvaturas principales. A partir de éstas últimas, presentaremos la curvatura Gaussiana y la curvatura media de una superficie. Definiremos curvaturas análogas para el caso de hipersuperficies y finalmente definiremos la curvatura seccional y la curvatura escalar de una variedad Riemanniana. Terminamos enunciando algunos teoremas clásicos que involucran a las curvaturas Gaussiana y media de una superficie. Dado que nuestro objetivo es concentrarnos en el aspecto geométrico de la curvatura, no mencionaremos nada acerca de su desarrollo histórico, lo cual también es un tema apasionante, para ello recomendamos el artículo (Naveira, 2007).

2. Motivación

Podemos comprobar empíricamente que a partir de una *hoja de papel* se pueden formar un *cono* o un *cilindro*. Pero es imposible obtener un pedazo de *esfera*, sin doblar, estirar o cortar la hoja. La razón de esto es que un plano, un cono y un cilindro tienen la misma “curvatura Gaussiana”, mientras que en un plano y una esfera dicha curvatura es diferente. Es por esto que es imposible construir el mapa perfecto, es decir, al representar a la superficie de la Tierra en un plano, siempre habrá distorsiones en las distancias. Es posible construir mapas que preserven los ángulos de las trayectorias recorridas, como el *Mapa de Mercator*, o mapas que preserven las áreas, pero no se puede construir un mapa que preserve todas estas propiedades, ni que preserve todas las distancias.¹



(a) Cilindro



(b) Cono



(c) Esfera

3. Curvas en el plano

Comenzaremos considerando curvas en el plano Euclidiano \mathbb{R}^2 . Recordemos que \mathbb{R}^2 consiste de todas las parejas ordenadas de números reales $\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$.

Sea $I = [0, 1]$. Una función $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de la forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, donde las funciones $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son llamadas las *funciones coordenadas* de α . La función α es *diferenciable* cuando todas sus funciones coordenadas son diferenciables.

Una *curva parametrizada diferenciable* en \mathbb{R}^2 es una función diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$. A su imagen $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ se le denomina la *traza* de α . Podemos pensar a una curva parametrizada como una partícula moviéndose a lo largo de la traza de α , tal que al tiempo t se encuentra en el punto $\alpha(t)$. El *vector tangente* o *vector velocidad* de la curva α en el punto $\alpha(t)$, denotado por $\alpha'(t)$, es el vector dado por las derivadas de las funciones coordenadas, es decir $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. Una curva parametrizada diferenciable es *regular* si el *vector tangente* es distinto del *vector cero* para toda $t \in I$.

Dadas una función diferenciable $h: I \rightarrow I$ tal que $h'(t) > 0$ para toda $t \in I$ y una curva parametrizada diferenciable regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, la composición $\beta(t) = \alpha(h(t))$ es otra curva parametrizada regular. Decimos que β es una *reparametrización* de α .

¹Para saber más sobre las matemáticas involucradas al hacer mapas, recomiendo el video **Mapas**, de la serie *Aventuras Matemáticas* del Instituto de Matemáticas de la UNAM <https://www.matem.unam.mx/~video/mapas/map.html>.

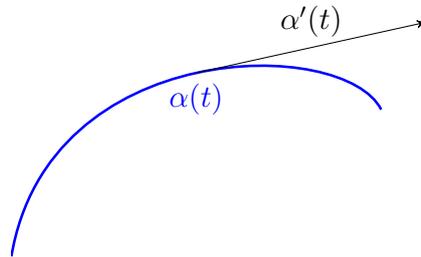


Figura 1: Curva parametrizada y vector tangente.

Dada una curva parametrizada diferenciable regular $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, siempre es posible encontrar una reparametrización β tal que la norma del vector velocidad es 1 en todo punto, es decir, $\|\beta'(t)\| = 1$ para toda $t \in I$ (ver (do Carmo, 1994, §1.5, Observación 2)). En este caso decimos que β está *parametrizada por longitud de arco*, ya que el parámetro nos da la longitud recorrida.

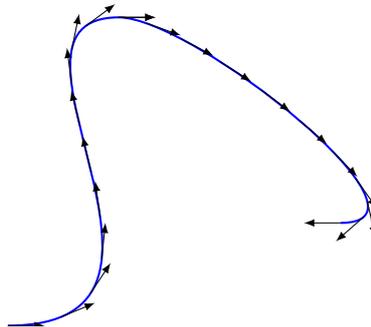


Figura 2: Curva parametrizada por longitud de arco.

3.1. Curvatura

El problema que nos planteamos es el siguiente:

Dada una curva parametrizada diferenciable regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$,

¿Cómo podemos medir qué tanto se curva?

Daremos dos respuestas, una geométrica y una analítica.

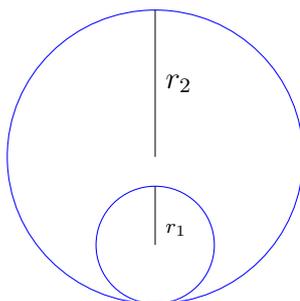
Respuesta geométrica

Partimos de dos ideas intuitivas:



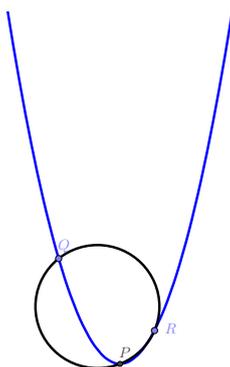
1. *Una recta no se curva.* Entonces diremos que una *recta* tiene *curvatura cero*.

-
2. Sean C_{r_1} y C_{r_2} dos circunferencias de radios r_1 y r_2 respectivamente. Si $r_1 < r_2$, entonces C_{r_1} *se curva más* que C_{r_2} .

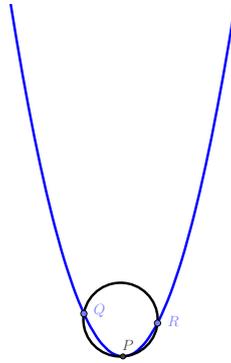


Es decir, la curvatura de una circunferencia es inversamente proporcional a su radio. Entonces diremos que *la curvatura de la circunferencia C_r de radio r es $\frac{1}{r}$* . Esto es compatible con el inciso 1, si consideramos a las rectas como circunferencias de radio infinito.

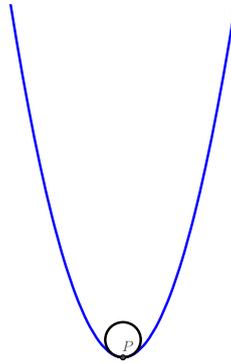
Dada una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada regular, es decir, con $\alpha'(t) \neq 0$ para toda $t \in I$, queremos asociarle una función $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ que en cada punto $\alpha(t)$ la cantidad $\kappa(t)$ indique “cuánto se curva la curva en dicho punto”. La idea es encontrar la circunferencia que *mejor aproxima* a la curva α en el punto $P = \alpha(t_0)$. Tomamos dos puntos $Q = \alpha(t_1)$ y $R = \alpha(t_2)$ cercanos al punto $P = \alpha(t_0)$ y trazamos la circunferencia que pasa por Q , P y R .



Hacemos tender t_1 y t_2 a t_0 , es decir hacemos tender los puntos Q y R al punto P .



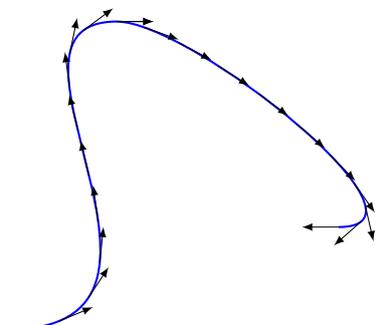
Si $\alpha''(t_0) \neq 0$, en el límite, obtenemos una circunferencia de radio r_P la cual es llamada *círculo osculador* a α en P , para una demostración ver (Spivak, 1979, Chapter 1, Theorem 1). Entonces definimos la *curvatura* de la curva α en el punto $P = \alpha(t_0)$ por $\kappa(t_0) = \frac{1}{r_P}$. Si $\alpha''(t_0) = 0$ definimos $\kappa(t_0) = 0$.



A esta noción de curvatura podemos asignar un *signo* que indica la dirección en que se desvía la curva. Asignamos el signo *positivo* cuando el centro del círculo osculador queda a la izquierda de la dirección de avance de la curva, y *negativo* en el caso contrario.

Respuesta analítica

Fijemos una recta en el plano, digamos el eje x . Dada una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular parametrizada por longitud de arco, sea $\theta(t)$ el ángulo entre el vector tangente $\alpha'(t)$ a la curva α en el punto $\alpha(t)$ y el eje x .



Intuitivamente, si la trayectoria es una recta, el ángulo no cambia y se mantiene *constante*. Por otro lado, si la trayectoria se curva mucho, el ángulo *cambia muy rápido*. Por lo tanto, definimos la curvatura como la razón de cambio del ángulo:

$$\kappa(t) = \frac{d\theta}{dt}(t).$$

Esta definición no sólo nos da una magnitud, que mide la razón de la desviación de la curva de una recta, sino también un *signo* el cual indica la dirección de la desviación. El signo de la curvatura en un punto es:

Positivo si a partir de dicho punto la curva continúa hacia el lado izquierdo de la recta tangente que pasa por dicho punto, como se ilustra en la Figuras 3.

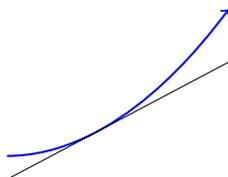


Figura 3: Curvatura positiva.

Negativo si a partir de dicho punto la curva continúa hacia el lado derecho de la recta tangente que pasa por dicho punto, como se muestra en la Figura 4.

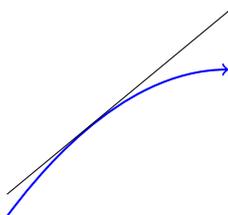


Figura 4: Curvatura negativa.

Las dos nociones de curvatura coinciden si asignamos un signo a la noción geométrica como se indicó.

4. Curvas en el espacio

Ahora consideraremos curvas en el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ y definiremos su curvatura de manera analítica.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable regular dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Supongamos además que la curva α está parametrizada por longitud de arco, es decir, $\|\alpha'(t)\| = 1$ para toda $t \in I$. Como ejemplo, en la Figura 5 se muestra la curva en el espacio llamada *hélice* dada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, donde pedimos que $a^2 + b^2 = 1$ para que esté parametrizada por longitud de arco.

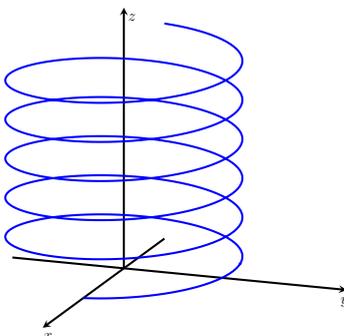


Figura 5: Curva en el espacio: Hélice.

Denotemos por $T(t) = \alpha'(t)$ al vector tangente. Como $\|T(t)\| = \|\alpha'(t)\| = 1$ es *constante*, $T'(t)$ mide la razón de cambio del *ángulo* que las tangentes cercanas hacen con la tangente en t . Por lo tanto definimos la curvatura de α en el punto $\alpha(t)$ por

$$k(t) = \|T'(t)\| = \|\alpha''(t)\|.$$

Si la curva yace en un plano, las dos definiciones de curvatura coinciden salvo signo, es decir:

$$k(t) = |\kappa(t)|.$$

El vector $\alpha''(t)$ es ortogonal al vector tangente $\alpha'(t)$, por esta razón, al vector unitario $n(t)$ en la dirección del vector $\alpha''(t)$ se le llama el *vector normal* a la curva α en el punto $\alpha(t)$. Además tenemos que $\alpha''(t) = k(t)n(t)$.

5. Superficies

El siguiente paso es estudiar superficies en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 . Así como en las secciones anteriores trabajamos con curvas parametrizadas regulares, que son curvas que en

cada punto tienen un vector tangente no cero, ahora trabajaremos con superficies regulares, que son aquellas que tienen en cada punto un plano tangente bien definido.

Así como definimos una curva en \mathbb{R}^3 como una función de una variable real cuya imagen es un conjunto de \mathbb{R}^3 , para definir una superficie es razonable considerar ahora funciones de dos variables reales $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces F se puede escribir como una terna de funciones coordenadas, es decir

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Como pedimos que F sea diferenciable, todas y cada una de sus funciones coordenadas son diferenciables, es decir, las derivadas parciales de todos los órdenes existen. Entonces podemos definir la *derivada parcial* $\frac{\partial F}{\partial u}$ de F con respecto a u , también denotada por F_u , por

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = F_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right).$$

Análogamente podemos definir las restantes derivadas parciales de F : $\frac{\partial F}{\partial v} = F_v$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = F_{uu}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = F_{uv}$, etc.

Una *superficie parametrizada diferenciable regular* en \mathbb{R}^3 es una función diferenciable $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, con U un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 , tal que los dos vectores dados por las derivadas parciales $F_u(u, v)$ y $F_v(u, v)$ son linealmente independientes para todo punto (u, v) en U , o equivalentemente, que la *matriz Jacobiana* DF_q de F , dada por

$$DF_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} = (F_u(q) \quad F_v(q)),$$

tenga rango 2 para toda $q = (u, v)$ en U . A su vez, esto es equivalente a que el producto cruz $F_u(u, v) \times F_v(u, v)$ sea distinto de cero, es decir, que haya un vector normal bien definido en el punto $p = F(u, v)$. La *traza* de F es el conjunto imagen $S = F(U)$. El *plano tangente* $T_p S$ a la superficie F en el punto $p = F(u, v)$ es el plano generado por los vectores $F_u(u, v)$ y $F_v(u, v)$.

En general, si A es un subconjunto arbitrario de \mathbb{R}^2 , se dice que una aplicación $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada, si F puede ser extendida a una aplicación diferenciable de U en \mathbb{R}^3 , siendo U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene a A .

Ejemplo 1 (Coordenadas esféricas en la esfera.). Usando las coordenadas esféricas podemos ver a la *esfera* de radio $a > 0$ como una superficie parametrizada regular dada por la aplicación $F: [0, 2\pi] \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(\phi, \theta) = (a \cos \theta \cos \phi, a \cos \theta \sin \phi, a \sin \theta).$$

Las líneas $\phi = \text{constante}$ son llamadas *meridianos* y las líneas $\theta = \text{constante}$ son llamadas *paralelos* o *círculos de latitud*. El círculo $\theta = 0$ también es llamado *ecuador*; este es el único círculo máximo, de entre todos los paralelos. Todos los meridianos son círculos máximos.

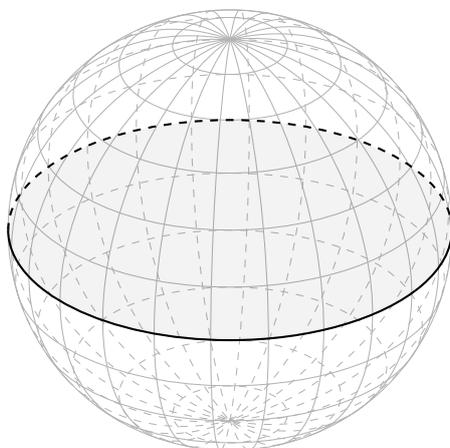


Figura 6: Coordenadas esféricas en la esfera.

Observaciones 1. La superficie parametrizada F del Ejemplo 1 está definida sobre el rectángulo cerrado $[0, 2\pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$, la cual admite una extensión diferenciable a un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene a $[0, 2\pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$. Sin embargo, cualquier extensión recubrirá más de una vez partes substanciales de la esfera, en tanto que F solamente cubre dos veces a una semicircunferencia que va desde el polo norte al polo sur.

Existen ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^3 a los que quisiéramos denominar superficies, pero que no encajan dentro del contexto de las superficies parametrizadas regulares descritas anteriormente. Tales subconjuntos no pueden ser descritos como la imagen biyectiva de una sola superficie parametrizada regular definida sobre un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 ; como vimos, la esfera es un ejemplo de esto.

Introduciremos el concepto de superficie regular; intuitivamente se combinan convenientemente varias superficies parametrizadas para describir a ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^3 que son los que queremos definir como superficies. La definición de superficie regular es un poco más complicada, pero es la que se generaliza a dimensiones superiores para dar el concepto de variedad diferenciable.

Definición 1. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie regular* si para cada $p \in S$, existe una vecindad V en \mathbb{R}^3 y una aplicación $F: U \rightarrow V \cap S$ de un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, llamada *parametrización* de S , tal que

1. La aplicación F es diferenciable.
2. La aplicación F es un *homeomorfismo*: F es continua (por la condición 1) y admite una inversa $F^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que es continua.
3. Cada aplicación $F: U \rightarrow S$ es una superficie parametrizada regular.

Ejemplo 2. La esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, es una superficie regular. Podemos cubrir a la esfera mediante seis superficies parametrizadas regulares cuyas trazas son hemisferios: $F_i: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $i = 1, \dots, 6$, dadas por

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), & (x, y) \in U, & \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \\ F_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), & (x, y) \in U, & \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \\ F_3(x, z) &= (x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), & (x, z) \in U, & \quad U = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}, \\ F_4(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), & (x, z) \in U, & \quad U = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}, \\ F_5(y, z) &= (+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), & (y, z) \in U, & \quad U = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}, \\ F_6(y, z) &= (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), & (y, z) \in U, & \quad U = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}. \end{aligned}$$

Hay otra manera más práctica de obtener superficies regulares en \mathbb{R}^3 , para ello necesitamos algunas definiciones.

Definición 2. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. El *gradiente* de f en el punto (x, y, z) , denotado por $\nabla f(x, y, z)$ se define como

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

Un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es un *punto crítico* de f si $\nabla f(x, y, z) = 0$. La imagen $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ de un punto crítico es llamado un *valor crítico* de f . Un punto $a \in \mathbb{R}$ que no es un valor crítico es llamado un *valor regular* de f .

Teorema 1. Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f , entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular en \mathbb{R}^3 .

Para una demostración ver (do Carmo, 1994, §2.2, Proposition 2).

Ejemplo 3. Consideremos la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. El gradiente está dado por $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Es fácil ver que $1 \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f y por el Teorema 1 el conjunto

$$f^{-1}(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie regular que es precisamente la esfera unitaria \mathbb{S}^2 .

De ahora en adelante, en vez de decir superficie regular, solamente diremos superficie.

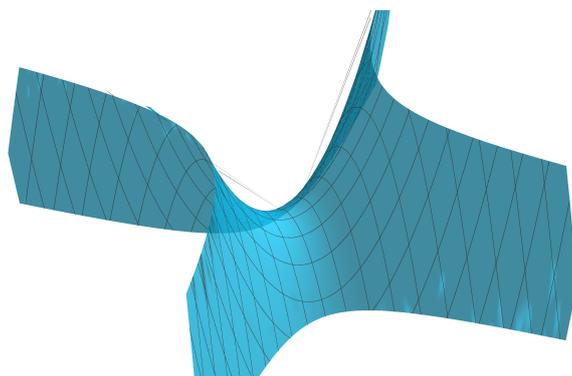
Usando el hecho de que sabemos calcular curvatura de curvas planas, definiremos las curvaturas normales en un punto de una superficie en \mathbb{R}^3 . Entre las curvaturas normales definiremos las curvaturas principales, y con ellas, otros dos tipos de curvaturas: la curvatura Gaussiana y la curvatura media.

5.1. Curvatura normal

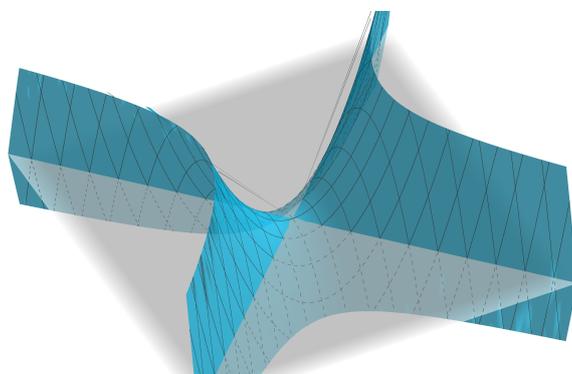
Describiremos el proceso para definir las curvaturas normales de una superficie arbitraria S y lo iremos ilustrando en el ejemplo de la superficie conocida como *paraboloide hiperbólico* o *silla de montar*, la cual está dada por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x^2 + y^2 = 0\}.$$

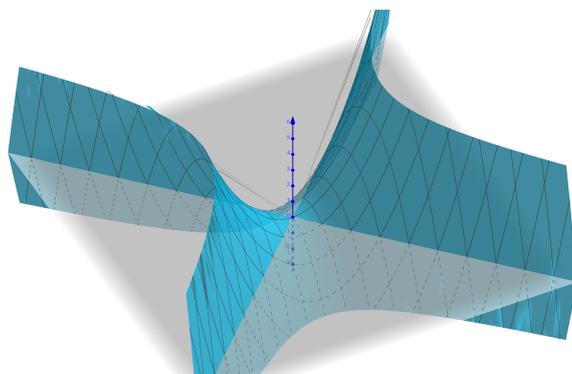
Sea S una superficie y sea $p \in S$.



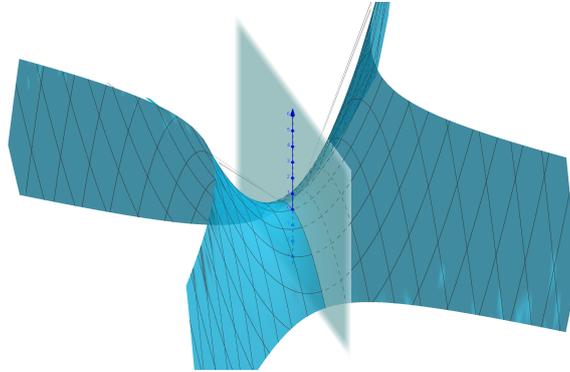
Tomemos el plano tangente $T_p S$ a S en p .



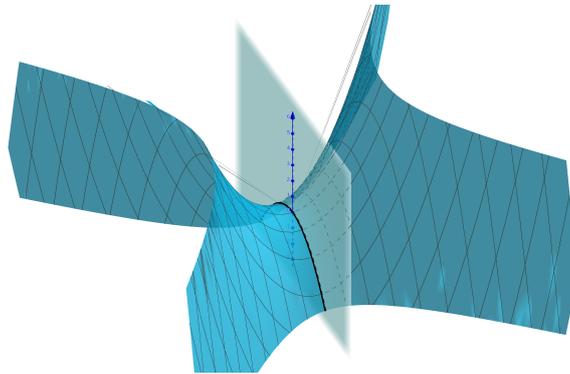
Tomemos un vector unitario normal N a $T_p S$.



Sea v en $T_p S$ y P_v el plano normal a S generado por N y v .



La intersección $P_v \cap S$ es una curva plana α_v contenida en S .



La *curvatura normal* de S en p en la dirección de v es

$$\kappa_v = \text{curvatura de } \alpha_v \text{ en el tiempo } t_0, \text{ tal que } \alpha(t_0) = p.$$

Con signo positivo (+) si $\alpha_v''(t_0)$ tiene el mismo sentido que N , es decir, $\langle \alpha_v''(t_0), N \rangle > 0$, y signo negativo (−) si $\alpha_v''(t_0)$ tiene el sentido opuesto que N , es decir, $\langle \alpha_v''(t_0), N \rangle < 0$.

Si tomamos vectores tangentes v en $T_p S$ distintos obtenemos curvaturas normales distintas como se muestra en la Figura 7:

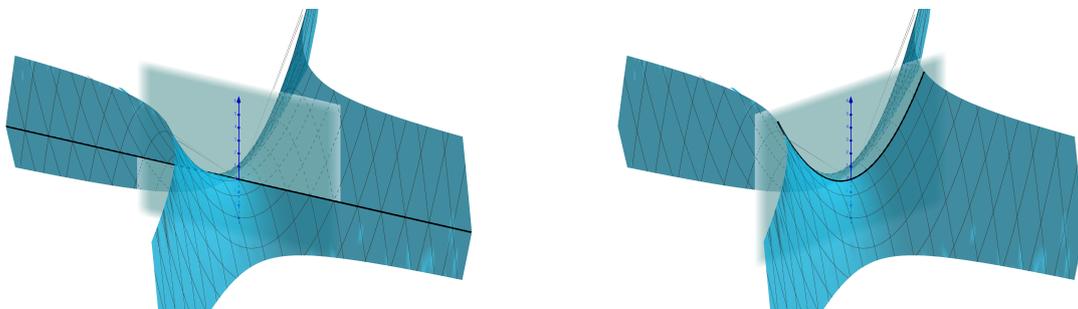


Figura 7: Otras dos curvaturas normales de S en el punto p .

5.2. Curvatura normal y curvatura geodésica

En la literatura a veces se da una definición alternativa de la curvatura normal, por ejemplo en (do Carmo, 1994, §3.2, Definición 3). Sea S una superficie, $p \in S$ y N un vector unitario normal a S en p . Sea C una curva regular en S que pasa por p , parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco de C y $\alpha(0) = p$. Sea n el vector normal a C en p y θ el ángulo entre los vectores N y n . Sea $k = \|\alpha''(0)\|$ la curvatura de C en p . El número $\kappa_C = k \cos \theta$ se denomina la *curvatura normal de $C \subset S$ en p* . Es decir, κ_C es la longitud de la proyección u del vector $kn = \alpha''(0)$ sobre la recta determinada por el vector normal N , esto se muestra en la Figura 8.

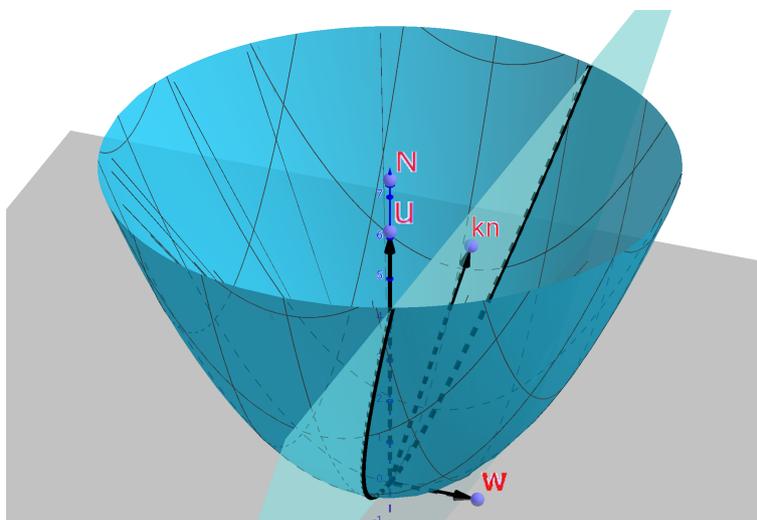


Figura 8: Curvaturas normal y geodésica.

Si C es una curva que pasa por p obtenida por la intersección de S con un plano normal, tenemos que θ es cero y la curvatura normal de C coincide con la curvatura k de C , como en nuestra primera definición de curvatura normal. De hecho, se puede demostrar que todas las curvas contenidas en S que tienen en un punto dado $p \in S$ la misma recta tangente, tienen en ese punto la misma curvatura normal (do Carmo, 1994, §3.2, Proposición 2). Por lo tanto, las dos definiciones de curvatura normal son equivalentes.

Por otro lado, consideremos la proyección w del vector $kn = \alpha''(0)$ sobre el espacio tangente $T_p S$ (ver Figura 8), a la longitud de w se le denota por κ_g y se le llama la *curvatura geodésica* de C en p , es decir, $\kappa_g = k \sin \theta$. Por lo tanto tenemos que $k^2 = \kappa_C^2 + \kappa_g^2$.

5.3. Curvaturas principales

A cada vector unitario $v \in T_p S$ le asociamos la curvatura normal κ_v de S en p en la dirección de v . Esto nos da una función continua (en la sección 5.5 se explica porqué es

continua)

$$\begin{aligned} k: \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \kappa_v, \end{aligned} \tag{1}$$

donde \mathbb{S}^1 es la circunferencia unitaria en $T_p S$. El máximo κ_1 y el mínimo κ_2 de las curvaturas normales son llamadas las *curvaturas principales* de S en p . Los vectores unitarios e_1 y e_2 en cuyas direcciones se alcanzan κ_1 y κ_2 son llamados las *direcciones principales* en p .

En el ejemplo de la silla de montar las curvaturas principales se muestran en la Figura 9:

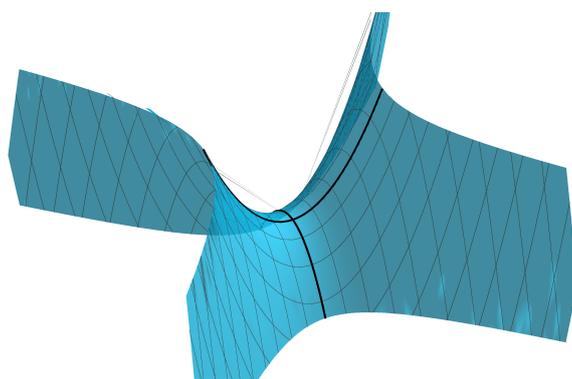


Figura 9: Curvaturas principales.

5.4. Curvatura media y curvatura Gaussiana

A partir de las curvaturas principales definimos:

Curvatura Gaussiana: La *curvatura Gaussiana* $K(p)$ de una superficie S en un punto $p \in S$ es el producto de las curvaturas principales de S en p :

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Curvatura media La *curvatura media* $H(p)$ de una superficie S en un punto $p \in S$ es el promedio de las curvaturas principales de S en p :

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

La curvatura Gaussiana define diferentes tipos de puntos en una superficie.

Punto silla o punto hiperbólico. Un punto p en una superficie S es un *punto hiperbólico* si $K(p) < 0$. Esto es equivalente a que las curvaturas principales κ_1 y κ_2 en p tienen signos opuestos, y a su vez esto implica que S cruza el plano tangente en cualquier vecindad de p .

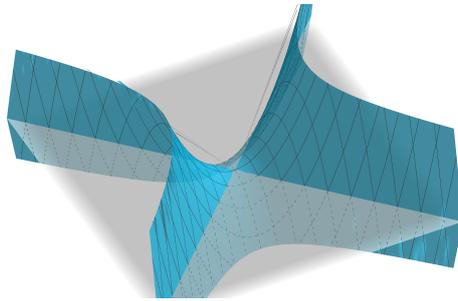


Figura 10: Punto hiperbólico.

Punto plano o punto parabólico. Un punto p en una superficie S es un *punto parabólico* si $K(p) = 0$. Esto es equivalente a que alguna curvatura principal κ_1, κ_2 (o ambas) sea cero.

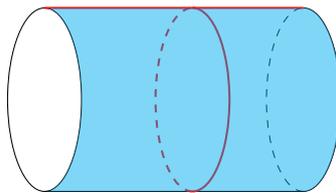


Figura 11: Punto parabólico.

Punto elíptico. Un punto p en una superficie S es un *punto elíptico* si $K(p) > 0$. Esto es equivalente a que las curvaturas principales κ_1 y κ_2 tengan el mismo signo, y a su vez esto implica que S está en un lado del plano tangente a p , del mismo lado que n si $\kappa_1, \kappa_2 > 0$, del lado opuesto que n si $\kappa_1, \kappa_2 < 0$.

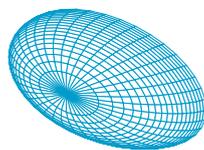
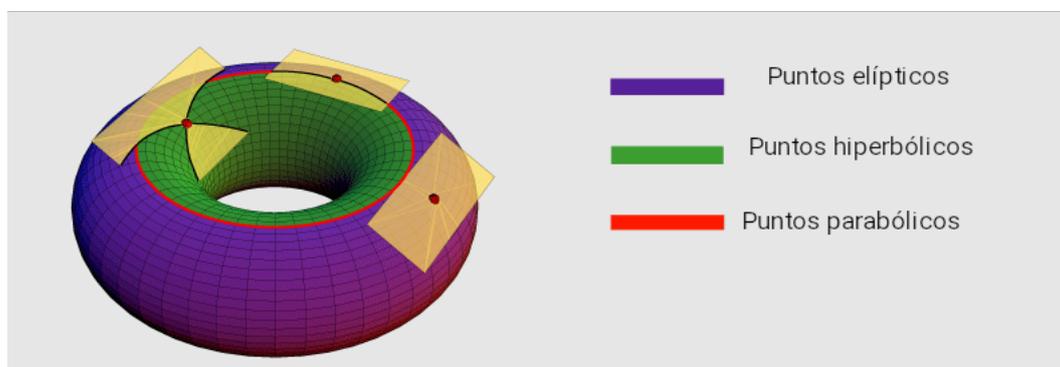


Figura 12: Punto elíptico.

Hay superficies que tienen los tres tipos de puntos. Por ejemplo el toro¹ dado por la parametrización $F: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$$F(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u).$$



5.5. Las aplicaciones de Gauss y Weingarten

Ahora presentaremos una manera analítica de obtener la curvatura Gaussiana y la curvatura media.

Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 . Sea $p \in S$ y V una vecindad abierta de p en S . La *aplicación de Gauss* $N: V \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una aplicación diferenciable que asocia a cada punto $p \in V \subset S$ un *vector normal unitario* como se ilustra en la Figura 13²

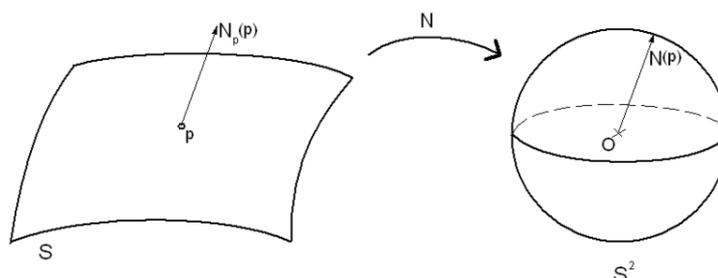


Figura 13: Aplicación de Gauss.

Una manera de dar la aplicación de Gauss es la siguiente. Sea $F: U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de S , con U un abierto de \mathbb{R}^2 y la traza de F es $V = F(U)$. Sean $q \in U$ y $p = F(q)$, entonces la aplicación de Gauss está dada por el producto cruz en \mathbb{R}^3 de las derivadas parciales de F normalizado:

$$N(p) = \frac{F_u(q) \times F_v(q)}{\|F_u(q) \times F_v(q)\|}.$$

La diferencial de la aplicación de Gauss, conocida como *aplicación de Weingarten*, es una aplicación lineal $dN_p: T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$. Como $T_p S$ y $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ son planos paralelos, dN_p puede verse como una aplicación lineal de $T_p S$ en sí mismo $dN_p: T_p S \rightarrow T_p S$. Una propiedad muy importante de la aplicación de Weingarten es que es *autoadjunta*, es decir, satisface la siguiente igualdad (do Carmo, 1994, Sección 3.2, Proposición 1)

$$\langle dN_p(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, dN_p(v_2) \rangle, \quad \text{para todo } v_1, v_2 \in T_p S,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior en \mathbb{R}^3 restringido a $T_p S$. Esto implica (ver (do Carmo, 1994, Teorema, Apéndice del Capítulo 3)) que existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$, que corresponde a las direcciones principales, tal que

$$dN_p(e_i) = -\kappa_i e_i, \quad \text{con } i = 1, 2,$$

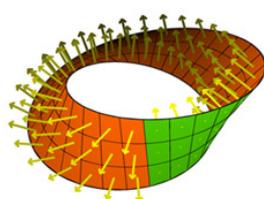
es decir, las *direcciones principales* son *vectores propios* de dN_p con *valor propio* $-\kappa_i$. Por lo tanto, e_1 y e_2 forman una base ortonormal que diagonaliza a dN_p . Entonces $dN_p = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix}$ y

$$K = \det dN_p, \quad H = -\frac{1}{2} \text{traza } dN_p.$$

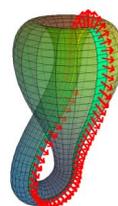
Podemos definir una forma cuadrática $Q: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $Q(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, la cual restringida a la circunferencia unitaria en $T_p S$ da la función $k: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (1), es decir, $k(v) = Q|_{\mathbb{S}^1}(v) = \kappa_v$, y por esta razón la función k es continua.

5.6. Superficies orientables y no orientables

Como vimos en la Subsección 5.5, dada una parametrización $F: U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de una superficie S , con U un abierto de \mathbb{R}^2 , la aplicación de Gauss asocia a cada punto $p = F(q)$ en la imagen de F el vector normal dado por el producto cruz de las derivadas parciales de F , es decir, $N(p) = \frac{F_u(q) \times F_v(q)}{\|F_u(q) \times F_v(q)\|}$ para toda $q \in U$. En otras palabras, la aplicación de Gauss define un *campo vectorial normal diferenciable* sobre el subconjunto abierto $V = F(U)$ de S . Un hecho sorprendente es que no todas las superficies admiten un campo vectorial normal diferenciable definido globalmente *sobre toda la superficie*. Un ejemplo de dichas superficies son la *banda de Möbius*³ y la *botella de Klein*⁴ mostradas en la Figura 14. Diremos que dichas superficies son *no orientables*.



(a) Banda de Möbius



(b) Botella de Klein

Figura 14: Superficies no orientables.

Por otro lado, diremos que una superficie S es *orientable* si admite un campo vectorial normal diferenciable N definido en toda la superficie. La elección de dicho campo N es llamada una *orientación* de S . Ejemplos de superficies orientables son la *esfera*⁵ y el *toro*⁶ mostrados en la Figura 15.

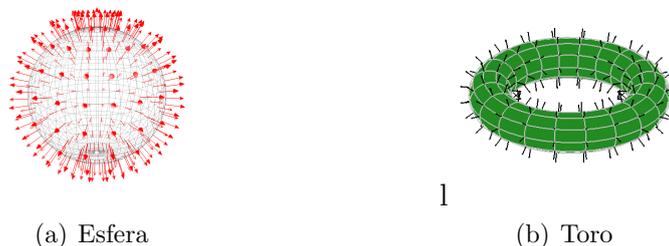


Figura 15: Superficies orientables.

Por lo tanto, si S es una superficie orientable, escoger una orientación es equivalente a dar una aplicación de Gauss global, es decir, definida sobre toda la superficie $N: S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. En este caso, la curvaturas de Gauss $K: S \rightarrow \mathbb{R}$ y media $H: S \rightarrow \mathbb{R}$ también están bien definidas sobre toda la superficie.

6. Dimensiones superiores: variedades Riemannianas

Como mencionamos en la Sección 5, el concepto de superficie regular se puede generalizar a dimensiones superiores para obtener subconjuntos de \mathbb{R}^n tales que en cada punto tengan bien definido un espacio tangente, el cual es un subespacio de \mathbb{R}^n de dimensión $k \leq n$.

Definición 3. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una *variedad diferenciable de dimensión* $0 < k \leq n$ si para cada $p \in M$, existe una vecindad V en \mathbb{R}^n y una aplicación $F: U \rightarrow V \cap M$ de un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^k sobre $V \cap M \subset \mathbb{R}^n$ de la forma

$$F(u_1, \dots, u_k) = (x_1(u_1, \dots, u_k), \dots, x_n(u_1, \dots, u_k))$$

tal que

1. La aplicación F es diferenciable.
2. La aplicación F es un homeomorfismo.
3. Cada aplicación $F: U \rightarrow M$ tiene matriz Jacobiana

$$DF_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}(q) & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1}(q) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_k}(q) \end{pmatrix} = (F_{u_1}(q) \quad \cdots \quad F_{u_k}(q)),$$

de rango k para todo punto $q = (u_1, \dots, u_k) \in U \subset \mathbb{R}^k$.

Como en el caso de las superficies regulares, la condición 3 es equivalente a que los k vectores en \mathbb{R}^n dados por las derivadas parciales $F_{u_i}(q)$ con $i = 1, \dots, k$, sean linealmente independientes. El *espacio tangente* T_pM a la variedad M en el punto $p = F(q)$ es el subespacio generado por los vectores $F_{u_1}(q), \dots, F_{u_k}(q)$. Como T_pM es un subespacio de \mathbb{R}^n , podemos dotar a T_pM de un producto interior restringiendo el producto interior estandar de \mathbb{R}^n . Una variedad diferenciable M dotada de un producto interior en cada espacio tangente T_pM que varía diferenciablemente es llamada una *variedad Riemanniana*.

En el plano \mathbb{R}^2 , dados dos puntos, la línea de menor longitud que los une es el segmento de recta que pasa por ambos puntos. Análogamente, dados dos puntos en el espacio Euclidiano de dimensión n la línea de menor longitud que los une es una recta. En general, dada una variedad Riemanniana de dimensión k en \mathbb{R}^n , existen curvas de menor longitud que unen dos puntos las cuales son llamadas *geodésicas*. En una superficie S , una curva C es una *geodésica* si la curvatura geodésica κ_g de C en todo punto es cero. Por ejemplo, en la esfera \mathbb{S}^2 las geodésicas son los círculos máximos, como los meridianos o el ecuador en el Ejemplo 1. Ésto es fácil de ver, pues los círculos máximos se obtienen de intersectar a la esfera con planos que pasan por el centro de la esfera, dichos planos son planos normales a la esfera, por lo tanto, la curvatura geodésica de los círculos máximos es cero. Para saber más sobre geodésicas recomiendo el artículo (Simanca, 2002).

7. Hipersuperficies en \mathbb{R}^n

Una *hipersuperficie* en \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable de dimensión $n - 1$ (codimensión 1). Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie. Podemos definir *curvaturas normales* como en el caso de superficies en \mathbb{R}^3 . Sean $p \in S$, un vector normal unitario N en p y un vector tangente unitario $v \in T_pS$. La intersección del plano generado por N y v y S es una curva, cuya curvatura κ_v es la *curvatura normal* de S en p en la dirección de v . La aplicación $v \mapsto \kappa_v$ es la restricción a la esfera unitaria de una forma cuadrática Q en T_pS . Existe una *base ortonormal* $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de T_pS que diagonaliza a Q . Las direcciones e_1, \dots, e_{n-1} son llamadas las *direcciones de curvatura principales* en p y las cantidades correspondientes

$$\kappa_1 = \kappa_{e_1}, \dots, \kappa_{n-1} = \kappa_{e_{n-1}}$$

son las *curvaturas principales* de S en p .

Como en \mathbb{R}^3 podemos considerar la *aplicación de Gauss*

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

cuya diferencial

$$dN_p: T_pS \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^{n-1} \cong T_pS$$

satisface las ecuaciones

$$dN_p(e_i) = -\kappa_i e_i, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Definimos la *curvatura media*

$$H = \frac{1}{n-1}(\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1}) = -\frac{1}{n-1} \text{traza}(dN_p),$$



y la *curvatura de Gauss-Kronecker*

$$\kappa_1 \dots \kappa_{n-1} = (-1)^{n-1} \det(dN_p).$$

Además, tenemos las otras *funciones simétricas elementales* de las curvaturas principales, llamadas *curvaturas medias de orden superior*. Denotemos por H_j a la *curvatura media de orden j -ésimo*, normalizada tal que

$$\prod_{j=1}^{n-1} (1 + t\kappa_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} H_j t^j.$$

Entonces $H_1 = H$, la *curvatura media* y H_{n-1} es la *curvatura de Gauss-Kronecker*.

En dimensiones superiores tenemos curvaturas intermedias. Entre ellas H_2 juega un papel importante. Salvo por una constante, H_2 es igual a la *curvatura escalar*, la cual definiremos en la siguiente sección.

8. Curvatura seccional y curvatura escalar

Sea M una variedad Riemanniana de dimensión k en \mathbb{R}^n . Riemann definió en cada punto $p \in M$ las *curvaturas seccionales*: sean $v, w \in T_p M$ linealmente independientes. Para todo vector unitario

$$u = \lambda v + \mu w$$

existe una única geodésica en M que empieza en p con vector tangente u (ver (do Carmo, 1992, Ch. 3, Proposition 2.7)).

Dichas geodésicas, al variar u generan una superficie cuya curvatura Gaussiana en p es llamada la *curvatura seccional* $K_\pi = K[v, w]$ del plano π generado por v y w .

Sea $\beta = \{e_1, \dots, e_k\}$ una base ortonormal de $T_p M$. Entonces la cantidad

$$s = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} K[e_i, e_j]$$

es independiente de β (ver (do Carmo, 1992, §4.4)), llamada la *curvatura escalar* de M en p .

Si M es una hipersuperficie en \mathbb{R}^n podemos considerar a e_i como las *direcciones principales* en p . Entonces $K[e_i, e_j] = \kappa_i \kappa_j$ por lo que

$$s = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \kappa_i \kappa_j, \quad \text{o} \quad s = (n-1)(n-2)H_2.$$

9. Resultados clásicos sobre curvatura

Ya que hemos visto diferentes tipos de curvaturas, en esta sección enunciaremos algunos resultados clásicos que las involucran. Para ver más resultados relacionados con curvaturas recomiendo el artículo panorámico de Osserman (Osserman, 1990) el cual en parte motivó al presente artículo.



9.1. Cantidades intrínsecas y extrínsecas

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad Riemanniana. Las *cantidades intrínsecas* de M son determinadas mediante mediciones sobre M misma. Las *cantidades extrínsecas* dependen del *encaje* de M en \mathbb{R}^n , es decir, de “cómo está metida” M en \mathbb{R}^n . Para $S \subset \mathbb{R}^3$ las *curvaturas principales* y la *curvatura media* son *extrínsecas*: enrollar una hoja en un cilindro las cambia, pero no cambian las distancias a lo largo de S . Sorprendentemente, el *Teorema Egregio de Gauss* (do Carmo, 1994, §4-3) dice que la *Curvatura Gaussiana* $K = \kappa_1 \kappa_2$ es *intrínseca*. Para una discusión sobre propiedades intrínsecas vs. extrínsecas recomiendo el artículo (Palmas, 2020).

9.2. Teorema de Gauss-Bonnet

Antes de poder enunciar el Teorema de Gauss-Bonnet necesitamos dar algunas definiciones.

Una superficie es *compacta* si es compacta como espacio topológico (cerrado y acotado como subespacio de \mathbb{R}^3). Algunas superficies tienen *frontera*, como la banda de Möbius. Una superficie *cerrada* es una superficie compacta y sin frontera. Ejemplos de superficies cerradas son: la esfera, el toro y la botella de Klein.

Recordemos que dos espacios topológicos son *homeomorfos* si existe un *homeomorfismo* entre ellos, es decir, una aplicación biyectiva continua cuya inversa también es continua. En topología dos espacios homeomorfos son considerados equivalentes.

El *Teorema de clasificación de superficies* (ver por ejemplo (S. William Massey, 1967)) nos dice que toda superficie cerrada orientada es homeomorfa a una superficie de la siguiente lista: la esfera, el toro, el toro con dos hoyos, etc., como se muestra en la Figura 16⁷.

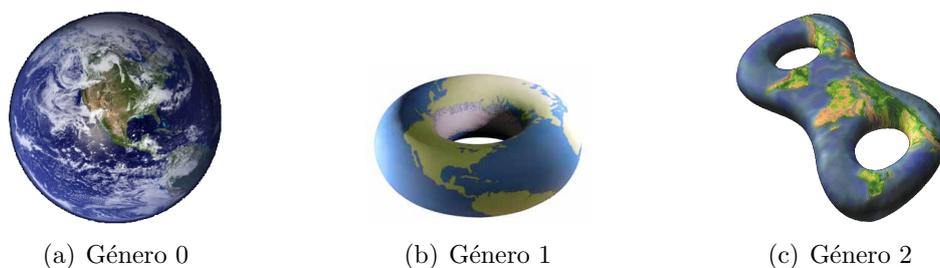


Figura 16: Superficies cerradas orientadas

Distinguimos las superficies de la lista anterior por que tienen diferente *género*, que intuitivamente corresponde al “número de hoyos”.

A toda superficie cerrada orientada S podemos asociarle un número entero $\chi(S)$ llamado la *característica de Euler-Poincaré* de S . Una manera de calcular a $\chi(S)$ es la siguiente. Un resultado muy importante en topología es que las superficies compactas se pueden triangular (ver (Doyle and Moran, 1968)), es decir, podemos encontrar un poliedro P que sea *homeomorfo* a una superficie S dada. En la Figura 17 se muestran triangulaciones de la esfera⁸ y del toro⁹:

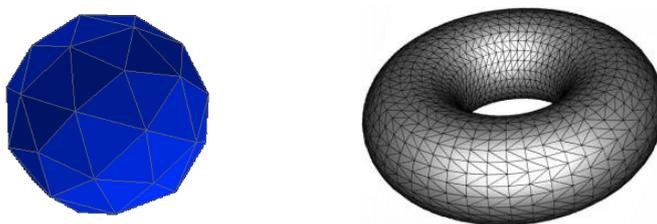


Figura 17: Triangulaciones de la esfera y el toro.

La *característica de Euler-Poincaré* de la superficie S se define como $\chi(S) = V - A + C$, donde V es el número de vértices, A el de aristas y C el de caras de una triangulación P , y no depende de la triangulación, por lo que es un invariante topológico, el cual es *completo*, es decir: dos superficies cerradas orientadas S y S' son homeomorfas si y sólo si $\chi(S) = \chi(S')$. Por ejemplo, la esfera tiene característica de Euler-Poincaré igual a 2 (un tetraedro es una triangulación de la esfera y ahí es fácil calcularla), por lo tanto, toda superficie cerrada y orientada S con $\chi(S) = 2$ es homeomorfa a la esfera. Si denotamos por T_g a la superficie de género g (toro con g hoyos) tenemos que $\chi(T_g) = 2 - 2g$, por lo tanto, la única superficie cerrada y orientada con característica de Euler-Poincaré positiva es la esfera.

Sea S una superficie orientada. Una *curva parametrizada regular a trozos cerrada y simple* $\alpha: I \rightarrow S$ es una curva cerrada, sin autointersecciones, cuya recta tangente no está definida sólomente en un número finito de puntos $t_0, \dots, t_k \in I$, los puntos $\alpha(t_i)$, $i = 1, \dots, k$, son llamados los *vértices* de α y las trazas $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ son los *arcos regulares* de α . En cada vértice $\alpha(t_i)$ definimos el *ángulo exterior* θ_i como el ángulo formado por los límites izquierdo y derecho respectivamente cuando $t \rightarrow t_i$, de los vectores tangentes $\alpha'(t)$ con $t \in [t_{i-1}, t_i]$ y $t \in [t_i, t_{i+1}]$ respectivamente. El signo del ángulo θ_i está dado por la orientación de S . El *ángulo interior* η_i en el vértice $\alpha(t_i)$ está dado por $\eta_i = \pi - \theta_i$.

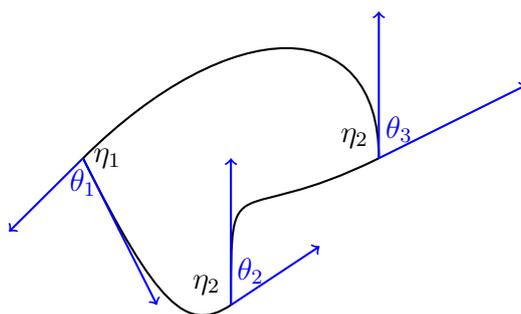


Figura 18: Ángulos exteriores e interiores de una curva parametrizada regular a trozos.

Sea S una superficie orientada. Una subconjunto R de S es una *región simple* si R es homeomorfa a un disco y la frontera ∂R de R es una curva parametrizada regular a trozos cerrada y simple $\alpha: I \rightarrow S$. Intuitivamente la frontera α está *orientada positivamente* si al caminar sobre la curva en la dirección positiva, con la cabeza apuntando en la dirección del

vector normal N que da la orientación a S , la región R queda a la izquierda. Llamaremos *triángulo* a una región simple con sólo tres vértices como la mostrada en la Figura 19.

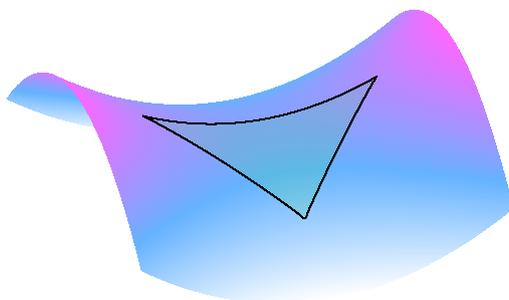


Figura 19: Región simple (triángulo) en una superficie.

Decimos que una región $R \subset S$ es *regular* si R es compacta y su frontera ∂R es la unión de un número finito de curvas regulares a trozos, cerradas y simples que no se cortan. Consideraremos a una superficie cerrada como una región regular sin frontera.

Ahora podemos enunciar el Teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 2 (Teorema de Gauss-Bonnet(do Carmo, 1994, §4.5)). *Sea R una región regular de una superficie orientada y sean C_1, \dots, C_n las curvas regulares a trozos cerradas y simples que forman la frontera ∂R de R . Supongamos que cada C_i está orientada positivamente y sean $\theta_1, \dots, \theta_p$ el conjunto de todos los ángulos externos de las curvas C_1, \dots, C_n . Entonces*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \iint_R K \, d\text{vol} + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R). \quad (2)$$

donde s denota la longitud de arco de C_i y la integral sobre C_i significa la suma de las integrales que corresponden a los arcos regulares de C_i .

Si consideramos a una superficie cerrada como una región regular sin frontera, en la fórmula no hay contribución por la frontera ni por ángulos exteriores obteniendo el siguiente corolario.

Corolario 1 (Teorema de Gauss-Bonnet(do Carmo, 1994, §4-5)). *Sea S una superficie cerrada, conexa y orientada. Entonces*

$$\iint_S K \, d\text{vol} = 2\pi\chi(S),$$

con $\chi(S)$ la característica de Euler-Poincaré.

Este teorema relaciona fuertemente la geometría y topología de la superficie. Por ejemplo, si la curvatura K de S es estrictamente positiva, entonces la integral es estrictamente positiva, lo que implica que $\chi(S) > 0$. Como vimos, la esfera es la única superficie cerrada orientada

con característica de Euler-Poincaré positiva. Por lo tanto, la curvatura impone restricciones a la topología de la superficie.

Ahora consideremos un *triángulo geodésico* T en una superficie S , es decir, una región simple con sólo tres vértices, tal que los arcos regulares de su frontera sean geodésicas de S . Como una región simple es homeomorfa a un disco, tenemos que $\chi(T) = 1$ y como la frontera está formada por geodésicas, la curvatura geodésica es cero, por lo tanto, en la fórmula la primera integral es cero. Expresando a los ángulos exteriores en términos de los ángulos interiores obtenemos.

Corolario 2. *Sea T un triángulo geodésico en una superficie orientada S . Entonces*

$$\iint_R K \, d\text{vol} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \pi,$$

donde η_i , $i = 1, 2, 3$, son los ángulos interiores de T .

Si S es el plano euclidiano, T es un triángulo euclidiano, cuyos lados son segmentos de recta (geodésicas en el plano), tenemos $K = 0$, la integral es cero y obtenemos el conocido resultado de *geometría euclidiana* que la suma de los ángulos interiores de T es igual a π . Si S es la esfera unitaria, T es un triángulo esférico, cuyos lados son segmentos de círculos máximos, tenemos $K = 1$, la integral es estrictamente positiva y obtenemos que la suma de los ángulos interiores de T es mayor a π , esto corresponde a la *geometría elíptica*. Si S es el plano hiperbólico, tenemos $K = -1$, la integral es estrictamente negativa y obtenemos que la suma de los ángulos interiores de T es menor a π , esto corresponde a la *geometría hiperbólica*.

Un espacio de Alexandrof (X, d) es un espacio métricos geodésico con una noción sintética de curvatura acotada inferiormente, la cual se define comparando triángulos geodésicos en X con triángulos euclidianos, elípticos o hiperbólicos. Los espacios de Alexandrof es un área muy activa de investigación actual, para saber más al respecto recomiendo el artículo (Moguel, 2021).

En 1944 Chern (Chern, 1944) generalizó el Teorema de Gauss-Bonnet para variedades diferenciables cerradas orientadas de dimensión $2n$, expresando la característica de Euler-Poincaré como la integral de cierto polinomio de su forma de curvatura.

9.3. Superficies mínimas

Una superficie S es *mínima* si localmente *minimiza su área*. Una superficie S es mínima si y sólo si su curvatura media es cero ($H = 0$) (do Carmo, 1994, §3-5). Ejemplos de superficies mínimas son las formadas por películas de jabón como la mostrada en la Figura 20¹⁰.



Figura 20: Superficie mínima de Costa.

Si el lector desea saber más sobre las superficies mínimas recomiendo el artículo (Galaz-García, 2004).

10. Regresando a la motivación

Regresando a la motivación inicial del artículo, dado un plano P en \mathbb{R}^3 y un punto p en P , si tomamos cualquier otro plano Q perpendicular a P que pase por p , tenemos que la intersección de P y Q es una recta que pasa por p . Entonces todas las curvaturas normales de P en p son cero, y por lo tanto, la curvatura Gaussiana de un plano en todo punto es cero.

Por otro lado, consideremos la esfera unitaria \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 y un punto $p \in \mathbb{S}^2$. Si tomamos un plano Q ortogonal a la esfera que pase por p , la intersección de Q con \mathbb{S}^2 es un círculo máximo, el cual tiene curvatura 1. Entonces, todas las curvaturas normales de \mathbb{S}^2 en p son 1 y por lo tanto, la curvatura Gaussiana de la esfera es 1.

Como el plano y la esfera tienen diferente curvatura Gaussiana no podemos obtener un pedazo de esfera sin doblar, estirar o cortar una hoja de papel. Es por esto, que no podemos obtener un mapa perfecto.

11. Para saber más

Al lector interesado en saber más sobre las diferentes nociones de curvatura y de geometría Riemanniana en general, recomiendo el artículo (Río, 2002) y el libro (Muñoz, 2009). Para un estudio más formal, recomiendo los textos clásicos (do Carmo, 1992, 1994) y para una visión panorámica de la geometría Riemanniana el libro (Berger, 2003).

Notas

1. Imagen tomada de http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ehpp/ehpp.html.
2. Imagen tomada de https://www.researchgate.net/figure/THE-GAUSS-MAP-By-a-direct-application-of-a-classical-result-of-Linear-Algebra-which_fig1_330958425.
3. Imágen tomada de <https://plus.maths.org/content/get-grips-mobius-strip>.
4. Imágen tomada de <https://plus.maths.org/content/imaging-maths-inside-klein-bottle>.
5. Imágen tomada de <https://math.stackexchange.com/questions/2634214/visualising-pi-2s2-and-pi-2-mathbbp2>.
6. Imágen tomada de <http://www.supermath.info/ZooOfMathematicalCreatures.htm>.
7. Imágenes tomadas de <http://www.earthdayenergyfast.org/IMAGES/earth.jpg>, <http://www.navworld.com/navcerebrations/Toroidal.htm> y <http://www.ehu.es/~mtwmastm/CD0506.pdf>.
8. Imágen tomada de <http://www.cnmat.berkeley.edu/Research/AES2006/speakerarray/icosaspeakers.htm>.
9. Imágen tomada de <http://www.math.cornell.edu/~mec/2003-2004/geometry/torii/torii.html>.
10. Imágen tomada de <http://bugman123.com/MinimalSurfaces/Costa-large.jpg>.

Referencias

- Berger, M. (2003). *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin.
- Chern, S.-S. (1944). A simple intrinsic proof of the gauss-bonnet formula for closed riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 45(4):747–752.
- do Carmo, M. (1992). *Riemannian Geometry*. Birkhauser.
- do Carmo, M. P. (1994). *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Editorial.
- Doyle, P. H. and Moran, D. A. (1968). A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Invent. Math.*, 5:160–162.
- Galaz-García, F. (2004). Superficies minimales. *Miscelanea Matemática*, 39:31–38.
- Moguel, M. C. (2021). Espacios de Alexandrov y el problema de Erdős-Perelman. *Miscelanea Matemática*, 71:63–81.
- Muñoz, J. L. (2009). *Riemann: una nueva visión de la geometría*. NIVOLA.
- Naveira, A. M. (2007). L curvatura de riemann a través de la historia. *Miscelanea Matemática*, 44:29–52.
- Osserman, R. (1990). Curvature in the eighties. *Amer. Math. Monthly*, 97(8):731–756.
- Palmas, O. (2020). Todo cabe en un jarrito: una invitación a la teoría de inmersiones isométricas. *Miscelanea Matemática*, 70:59–75.
- Río, E. G. (2002). Una introducción a la curvatura.
- S. William Massey (1967). *Algebraic Topology: an introduction*. Springer Verlag.
- Simanca, S. R. (2002). Geodésicas y curvatura: una introducción elemental. *Miscelanea Matemática*, 35:17–40.
- Spivak, M. (1979). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume II. Houston, Texas (U.S.A.), second edition.

Como citar este artículo: Cisneros Molina, J. L. Un recorrido por el concepto de curvatura. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365, 5(2), 1–27. <https://doi.org/10.36788/sah.v5i2.120>

Cuádricas en \mathbb{R}^3 : Una aplicación en Geometría de Poisson

C. Giottonini-Maldonado¹ y J. C. Ruíz-Pantaleón²

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México
¹a8122338@unison.mx, ²jose.ruiz@unison.mx

Resumen

Mostramos que, bajo ciertas hipótesis, las cuádricas en el espacio euclideo 3-dimensional ayudan a describir una clase importante de transformaciones que actúan sobre corchetes de Poisson definidas en este espacio, llamadas transformaciones gauge.

Palabras Clave: Cuádrica, Cuerpo rígido, Estructura de Poisson, Transformación gauge.

DOI: 10.36788/sah.v5i2.122

Recibido: 17 de julio del 2021.

Aceptado: 16 de septiembre del 2021.

1. Introducción

Resolver, o estudiar, un problema reduciéndolo a otro más sencillo de tratar es quizá de las ideas más antiguas y fundamentales en Matemáticas, y en la ciencia en general. Bajo esta idea, presentamos en este artículo una manera de reducir un problema de interés en Geometría de Poisson, una rama de la Geometría Diferencial, al estudio de cuádricas, objetos bien conocidos y estudiados en Geometría Analítica, Álgebra Lineal y Cálculo, por ejemplo. Concretamente, mostramos que el estudio de una clase de transformaciones que actúan sobre los denominados corchetes de Poisson, llamadas transformaciones gauge, se puede reducir bajo ciertas hipótesis al estudio de cuádricas en el espacio euclideo de dimensión tres, \mathbb{R}^3 . Uno de los principales resultados obtenidos es el Teorema 1:

Teorema 1 *La transformación gauge de un corchete de Poisson lineal en \mathbb{R}^3 mediante un campo vectorial afín está definida en \mathbb{R}^3 salvo una cuádrica, pudiendo ser ésta imaginaria o degenerada.*

Luego, en el contexto de este resultado, para transformaciones gauge del llamado corchete de Poisson del cuerpo rígido obtenemos el Teorema 3, en el cual se presentan algunas condiciones para determinar las cuádricas mencionadas en el teorema anterior. Aún más, en Observaciones 11 se presenta una versión más general del Teorema 1 que involucra la noción de variedad algebraica en sentido clásico.

La Geometría de Poisson trata del estudio (de la geometría) de los denominados corchetes de Poisson en variedades diferenciales (Dufour and Zung, 2005; Laurent-Gengoux et al., 2013), cuyo origen, como objetos algebraicos, se remonta al trabajo de Siméon Denis Poisson en 1809 (Poisson, 1809) en el que aborda un análisis de ciertos sistemas mecánicos. Actualmente, los corchetes de Poisson se pueden entender como objetos que codifican la evolución temporal de sistemas mecánicos (clásicos y/o cuánticos) y que dotan de una geometría especial a las mismas (Lichnerowicz, 1977; Weinstein, 1983). Este contexto geométrico proporciona una manera de describir la dinámica hamiltoniana de forma rigurosa y cuyas aplicaciones, como es sabido, son casi omnipresentes en todos los ámbitos científicos. Un ejemplo clásico es el llamado cuerpo rígido (Marsden and Ratiu, 1999). El estudio de los corchetes de Poisson ha tomado cada vez más relevancia en las últimas décadas por las múltiples conexiones que se han encontrado con otras áreas de la matemática y de la física.

En Geometría de Poisson se plantea de manera natural la pregunta de si es posible transformar un corchete de Poisson y obtener otro. La respuesta en general es que no. Sin embargo, existe un tipo especial de transformaciones, que se llaman transformaciones gauge (Ševera and Weinstein, 2001; Bursztyn, 2005; Evangelista-Alvarado et al., 2021), con la propiedad de transformar corchetes de Poisson en corchetes de Poisson. No solamente esto, ya que en general tales transformaciones están asociadas a una clase especial de 2-formas diferenciales, preservan en cierto sentido la geometría generada por los corchetes de Poisson. Esto último solo es el reflejo de un hecho más profundo: las transformaciones gauge están fuertemente relacionadas con el concepto de simetría. Concepto que ha jugado un rol central en el desarrollo de la física moderna. Por ejemplo, en Teoría Cuántica de Campos. Un tratamiento de las transformaciones gauge desde esta perspectiva y sus implicaciones en física queda fuera del alcance de este artículo. Sin embargo, no solo lo mencionamos para dejar entrever la relevancia de las transformaciones gauge sino porque es un tema de investigación actual, incluso en el espacio \mathbb{R}^3 para el estudio del cuerpo rígido (de la Cruz et al., 2017).

En este artículo, nos centramos en el estudio de las transformaciones gauge de corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 . Entre las ventajas de trabajar en este espacio se encuentra que los corchetes de Poisson están completamente caracterizados por campos vectoriales y matriciales “especiales” (Lema 1). Esto permite utilizar herramientas del cálculo vectorial y matricial para estudiar ciertas propiedades y transformaciones de los corchetes de Poisson. En particular, las mencionadas transformaciones gauge, las cuales se corresponden con campos vectoriales que hacen que se satisfaga una condición de invertibilidad (Definición 1). Un primer resultado obtenido es la Proposición 1, en la cual se describe el dominio de definición y se da una fórmula explícita de las transformaciones gauge de corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 . Como consecuencia, en el Corolario 1 se presenta una clase de transformaciones gauge definidas en todo el espacio \mathbb{R}^3 que dejan invariante a los corchetes de Poisson. Luego, utilizando la Proposición 1 y otros resultados auxiliares, se deduce el Teorema 1 mencionado previamente. Finalmente, aplicando estos resultados al corchete de Poisson del cuerpo rígido obtenemos el Teorema 3 descrito en líneas anteriores.

Observaciones 1. *Presentamos una idea intuitiva del porqué las transformaciones gauge están relacionadas con el concepto de simetría (interna): en un racimo de uvas perfectamen-*

te esféricas, si cada una de las uvas es rotada respecto a algún eje de simetría (distinto, en general), es claro que el racimo permanece sin cambios. Aún más, si cada una de las uvas es de un solo color, desde una perspectiva externa parecería que no hay ningún tipo de “movimiento” o “acción” sobre el racimo. Notemos que una rotación no deforma, no cambia de posición y tampoco destruye las uvas. Si pensamos en la acción de rotar cada uva (simetría interna) como una transformación sobre todo el racimo, esta transformación es lo que entenderíamos como una transformación gauge del racimo. Para el caso de un corchete de Poisson en una variedad diferencial M , en particular en \mathbb{R}^3 , el racimo vendría a ser M y cada una de las uvas subvariedades (puntos y superficies en el caso de \mathbb{R}^3) generadas de alguna manera por el corchete de Poisson y que constituyen a M . Una transformación gauge sobre el corchete de Poisson sería equivalente a una “transformación” sobre las subvariedades que no las deforma, no las “cambia de posición” y tampoco las destruye, y que además da lugar a un, posiblemente diferente, corchete de Poisson en M .

2. Preliminares

En esta sección se recuerdan brevemente las nociones de cuádrica, campo vectorial y campo matricial en el espacio euclideo 3–dimensional, herramientas necesarias para el desarrollo del presente trabajo.

Primero, en esta y en las demás secciones, se fijarán coordenadas (x, y, z) para el espacio euclideo (real) de dimensión tres,

$$\mathbb{R}^3 = \{X = (x, y, z)^\top \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}. \quad (1)$$

Además, se denotará por $C_{\mathbb{R}^3}^\infty := \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es de clase } C^\infty\}$ al espacio de funciones suaves en \mathbb{R}^3 y por $M_3(\mathbb{R})$ al espacio de matrices reales de tamaño 3×3 .

Cuádricas. Una *cuádrica*, o superficie cuádrica, en \mathbb{R}^3 es una superficie determinada por una ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (2)$$

con $A, B, \dots, J \in \mathbb{R}$. En otras palabras, es la superficie generada por los ceros de un polinomio de grado dos, o polinomio cuadrático, en \mathbb{R}^3 .

Si no existen soluciones (reales) a la ecuación (2), la cuádrica se dirá *imaginaria*.

Ejemplo 1. La esfera unitaria en \mathbb{R}^3 es la cuádrica determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

En notación vectorial, la ecuación (2) se puede escribir como

$$\langle S_u X + \ell, X \rangle + J = 0, \quad (3)$$



con X en (1), donde S_u y ℓ son, respectivamente, la matriz simétrica 3×3 y el vector en \mathbb{R}^3 definidos por

$$S_u := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2A & D & E \\ D & 2B & F \\ E & F & 2C \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \ell := \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}, \quad (4)$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar (punto) de vectores,

$$\langle v, w \rangle := v^\top w, \quad v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Si la matriz S en (24), dependiente de S_u y ℓ , tiene determinante cero, la correspondiente cuádrica se dirá *degenerada*.

La expresión en el lado izquierdo de la ecuación (3) resulta de particular interés ya que, como es sabido, las cuádricas se pueden clasificar en función de S_u y ℓ (Zwillinger, 2018). Para los propósitos de este artículo, referimos a la clasificación presentada en el Apéndice A.

Observaciones 2. *La ecuación de una cuádrica en \mathbb{R}^n se escribe de manera análoga a la ecuación (3).*

Campos Vectoriales. Un *campo vectorial* suave en \mathbb{R}^3 es una función vectorial

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \psi(x, y, z) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top, \quad \psi_i = \psi_i(x, y, z), \end{aligned}$$

tal que $\psi_i \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$, con $i = 1, 2, 3$. Es decir, tal que cada una de las funciones ψ_i , llamadas las componentes del campo vectorial ψ , son funciones suaves en \mathbb{R}^3 .

Si todas las componentes de un campo vectorial son funciones polinomiales, se dirá que el campo vectorial es polinomial. En particular, si todas las componentes son funciones lineales, el campo vectorial se dirá lineal.

Ejemplo 2. *El campo vectorial $\psi = (x, y, z)^\top$ es un campo vectorial lineal en \mathbb{R}^3 .*

Recordamos que, además de las operaciones usuales (por ejemplo, el rotacional), los campos vectoriales heredan las operaciones usuales para vectores en \mathbb{R}^3 , tales como el producto escalar y vectorial. En particular, la multiplicación de un campo vectorial por una función escalar se define por

$$f\psi := (f\psi_1, f\psi_2, f\psi_3)^\top, \quad f \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty.$$

Campos Matriciales. Un (3×3) -*campo matricial* suave en \mathbb{R}^3 es una función matricial

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow M_3(\mathbb{R}^3) \\ (x, y, z) &\longmapsto \mathcal{M}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ij}(x, y, z), \end{aligned}$$

tal que $\mu_{ij} \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$, con $i, j = 1, 2, 3$. Es decir, tal que cada una de las funciones μ_{ij} , llamadas las componentes del campo matricial \mathcal{M} , son funciones suaves en \mathbb{R}^3 .

Observaciones 3. En general, un $(k \times l)$ -campo matricial en \mathbb{R}^n es una función matricial de \mathbb{R}^n al espacio de matrices reales de tamaño $k \times l$. En particular, los campos vectoriales son una clase especial de campos matriciales.

De particular interés serán los (3×3) -campos matriciales *antisimétricos* en \mathbb{R}^3 , es decir, funciones matriciales de tipo

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_{12} & \mu_{13} \\ -\mu_{12} & 0 & \mu_{23} \\ -\mu_{13} & -\mu_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Para este artículo, lo importante de esta clase de campos matriciales es que están en biyección con el espacio de campos vectoriales en \mathbb{R}^3 . Concretamente, cada campo vectorial $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top$ en \mathbb{R}^3 induce un único (3×3) -campo matricial antisimétrico, que denotaremos por $[\psi]_\times$, definido por

$$[\psi]_\times := \begin{pmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Recíprocamente, dado un (3×3) -campo matricial antisimétrico como en (5), las funciones $\psi_1 := -\mu_{23}$, $\psi_2 := \mu_{13}$ y $\psi_3 := -\mu_{12}$ definen un único campo vectorial en \mathbb{R}^3 mediante la fórmula $\psi := (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top$.

Por tanto, en el espacio \mathbb{R}^3 , los (3×3) -campos matriciales antisimétricos están parametrizados por campos vectoriales y podemos expresarlos (siempre) como en (6). Además, por definición, es claro que

$$f[\psi]_\times = [f\psi]_\times, \quad \text{para toda } f \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty. \quad (7)$$

Observaciones 4. En *Álgebra Lineal*, dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$, a la matriz $[v]_\times$ definida de manera idéntica a (6) se le conoce como la matriz del producto cruz por el vector v (Liu and Trenkler, 2008). Esto se debe a que el producto (usual) de $[v]_\times$ con cualquier vector $w \in \mathbb{R}^3$ es igual al producto cruz de v y w .

3. Corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3

En esta sección se presenta la definición de un corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 . Enseguida, se muestra que estos objetos están en correspondencia con una clase especial de campos vectoriales y campos matriciales en \mathbb{R}^3 .

Algebraicamente, un *corchete de Poisson* en \mathbb{R}^3 (Dufour and Zung, 2005; Laurent-Gengoux et al., 2013) es una operación binaria $\{, \}$ en el espacio de funciones suaves en \mathbb{R}^3 ,

$$\{, \} : C_{\mathbb{R}^3}^\infty \times C_{\mathbb{R}^3}^\infty \longrightarrow C_{\mathbb{R}^3}^\infty,$$

que satisface los siguientes axiomas:



(a) \mathbb{R} –linealidad,

$$\{cf, g\} = c\{f, g\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Antisimetría,

$$\{g, f\} = -\{f, g\}.$$

(c) Identidad de Jacobi,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

(d) Regla de Leibniz,

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h.$$

Para cualesquiera $f, g, h \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$.

Observaciones 5. Notemos que (a) y (b) implican que un corchete de Poisson es una operación \mathbb{R} –bilineal: $\{f, cg\} = -\{cg, f\} = -c\{g, f\} = c\{f, g\}$.

La existencia de corchetes de Poisson se asegura notando que la operación $\{f, g\} = 0$, para toda $f, g \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$, define un corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 , llamado corchete de Poisson trivial.

Ejemplo 3. La operación binaria en el espacio $C_{\mathbb{R}^3}^\infty$ dada por

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

define un corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 .

Observaciones 6. Los axiomas que definen a un corchete de Poisson en \mathbb{R}^n , o de manera más general, en un variedad diferencial real, son idénticos a los incisos (a)–(d).

La identidad de Jacobi refleja en cierto modo la no asociatividad de los corchetes de Poisson. En general, la no asociatividad de una operación binaria.

Ejemplo 4. El producto vectorial (cruz) $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, como operación binaria en \mathbb{R}^3 , no es asociativa. Pero sí satisface la siguiente identidad (de Jacobi): $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$, para cualesquiera $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

La regla de Leibniz asegura que, si fijamos una función $H \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$, la operación unaria $\text{ad}_H : C_{\mathbb{R}^3}^\infty \rightarrow C_{\mathbb{R}^3}^\infty$ definida por $\text{ad}_H(f) := \{H, f\}$ actúa como una derivada sobre el producto (usual) de dos funciones:

$$\text{ad}_H(fg) = \text{ad}_H(f)g + f\text{ad}_H(g), \quad f, g \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty. \quad (8)$$

Observaciones 7. En un contexto más general, la identidad (8) dice que ad_H es una derivación del producto puntual de funciones. Por tanto, define un campo vectorial llamado campo hamiltoniano de H con respecto al corchete de Poisson $\{, \}$ (Marsden and Ratiu, 1999; Dufour and Zung, 2005; Laurent-Gengoux et al., 2013).

Si bien los corchetes de Poisson se pueden definir y estudiar en variedades diferenciales, entre las ventajas de restringirse al espacio \mathbb{R}^3 se encuentra que podemos caracterizarlos completamente en términos de campos vectoriales y matriciales “especiales”.

Lema 1. *Existe una biyección entre:*

(I) *Corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 .*

(II) *Campos vectoriales ψ en \mathbb{R}^3 que satisfacen la ecuación*

$$\langle \psi, \text{rot } \psi \rangle = 0. \quad (9)$$

(III) *(3×3) -Campos matriciales antisimétricos $[\psi]_{\times}$ en \mathbb{R}^3 , ver (6), tales que el campo vectorial ψ satisface (9).*

Demostración. *Primero, probaremos que existe una biyección entre (II) y (I). Sea $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^{\top}$ un campo vectorial en \mathbb{R}^3 que satisface (9). Entonces, la operación binaria en $C_{\mathbb{R}^3}^{\infty}$ dada por*

$$\{f, g\}_{\psi} := \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle, \quad f, g \in C_{\mathbb{R}^3}^{\infty}; \quad (10)$$

donde ∇ denota el operador gradiente para funciones escalares, define un único corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 . En efecto, la \mathbb{R} -linealidad y antisimetría se siguen directamente de las propiedades de ∇ , \times y \langle, \rangle . La identidad de Jacobi, usando el hecho de que es suficiente verificarla para funciones coordenadas (Dufour and Zung, 2005; Laurent-Gengoux et al., 2013), en este caso (x, y, z) , se sigue de

$$\{x, \{y, z\}_{\psi}\}_{\psi} + \{y, \{z, x\}_{\psi}\}_{\psi} + \{z, \{x, y\}_{\psi}\}_{\psi} = -\langle \psi, \text{rot } \psi \rangle. \quad (11)$$

La regla de Leibniz se sigue de la igualdad

$$\{f, gh\}_{\psi} = \langle \psi, \nabla f \times \nabla(gh) \rangle = \langle \psi, \nabla f \times (g\nabla h + h\nabla g) \rangle = g\langle \psi, \nabla f \times \nabla h \rangle + h\langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle.$$

Ahora, sea $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3)^{\top}$ otro campo vectorial en \mathbb{R}^3 que satisface (9). Si $\{f, g\}_{\tilde{\psi}} = \{f, g\}_{\psi}$ para todo $f, g \in C_{\mathbb{R}^3}^{\infty}$, entonces, en particular, se tiene que $\tilde{\psi}_1 = \{y, z\}_{\tilde{\psi}} = \{y, z\}_{\psi} = \psi_1$. De manera análoga se muestra que debe ser $\tilde{\psi}_2 = \psi_2$ y $\tilde{\psi}_3 = \psi_3$. Lo que prueba que la asignación $\psi \mapsto \{, \}_{\psi}$ es inyectiva. Aún más, es sobreyectiva. En efecto, si $\{, \}$ es un corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 , entonces las funciones

$$\psi_1 := \{y, z\}, \quad \psi_2 := \{z, x\}, \quad \psi_3 := \{x, y\},$$

determinan de manera única un campo vectorial $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^{\top}$ en \mathbb{R}^3 que satisface (9) debido a la identidad de Jacobi para $\{, \}$ y a que se cumple una igualdad idéntica a (11). Aún más, el corchete de Poisson $\{, \}$ se expresa como en (10) en términos de esta ψ . Lo que muestra la biyección entre (II) y (I). Finalmente, la correspondencia entre (II) y (III) se sigue de la biyección entre campos vectoriales y (3×3) -campos matriciales antisimétricos en \mathbb{R}^3 dada por la fórmula (6). \square

Ejemplo 5. El campo vectorial $\psi = (x, y, z)^\top$ en \mathbb{R}^3 del Ejemplo 2 tiene rotacional nulo, $\text{rot } \psi = 0$. Por tanto, satisface de manera automática la ecuación (9). Utilizando la fórmula (10), el correspondiente corchete de Poisson está dado por

$$\{f, g\}_\psi = x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \right) + y \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \right) + z \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right).$$

Ejemplo 6. Para el corchete de Poisson del Ejemplo 3 se tiene que $\{y, z\} = 1$, $\{z, x\} = 1$, $\{x, y\} = 1$. Por tanto, induce el campo vectorial constante $\psi = (1, 1, 1)^\top$ en \mathbb{R}^3 que claramente satisface la ecuación (9) por tener rotacional cero.

Observaciones 8. La ecuación (9) codifica la identidad de Jacobi para la operación definida en (10). En términos coordenados, esta ecuación se traduce en un sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Caracterizar a los corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 en términos de campos vectoriales permite utilizar herramientas del cálculo vectorial para estudiar ciertas propiedades y/u objetos asociados. En la siguiente sección aprovecharemos esta observación para estudiar una clase especial de transformaciones de los corchetes de Poisson, llamadas transformaciones gauge.

4. Transformaciones Gauge de Corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3

Es usual que al tener un determinado objeto algebraico, o geométrico, surja la pregunta de si es posible transformarlo y obtener un (otro) objeto de la misma naturaleza. Para el caso de los corchetes de Poisson en variedades diferenciales existe un tipo especial de transformaciones, que se llaman transformaciones gauge, con la propiedad de transformar corchetes de Poisson en corchetes de Poisson y que en cierto modo actúan como una especie de simetría sobre las correspondientes variedades diferenciales (ver Observaciones 1). El primer objetivo de esta sección es presentar una descripción de estas transformaciones en el espacio euclideo 3–dimensional. Luego, utilizando esta descripción, se mostrará que el estudio de transformaciones gauge “afines” de corchetes de Poisson lineales se reduce al estudio de cuádricas en \mathbb{R}^3 .

Antes de presentar la definición de una transformación gauge recordamos que, como consecuencia del Lema 1, el estudio de los corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 se reduce al estudio de campos vectoriales que satisfacen la ecuación (9), cuyo conjunto denotaremos por

$$\mathcal{X}_p(\mathbb{R}^3) := \{\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \langle \psi, \text{rot } \psi \rangle = 0\}.$$

Así, para cualquier corchete de Poisson $\{, \}$ en \mathbb{R}^3 existe un único campo vectorial $\psi \in \mathcal{X}_p(\mathbb{R}^3)$ tal que la actuación de $\{, \}$ es dada por la fórmula (10). Por tanto, podemos considerar a los corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 parametrizados por la familia de campos vectoriales $\mathcal{X}_p(\mathbb{R}^3)$, lo cual escribiremos por

$$\{, \} = \{, \}_\psi.$$



Luego, de manera natural, una transformación entre corchetes de Poisson se corresponderá con una transformación entre campos vectoriales en $\mathcal{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$, y los correspondientes campos matriciales (ver (III) del Lema 1).

Definición 1. Sea $\{ , \}_{\psi}$ un corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 . Dado un campo vectorial ϕ en \mathbb{R}^3 tal que el (3×3) -campo matricial

$$I - [\phi]_{\times} [\psi]_{\times} \quad \text{es invertible en un abierto } U_{\phi, \psi} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad (12)$$

con I la matriz identidad, el corchete de Poisson $\{ , \}_{\Gamma_{\phi}(\psi)}$ correspondiente al (3×3) -campo matricial antisimétrico

$$[\Gamma_{\phi}(\psi)]_{\times} := [\psi]_{\times} (I - [\phi]_{\times} [\psi]_{\times})^{-1} \quad (13)$$

se llama la transformación gauge de $\{ , \}_{\psi}$ asociada a ϕ en el abierto $U_{\phi, \psi}$.

Por simplicidad, nos referiremos al corchete de Poisson $\{ , \}_{\Gamma_{\phi}(\psi)}$ como la transformación ϕ -gauge de $\{ , \}_{\psi}$.

Observaciones 9. La antisimetría de la matriz $[\Gamma_{\phi}(\psi)]_{\times}$ definida en (13) se sigue de (i) la identidad de Weinstein–Aronszajn (Howland, 1970): sean P y Q matrices (reales) de dimensiones adecuadas, entonces $I + QP$ es invertible si y sólo si $I + PQ$ es invertible. (ii) La igualdad $P(I + QP)^{-1} = (I + PQ)^{-1}P$. Basta con tomar $P = [\psi]_{\times}$ y $Q = -[\phi]_{\times}$ y calcular $[P(I + QP)^{-1}]^{\top}$.

Ejemplo 7. Si ϕ es el campo vectorial trivial en \mathbb{R}^3 , $\phi \equiv 0$, entonces la transformación ϕ -gauge de cualquier corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 es igual a él mismo.

Observaciones 10. En un contexto más general, las transformaciones gauge son transformaciones inducidas por una 2-forma diferencial que, en el dominio donde están definidas, dejan invariante en cierto sentido una geometría generada por los corchetes de Poisson en variedades diferenciales. Este estudio queda fuera del alcance de este artículo, el lector interesado puede consultar (Ševera and Weinstein, 2001; Bursztyn, 2005; Evangelista-Alvarado et al., 2021) (ver también, Observaciones 1). En particular, en (Evangelista-Alvarado et al., 2021) se presentan fórmulas análogas a (15) y (14) válidas en variedades diferenciales 3-dimensionales.

Para este artículo, lo importante de la Definición 1 es que proporciona un mecanismo para construir un corchete de Poisson a partir de uno dado. Sin embargo, en esencia, tal mecanismo involucra el determinar la invertibilidad y la inversa de una matriz de tipo $I + M$, lo que en general es un problema no trivial. Afortunadamente, para el caso particular (12) que ocupa a la Definición 1 se pueden obtener expresiones explícitas que dan lugar al siguiente resultado.

Proposición 1. Sea $\{ , \}_{\psi}$ un corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 . Dado un campo vectorial ϕ en \mathbb{R}^3 , la transformación ϕ -gauge de $\{ , \}_{\psi}$ está bien definida en el abierto

$$U_{\phi, \psi} = \{ \langle \phi, \psi \rangle + 1 \neq 0 \} \subseteq \mathbb{R}^3. \quad (14)$$

Aún más, está dada en este abierto por

$$\{f, g\}_{\Gamma_{\phi}(\psi)} = \frac{1}{\langle \phi, \psi \rangle + 1} \{f, g\}_{\psi}, \quad f, g \in C_{\mathbb{R}^3}^{\infty}. \quad (15)$$

Demostración. Sea $\delta := \langle \phi, \psi \rangle + 1 \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$. Primero, por cálculo directo, tenemos que

$$I - [\phi]_\times [\psi]_\times = \delta I - \psi \phi^\top.$$

Luego, se puede verificar que

$$\det(\delta I - \psi \phi^\top) = \delta^2.$$

En consecuencia, la condición (12) equivale a pedir $\delta \neq 0$. Es decir, se cumple en el abierto $U_{\phi, \psi} = \{\delta \neq 0\}$ de \mathbb{R}^3 . Lo que prueba (14). Ahora, en el abierto $U_{\phi, \psi}$, por la fórmula de Sherman–Morrison (Golub and Van Loan, 2013), tenemos que

$$(\delta I - \psi \phi^\top)^{-1} = \delta^{-1} I + \frac{\delta^{-2}}{1 - \delta^{-1} \langle \phi, \psi \rangle} \psi \phi^\top = \delta^{-1} (I + \psi \phi^\top)$$

Luego, es claro que

$$[\psi]_\times (\delta I - \psi \phi^\top)^{-1} = \delta^{-1} [\psi]_\times.$$

Por tanto, usando (7), el (3×3) -campo matricial antisimétrico en (13) es dado por

$$[\Gamma_\phi(\psi)]_\times = \frac{1}{\delta} [\psi]_\times = \left[\frac{1}{\delta} \psi \right]_\times.$$

Lo que implica que

$$\Gamma_\phi(\psi) = \frac{1}{\delta} \psi.$$

Ahora, ya que $\text{rot}(\delta^{-1} \psi) = \delta^{-1} \text{rot} \psi + \delta^{-2} \psi \times \nabla \delta$, el campo vectorial $\Gamma_\phi(\psi)$ satisface la ecuación (9), pues ψ lo hace por hipótesis. Por lo tanto, del Lema 1, se sigue que $\Gamma_\phi(\psi)$ induce un corchete de Poisson que, por (10), está definido en $U_{\phi, \psi}$ por

$$\{f, g\}_{\Gamma_\phi(\psi)} = \langle \Gamma_\phi(\psi), \nabla f \times \nabla g \rangle = \langle \frac{1}{\delta} \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle = \frac{1}{\delta} \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle = \frac{1}{\delta} \{f, g\}_\psi,$$

para cualesquiera $f, g \in C_{\mathbb{R}^3}^\infty$. Lo que prueba (15). \square

En otras palabras, la Proposición 1 nos dice que la transformación ϕ -gauge de un corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ en \mathbb{R}^3 es un múltiplo de ella misma por una función escalar. Lo que resuelve el problema de determinar de manera explícita la transformación gauge de un corchete de Poisson dado. Aún más, nos dice que es el corchete de Poisson parametrizado por el campo vectorial

$$\Gamma_\phi(\psi) = \frac{1}{\langle \phi, \psi \rangle + 1} \psi, \quad (16)$$

definido en el abierto $U_{\phi, \psi}$ en (14). En consecuencia, bajo un abuso de notación, se tiene inducida una transformación $C_{\mathbb{R}^3}^\infty$ -lineal $\Gamma_\phi : \mathcal{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$ entre campos vectoriales en $\mathcal{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$ definida por la fórmula (16).

Por lo anterior, el estudio de las transformaciones gauge de corchetes de Poisson en \mathbb{R}^3 se reduce al estudio de transformaciones Γ_ϕ de campos vectoriales en $\mathcal{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$. Aún más, por la definición de Γ_ϕ , es claro que todo se reduce al estudio de la ecuación

$$\langle \phi, \psi \rangle + 1 = 0, \quad (17)$$

por ser $U_{\phi, \psi} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\langle \phi, \psi \rangle + 1 = 0\}$. \square



Ejemplo 8. Sea $\{, \}_\psi$ un corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 . Entonces, la transformación ψ -gauge de $\{, \}_\psi$ está bien definida en todo \mathbb{R}^3 y es igual al corchete de Poisson $1/(\|\psi\|^2 + 1) \{, \}_\psi$.

Corolario 1. Sea $\{, \}_\psi$ un corchete de Poisson en \mathbb{R}^3 . Si ϕ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 ortogonal a ψ , es decir, $\langle \phi, \psi \rangle = 0$, entonces la transformación ϕ -gauge de $\{, \}_\psi$ está bien definida en todo \mathbb{R}^3 y es igual $\{, \}_\psi$.

En general, dar una descripción de la superficie (de nivel) generada por la ecuación (17), y por tanto del abierto $U_{\phi, \psi}$ en (14), es un problema complicado que depende claramente de las propiedades de los campos vectoriales ψ y ϕ . Como veremos a continuación, para el caso en que ψ es un campo vectorial lineal y ϕ es un campo vectorial afín la ecuación (17) es la ecuación de una cuádrlica en \mathbb{R}^3 .

5. Caso: Corchetes de Poisson lineales en \mathbb{R}^3

En este apartado, utilizando el estudio realizado previamente en esta sección, se muestra que las cuádricas en \mathbb{R}^3 determinan el dominio de definición de las transformaciones gauge dadas por campos vectoriales afines de corchetes de Poisson lineales. Luego, aplicando este resultado y una clasificación conocida de cuádricas en \mathbb{R}^3 , se describen para el corchete de Poisson (lineal) del cuerpo rígido (Marsden and Ratiu, 1999) las transformaciones gauge dadas por campos vectoriales afines y se presentan algunas condiciones que ayudan a determinar el dominio en el que están definidas.

Un corchete de Poisson $\{, \}_\psi$ en \mathbb{R}^3 se dice *lineal* si ψ es un campo vectorial lineal, es decir, si es de la forma

$$\psi = LX = (l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z, l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z, l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z)^\top, \quad (18)$$

donde $L = [l_{ij}]$ es una matriz real de tamaño 3×3 , con $l_{ij} \in \mathbb{R}$ e $i, j = 1, 2, 3$.

Sea ϕ un campo vectorial *afín* en \mathbb{R}^3 , es decir, la suma de un campo vectorial lineal y uno constante en \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \phi &= MX + c \\ &= (m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z + c_1, m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z + c_2, m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + c_3)^\top, \end{aligned} \quad (19)$$

donde $M = [m_{ij}]$ es una matriz real de tamaño 3×3 , con $m_{ij} \in \mathbb{R}$, y $c = (c_1, c_2, c_3)^\top$ es un campo vectorial constante (vector) en \mathbb{R}^3 .

A continuación, presentamos el resultado principal de este artículo.

Teorema 1. La transformación gauge de un corchete de Poisson lineal en \mathbb{R}^3 mediante un campo vectorial afín está definida en \mathbb{R}^3 salvo una **cuádrlica**, pudiendo ser ésta imaginaria o degenerada.

La demostración de este teorema se basa en el siguiente lema.



Lema 2. Si ψ es un campo vectorial lineal y ϕ es un campo vectorial afín en \mathbb{R}^3 , entonces la ecuación (17) es la ecuación de una cuádrica en \mathbb{R}^3 .

Demostración. Por cálculo directo, usando (18) y (19), tenemos que

$$\langle \phi, \psi \rangle + 1 = \langle MX + c, LX \rangle + 1 = \langle \frac{1}{2}(L^\top M + M^\top L)X + L^\top c, X \rangle + 1.$$

Luego, la ecuación (17) es igual a la ecuación (3) tomando $S_u = \frac{1}{2}(L^\top M + M^\top L)$, $\ell = L^\top c$ y $J = 1$. Lo que prueba la afirmación de este lema. \square

Ahora, presentamos la demostración del Teorema 1.

Demostración (del Teorema 1). Sean $\{, \}_\psi$ un corchete de Poisson lineal y ϕ un campo vectorial afín en \mathbb{R}^3 . Por el Lema 2, el abierto $U_{\phi, \psi}$ en (14) en el que está definida la transformación ϕ -gauge de $\{, \}_\psi$ es el complemento de una cuádrica en \mathbb{R}^3 . \square

En otras palabras, el Teorema 1 permite reducir el estudio de las transformaciones gauge de corchetes de Poisson lineales en \mathbb{R}^3 , mediante campos vectoriales afines, al estudio de cuádricas en \mathbb{R}^3 . El hecho de que las cuádricas puedan ser *imaginarias* equivale a que tales transformaciones pueden estar definidas en *todo el espacio* \mathbb{R}^3 . Todo esto da una respuesta particular al problema de describir de manera explícita el abierto $U_{\phi, \psi}$ en (14) en el que está definida una transformación gauge.

A continuación, aplicamos el Teorema 1 a un corchete de Poisson lineal bastante conocido: el corchete de Poisson del cuerpo rígido.

Observaciones 11. De manera más general, si ψ y ϕ son campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^3 , entonces la ecuación (17) define una variedad algebraica en \mathbb{R}^3 , en sentido clásico. Así, el Teorema 1 se puede generalizar de la siguiente manera: la transformación gauge de un corchete de Poisson polinomial en \mathbb{R}^3 mediante un campo vectorial polinomial está definida en \mathbb{R}^3 salvo una variedad algebraica.

Corchete de Poisson del Cuerpo Rígido. El corchete de Poisson lineal en \mathbb{R}^3

$$\{, \}_{\text{rig}} = \{, \}_\psi$$

correspondiente al campo vectorial del Ejemplo 2,

$$\psi = (x, y, z)^\top, \tag{20}$$

se llama corchete de Poisson del *cuerpo rígido* (Marsden and Ratiu, 1999), con expresión explícita dada en el Ejemplo 5. Se llama así porque codifica las ecuaciones (y la geometría) que determinan la evolución temporal del sistema físico denominado cuerpo rígido. Grosso modo, un cuerpo rígido es un cuerpo ideal que no sufre ningún tipo de deformación bajo la acción de una fuerza externa aplicada sobre él. En otras palabras, la distancia entre dos puntos cualesquiera de un cuerpo rígido permanece constante en el tiempo, independientemente de las fuerzas externas aplicadas sobre él.

Ahora, notemos que la matriz que determina al campo vectorial lineal ψ en (20), en el sentido de (18), es la matriz identidad ($L = I$). Luego, dado un campo vectorial afín ϕ como en (19), por el Lema 2, la ecuación (17) da lugar a la siguiente ecuación de una cuádrica:

$$\langle MX + c, X \rangle + 1 = 0.$$

De manera más explícita,

$$Q := m_{11}x^2 + m_{22}y^2 + m_{33}z^2 + (m_{12} + m_{21})xy + (m_{13} + m_{31})xz + (m_{23} + m_{32})yz + c_1x + c_2y + c_3z + 1 = 0 \quad (21)$$

Así, de la Proposición 1 se desprende el siguiente resultado.

Teorema 2. *Sea ϕ un campo vectorial afín en \mathbb{R}^3 como en (19). Entonces, la transformación ϕ -gauge del corchete de Poisson del cuerpo rígido está dada por*

$$\frac{1}{Q} \{ , \}_{\text{rig}},$$

y está definida en el abierto

$$\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_Q, \quad (22)$$

donde Q es el polinomio cuadrático en \mathbb{R}^3 definido en (21) y Σ_Q es la cuádrica inducida por Q vía la ecuación (21).

Por ser ϕ un campo vectorial arbitrario, para determinar completamente las transformaciones gauge en este teorema solo falta describir las posibles cuádricas Σ_Q en (22) en términos de la matriz M y el vector c en (19). Esto es lo que presentamos en el siguiente teorema para el caso particular en que M es la suma de una matriz diagonal y una matriz antisimétrica, utilizando la clasificación de cuádricas en el Apéndice A.

Teorema 3. *Sea ϕ un campo vectorial afín en \mathbb{R}^3 como en (19) tal que M es una matriz que satisface las siguientes condiciones:*

$$m_{21} = -m_{12}, \quad m_{31} = -m_{13} \quad \text{y} \quad m_{32} = -m_{23}. \quad (23)$$

Entonces, la transformación ϕ -gauge del corchete de Poisson del cuerpo rígido está definida en el abierto

$$\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_Q,$$

donde Σ_Q es una cuádrica en \mathbb{R}^3 . Aún más, asumiendo (23), la Tabla 1 presenta algunas condiciones bajo las cuales Σ_Q queda determinada:

Tabla 1: Cuádricas Σ_Q

Σ_Q	Condiciones
Plano	$m_{33} \neq 0, m_{11} = m_{22} = c_1 = c_2 = 0, 4m_{33} = c_3^2$
”	$m_{33} = c_1 = 0, 4m_{22} = c_2^2 \neq 0$
”	$m_{33} = c_2 = 0, 4m_{11} = c_1^2 \neq 0$
Planos paralelos	$m_{11} \neq 0, m_{22} = m_{33} = c_2 = c_3 = 0, 4m_{11} - c_1^2 \neq 0$
”	$m_{22} \neq 0, m_{11} = m_{33} = c_1 = c_3 = 0, 4m_{22} - c_2^2 \neq 0$
”	$m_{33} \neq 0, m_{11} = m_{22} = c_1 = c_2 = 0, 4m_{33} - c_3^2 \neq 0$
Cilindro Parabólico	$m_{33} \neq 0, m_{11} = m_{22} = 0, \text{nonzero}(c_1, c_2) \geq 1$
”	$m_{11}, c_3 \neq 0, m_{22} = m_{33} = 0$
”	$m_{22}, c_3 \neq 0, m_{11} = m_{33} = 0$
”	$m_{11}, c_2 \neq 0, m_{22} = m_{33} = c_3 = 0$
”	$m_{22}, c_1 \neq 0, m_{11} = m_{33} = c_3 = 0$
Par de planos intersectados	$m_{33} = c_3 = 0, m_{11}c_2^2 + m_{22}c_1^2 = 4m_{11}m_{22} < 0$
Imaginaria	$m_{33} = c_3 = 0, m_{11}c_2^2 + m_{22}c_1^2 = 4m_{11}m_{22} > 0$
Cilindro hiperbólico	$m_{11}m_{22} < 0, m_{33} = c_3 = 0, m_{11}c_2^2 + m_{22}c_1^2 - 4m_{11}m_{22} \neq 0$
Cilindro elíptico	$m_{11}m_{22} > 0, m_{33} = c_3 = 0, m_{11}c_2^2 + m_{22}c_1^2 - 4m_{11}m_{22} \neq 0$
Paraboloide hiperbólico	$c_3 \neq 0, m_{11}m_{22} < 0, m_{33} = 0$
Paraboloide elíptico	$c_3 \neq 0, m_{11}m_{22} > 0, m_{33} = 0$

Demostración (bosquejo). Por (23), el polinomio cuadrático Q en (21) es en este caso igual a

$$Q = m_{11}x^2 + m_{22}y^2 + m_{33}z^2 + c_1x + c_2y + c_3z + 1.$$

Luego, por (3) y (4), la matriz S_u y el vector ℓ que determinan a Q son dados por

$$S_u = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \quad y \quad \ell = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la Tabla 1 se obtiene después de varios cálculos siguiendo los criterios y la clasificación en el Apéndice A con S_u como antes, $\bar{\ell} = \frac{1}{2}\ell$ y $J = 1$. \square



Cabe mencionar que en este teorema nos limitamos a matrices que satisfacen (23) porque considerar a M de manera general no permite deducir condiciones explícitas que describan a Σ_Q , como en la Tabla 1, más allá de las condiciones generales presentadas en la clasificación en el Apéndice A. Además, aclaramos que las condiciones presentadas en estas tablas no son exhaustivas, se eligieron sólo las más ilustrativas, a nuestro parecer.

Agradecimientos

J. C. Ruíz–Pantaleón agradece a CONACyT la beca posdoctoral durante la realización de este trabajo. También agradece el esfuerzo y la dedicación de C. Giottonini–Maldonado para con este artículo que forma parte de su tesis de licenciatura.

A. Apéndice: Clasificación de Cuádricas en \mathbb{R}^3

Dada la ecuación de una cuádrica en \mathbb{R}^3

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

con $A, B, \dots, J \in \mathbb{R}$, definamos la siguiente matriz simétrica 3×3 y el vector en \mathbb{R}^3 :

$$S_u := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2A & D & E \\ D & 2B & F \\ E & F & 2C \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\ell} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}.$$

Consideremos la matriz simétrica por bloques 4×4

$$S = \begin{pmatrix} S_u & \bar{\ell} \\ \bar{\ell}^\top & J \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Definamos

$$\rho_3 := \text{rank } S_u, \quad \rho_4 := \text{rank } S, \quad \Delta := \det S$$

y

$$k := \begin{cases} 1 & \text{si los valores propios no triviales de } S_u \text{ tienen el mismo signo,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tabla 2: Clasificación de cuádricas en \mathbb{R}^3

Cuádrica	Ecuación Canónica	ρ_3	ρ_4	$\text{sgn}(\Delta)$	k
elipsoide (imaginario)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	3	4	+	1
elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	3	4	-	1
hiperboloide de una hoja	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	3	4	+	0
hiperboloide de dos hojas	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	3	4	-	0
paraboloide hiperbólico	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = z$	2	4	+	0
paraboloide elíptico	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$	2	4	-	1
cono elíptico (imaginario)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	3	3		1
cono elíptico	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	3	3		0
cilindro elíptico (imaginario)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	2	3		1
cilindro elíptico	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	2	3		1
cilindro hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	2	3		0
cilindro parabólico	$x^2 + 2az = 0$	1	3		
par de planos intersectados (imaginario)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	2	2		1
par de planos intersectados	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	2	2		0
planos paralelos (imaginario)	$x^2 = -a^2$	1	2		
planos paralelos	$x^2 = a^2$	1	2		
planos coincidentes	$x^2 = 0$	1	1		

Referencias

- Bursztyn, H. (2005). *On Gauge Transformations of Poisson Structures*, pages 89–112. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- de la Cruz, M., Gaspar, N., Jiménez-Lara, L., and Linares, R. (2017). Classification of the classical $SL(2, \mathbb{R})$ gauge transformations in the rigid body. *Annals of Physics*, 379:112–130.
- Dufour, J.-P. and Zung, N. T. (2005). *Poisson Structures and Their Normal Forms*. Birkhäuser Basel, Basilea, Suiza.
- Evangelista-Alvarado, M. A., Ruíz-Pantaleón, J. C., and Suárez-Serrato, P. (2021). On computational Poisson geometry I: Symbolic foundations. *Journal of Geometric Mechanics*.
- Golub, G. H. and Van Loan, C. F. (2013). *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland.
- Howland, J. S. (1970). On the Weinstein-Aronszajn formula. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 39:323–339.
- Laurent-Gengoux, C., Pichereau, A., and Vanhaecke, P. (2013). *Poisson Structures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin/Heidelberg, Germany.
- Lichnerowicz, A. (1977). Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *Journal of Differential Geometry*, 12(2):253–300.
- Liu, S. and Trenkler, G. (2008). Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 4(1):160–177.
- Marsden, J. E. and Ratiu, T. S. (1999). *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Springer, New York, NY, New York, EE. UU.
- Poisson, S. D. (1809). Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique. *Journal de l'École Polytechnique – Mathématiques*, 8:266–344.
- Ševera, P. and Weinstein, A. (2001). Poisson geometry with a 3-form background. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 144:145–154.
- Weinstein, A. (1983). The local structure of Poisson manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 18(3):523–557.
- Zwillinger, D. (2018). *CRC Standard Mathematical Tables and Formulas*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida.

Como citar este artículo: Giottonini Maldonado, C., & Ruiz Pantaleon, J. C. Cuádricas en \mathbb{R}^3 : Una aplicación en Geometría de Poisson. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365, 5(2), 28–44. <https://doi.org/10.36788/sah.v5i2.122>

EvA-Web: Una herramienta para evaluar la accesibilidad de sitios web

Gabriel García-Mireles¹, Angélica María Maldonado Vásquez² y Miguel Ehécatl Morales-Trujillo³

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora^{1,2}
Universidad de Canterbury³

¹gabriel.garcia@unison.mx, ²a207209239@unison.mx, ³miguel.morales@canterbury.ac.nz

Resumen

En la actualidad, las personas dependen en gran medida de las tecnologías de la información para realizar su trabajo, acceder contenidos para la formación académica o entretenimiento. En este contexto, los sitios web permiten compartir la información con una amplia variedad de usuarios. Para lograr que los contenidos sean percibidos por todas las personas, incluyendo aquellas que tienen alguna discapacidad, se requiere que los sitios web sean accesibles. El término accesibilidad denota el grado en el cual un sistema puede ser usado por personas con el más amplio rango de capacidades. El objetivo de este trabajo, por tanto, es presentar EvA-Web (Evaluación de la Accesibilidad-Web) como una herramienta que apoya a los desarrolladores de software en la identificación de las barreras a la accesibilidad que se encuentran en los sitios web que diseñan o programan. El prototipo de esta herramienta se desarrolló tomando en cuenta las guías de accesibilidad para el contenido web (Web Content Accessibility Guidelines) WCAG 2.0. Además, presentamos los resultados de la validación del prototipo de EvA-Web en donde se evaluó un sitio web y se identificaron barreras a la accesibilidad. La herramienta EvA-Web es uno de los productos generados de una tesis realizada por una estudiante de la licenciatura en Ciencias de la Computación que se ofrece en la Universidad de Sonora.

Palabras Clave: Accesibilidad, Herramienta de evaluación, Sitios web, WCAG 2.0, Web Content Accessibility Guidelines.

DOI: 10.36788/sah.v5i2.103
Recibido 2 de marzo de 2020
Aceptado 8 de septiembre de 2021

1. Introducción

Muchas de las experiencias cotidianas de los individuos están relacionadas con el acceso a dispositivos digitales, computadoras y teléfonos celulares, en donde la web se convierte en una vía primaria para acceder a los contenidos. Desde sus inicios, la web se conceptualizó como una herramienta de trabajo para todas las personas, cualquiera que sea su hardware, software, lenguaje, localización geográfica o nivel de habilidad o capacidad (Henry and McGee, 2018). Para que la web logre su objetivo de compartir información entre distintas personas, ésta debe ser accesible.

En este trabajo estamos interesados en proporcionar accesibilidad a través de la web a todas las personas. Accesibilidad significa que los “sitios web, herramientas, y tecnologías se diseñan y desarrollan para que las personas con discapacidades las puedan usar. . . [es decir], puedan percibir, entender, navegar, ..., [y] contribuir a la web” (W3C Working Group, 2018). Dado que las personas que usan la web pueden tener distintos niveles de capacidades físicas o cognitivas, es importante considerar sus limitaciones en el diseño de sitios web. En particular, el término “discapacidad” se refiere a deficiencias, limitaciones de actividad y restricciones para la participación de los individuos (World Health Organization, 2011).

Se estima que el 15 % de la población, conformada por personas mayores de 14 años, vive con alguna discapacidad (World Health Organization, 2011). De éstas, alrededor del 4 % tienen una discapacidad grave, e.g., ceguera, depresión grave o tetraplejía. Además, los datos estadísticos muestran que el número de personas con discapacidad está creciendo debido al envejecimiento de la población y enfermedades crónicas como la diabetes, enfermedades cardiovasculares y trastornos mentales (World Health Organization, 2011). En el caso de México, el INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía (México), 2016) informa que el 13 % de la población total tiene alguna limitación en sus capacidades y la mitad de ellos están en el grupo de edad de 30 a 59 años (p. 97). Las discapacidades de mayor prevalencia son las motrices y visuales, las cuales fueron reportadas por más de la mitad de las personas con discapacidad (Instituto Nacional de Estadística y Geografía (México), 2016).

Las personas con discapacidad enfrentan varios obstáculos para valerse por sí mismas cuando necesitan acceder los contenidos digitales en la web. Entre ellos, se encuentran la insuficiente calidad en los servicios provistos por instituciones gubernamentales y no gubernamentales, la falta de accesibilidad a la información y servicios básicos como internet, la falta de la implementación de criterios de accesibilidad en sitios web, entre otros (Acosta et al., 2018). Las barreras a la accesibilidad desalientan a las personas con discapacidad a buscar trabajo, recibir atención sanitaria o educación (Instituto Nacional de Estadística y Geografía (México), 2016). La falta de acceso igualitario a los servicios en internet ha resultado en la aparición de términos relacionados con la exclusión, como infoexclusión, exclusión digital y exclusión social (Agangiba and Kabanda, 2017). Es importante para las personas con discapacidad estar integradas en la sociedad digital en donde ellas puedan disfrutar de acceso igualitario a las oportunidades que ofrece la web, lo que podría contribuir a su desarrollo personal al fomentar su independencia, sentimientos de pertenencia y su actualización (Agangiba and Kabanda, 2017).

Para mejorar la accesibilidad de la web, los desarrolladores de sitios y aplicaciones web podrían aplicar un conjunto de recomendaciones para que los contenidos de las páginas web sean fácilmente codificados e interpretados por tecnologías de asistencia a la discapacidad (e.g., lectores de pantallas). Este es un primer paso para facilitar el acceso a los contenidos web. Para ejecutarlo, es importante conocer y aplicar las guías de accesibilidad disponibles (e.g. *Web Content Accesibility Guidelines* (WCAG 2.0)) (W3C Working Group, 2008). El propósito de estas guías es proporcionar el control al usuario sobre los eventos que se presentan en la pantalla y facilitarle la interacción con los sitios web a través del uso de tecnologías de asistencia. Aunque estas guías ya tienen algún tiempo publicadas, aún existen muchos sitios web que presentan barreras de accesibilidad (Laitano, 2015; Power et al., 2012).

Dada la necesidad de mejorar la accesibilidad de sitios web, el objetivo de este artículo es presentar el prototipo EvA-Web, herramienta que permite determinar en qué medida se consideraron las técnicas para mejorar la accesibilidad de páginas web escritas en código (*Hypertext Markup Language*) HTML 5.0. Por tanto, la sección 2 describe brevemente la guía de accesibilidad WCAG 2.0 mientras que la sección 3 presenta algunos elementos del diseño de la herramienta EvA-Web. Además, la sección 4 muestra la estrategia de validación del prototipo. Finalmente, en la sección 5 presentamos las conclusiones y trabajo futuro.

2. Guías de la WCAG 2.0

La WCAG 2.0 (W3C Working Group, 2008) es un guía que permite mejorar la accesibilidad del contenido y de las aplicaciones web. Ha sido desarrollada por el *World Wide Web Consortium* (W3C), y se puede aplicar tanto al contenido basado en HTML como aquel basado en multimedia, JavaScript, PDF, entre otros. La WCAG 2.0 cubre un amplio rango de características para que el contenido web pueda ser accesible para personas con capacidades diferentes por medio del uso de tecnologías de asistencia, tales como los lectores de pantallas o las impresoras braille.

La guía WCAG 2.0 se estructura en los niveles jerárquicos de principios, objetivos, criterios y técnicas. En el nivel más alto de la jerarquía se encuentra los principios, los cuales describen los fundamentos de la accesibilidad web. Los principios básicos son los de percepción, operación, comprensión y robustez. El principio de percepción se enfoca en encontrar una forma de presentar la información de tal manera que sea accesible por alguno de los sentidos del usuario. Se considera que el principio de operación se ha aplicado en el sitio web cuando el usuario tiene control sobre la navegación según sus capacidades. Cuando el usuario comprende el contenido así como la operación de la interfaz de usuario, entonces se ha aplicado el principio de comprensión. Finalmente, el principio de robustez trata de que el contenido de la página web sea accesible de manera confiable a través de distintas tecnologías de asistencia, las cuales evolucionan a través del tiempo (W3C Working Group, 2008).

Cada principio está asociado a un conjunto de objetivos que permiten crear contenido web accesible (Figura 1). Además, cada objetivo está relacionado con un conjunto de criterios de éxito que deben ser logrados para estar en conformidad con la guía WCAG 2.0. Estos criterios de éxito están escritos de tal manera que pueden probarse objetivamente en distintas



Figura 1: Principios de la WCAG 2.0 y algunos objetivos, criterios y técnicas.

tecnologías de desarrollo de aplicaciones web. La evaluación de los criterios de éxito puede ser realizada con una herramienta de software automatizada, con la intervención de usuarios finales y por expertos en la accesibilidad. Para cada objetivo, la WCAG 2.0 presenta un conjunto de prácticas para evaluar el grado de accesibilidad de algún elemento de la página web tomando en cuenta la tecnología con la que fue creada (e.g., HTML, CSS, JavaScript).

Los criterios de éxito son la base para establecer la conformidad con la WCAG 2.0 de la página web bajo evaluación. La evaluación se realiza en tres niveles A, AA y AAA. En donde el nivel más bajo es A, y éste considera los criterios esenciales para que una tecnología de asistencia pueda hacer el contenido accesible. Cada criterio de éxito tiene asociado un conjunto de técnicas informativas que indican cómo se pueden implementar. Algunas técnicas son específicas a la tecnología usada para construir las páginas web (e.g., HTML).

En este trabajo nos centramos en estudiar las técnicas de accesibilidad dirigidas al código HTML 5.0. El conjunto de técnicas lo denominamos técnicas H + número. Estas las clasificamos en ocho categorías: enlace, imagen, página, tablas, estructura, formulario, párrafo y otros. Cada técnica está documentada en la guía de la WCAG 2.0 con base en la prueba que debe realizarse en el contenido HTML (W3C Working Group, 2012). Por ejemplo, la técnica H37 requiere que la etiqueta IMG contenga el atributo ALT que describa en texto la información relevante de la imagen (siempre que la imagen no sea sólo un adorno de la página).

Para desarrollar el prototipo de la herramienta EvA-Web, revisamos artículos científicos, publicados en los últimos diez años, que señalan las características deseables de las herramientas de evaluación de la accesibilidad. En general, se recomienda que estas herramientas informen de las guías, estándares o normativas de accesibilidad que han sido implementadas, especifiquen las técnicas de accesibilidad aplicadas y sus resultados, así como que determinen en qué medida la página web evaluada alcanzó el nivel A, AA o AAA de accesibilidad. Por otra parte, la información mínima de entrada de estas herramientas es la dirección URL del sitio web que se pretende evaluar.

Además, para comprender cómo se aplican las técnicas de evaluación de accesibilidad recomendadas por la WCAG 2.0, analizamos algunas herramientas disponibles en línea como

Cynthia Says (<http://www.cynthiasays.com/>), AChecker (<https://achecker.ca/checker/index.php>), Taw (<https://www.tawdis.net/>), Examiner (<http://examiner.ws/>) y Wave (<https://wave.webaim.org/>). Estas herramientas solicitan al usuario que introduzca la URL de la página web y que seleccione la guía de accesibilidad por evaluar. En el caso de los informes generados por estas herramientas, encontramos diferencias en el nivel de detalle en que se presenta los resultados de evaluar las técnicas de accesibilidad y el grado en que cada una de las técnicas evaluadas fue satisfecha.

Para determinar la consistencia en los informes generados por las herramientas anteriormente mencionadas, realizamos una evaluación de la accesibilidad, realizada en noviembre de 2019, para determinar en qué grado la página inicial del sitio web de la licenciatura en Ciencias de la Computación de la Universidad de Sonora (<http://cc.uson.mx/>) es accesible. La razón de haber seleccionado esta página es que difunde información general sobre un programa educativo que debería de llegar a todos los interesados en estudiar dicha licenciatura. La Tabla 1 presenta los resultados parciales de la evaluación, mostrando sólo cinco técnicas de las 31 evaluadas.

Tabla 1: Resultados parciales de la evaluación de la accesibilidad del código HTML con la herramientas seleccionadas.

Técnica H	Wave	Taw	Examiner	Cynthia Says	AChecker
H2	0	0	2 errores	6 errores	0
H4	0	1 advertencia	0	1 advertencia	0
H37	2 errores	0	0	2 errores	8 advertencias
H24	0	0	0	0	0
H35	0	0	0	0	0

Como se muestra en la Tabla 1, existen inconsistencias en los resultados reportados por cada una de las herramientas. Esta variación se debe a las diferentes implementaciones de las técnicas H, según el contexto de la página web que haya considerado el programador de la herramienta. Como resultado, la clasificación de los hallazgos es distinta. Algunos tipos de errores encontrados por las herramientas están relacionados con más de una técnica H, y eso complica la identificación de la técnica a la cual pertenecen los resultados. Además, un defecto común de las herramientas, es que no reportan el número de renglón correcto en que se encuentra el código que la técnica evalúa.

De hecho, nuestros resultados de este ejercicio de evaluación son consistentes con otros que reportan el desempeño de herramientas de evaluación de accesibilidad. Por ejemplo, Vigo et al. (Vigo et al., 2013) analizaron seis herramientas de evaluación automática de accesibilidad y encontraron diferencias en cuanto a salidas correctas (66 % al 96 %), cobertura de los criterios de éxito (menor al 50 %) y completitud de la herramienta en donde, en el mejor de los casos, sólo se identifican 4 de 10 violaciones a la accesibilidad. Se cree que estas herramientas están diseñadas para capturar los problemas de accesibilidad más comunes y que poco esfuerzo

se dedica al desarrollo de componentes que identifiquen violaciones a la accesibilidad menos frecuentes (Vigo et al., 2013).

3. Herramienta EvA-Web

Con base en el análisis de herramientas de evaluación automática de la accesibilidad de páginas web y las recomendaciones de investigadores en este campo, se decidió implementar EvA-Web. Las técnicas para evaluar la accesibilidad de páginas web, codificadas en HTML 5.0 se clasificaron de acuerdo al elemento del lenguaje HTML que abordan. La Tabla 2 presenta las 56 técnicas implementadas de la WCAG 2.0 (W3C Working Group, 2016).

La clasificación considera las categorías enlace (link), imagen, páginas HTML, tablas, estructura del contenido, formulario, párrafo y otros. Aunque algunas técnicas H pueden aplicarse a más de un elemento HTML, se decidió en este prototipo asignarlas a una sola categoría. Por ejemplo, en la categoría imagen se encuentran las técnicas H37 y H67. La primera de ellas evalúa que cada elemento IMG tenga el atributo ALT, y que éste describa el contenido de la imagen. En el caso de la técnica H67, se evalúa que cada elemento IMG, que contenga una imagen decorativa, el atributo ALT debe tener valor nulo.

Tabla 2: Técnicas H clasificadas por categoría.

Categoría	Técnicas
Enlace	H2, H77, H78, H79, H80, H30, H83, H59, H33, H97
Imagen	H24, H37, H36, H67, H46
Página	H25, H71, H64, H57, H58, H40, H93, H76, H60, H59, H42, H81
Tablas	H39, H63, H43, H73, H51
Estructura	H4, H53, H46, H70
Formulario	H32, H36, H84, H44, H85, H89, H90, H91, H65, H35
Párrafo	H62, H28, H49, H54, H56, H34
Otros	H86, H88, H95, H96

3.1. Diagrama de casos de uso de EvA-Web

Los requisitos de usuario que se abordan en el prototipo de la herramienta EvA-Web se describen a través del modelo de casos de uso (Figura 2). La herramienta está dirigida a desarrolladores de software y pueden ejecutar cinco funciones principales de EvA-Web. En general, el desarrollador de software puede obtener información sobre la guía de accesibilidad implementada, obtener información de las características de la herramienta EvA-Web, así como determinar los enlaces por evaluar del sitio web, seleccionar técnicas de accesibilidad y evaluar el sitio web.

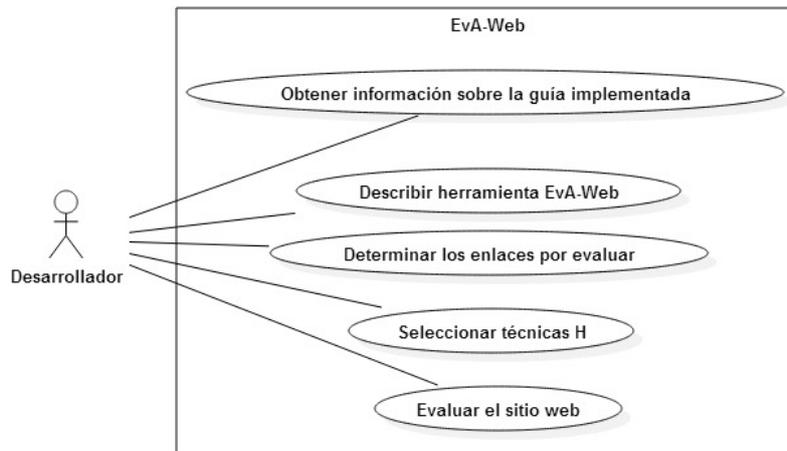


Figura 2: Diagrama de casos de uso de la herramienta EvA-Web.

3.2. Formularios e informes de EvA-Web

La página de inicio de EvA-Web (Figura 3) presenta dos tablas, una de ellas muestra los enlaces para acceder la información de la guía implementada y de la herramienta Eva-Web; y la otra, un formulario en que se introduce el enlace del sitio web que se desea evaluar. Además, el desarrollador de software puede indicar si desea evaluar solo una página, o varias, del sitio web.

Figura 3: Página de inicio de EvA-Web.

En el caso que se evalúe únicamente el enlace que se ha puesto en el formulario, se requiere confirmar la casilla de verificación “Sólo página principal” antes de hacer clic en el botón “Continuar” (Figura 3). EvA-Web presenta los datos de la evaluación: URL de la página web que será evaluada y el identificador de la evaluación. Si el desarrollador decidió evaluar más de una página del sitio web, aparecerá el formulario con los enlaces encontrados por el EvA-Web Crawler (Figura 4). Este es un formulario que, para cada página del sitio web recuperada, presenta una casilla de verificación la cual permite al desarrollador seleccionar varias páginas o todas ellas.

Tras haber seleccionado los enlaces, se eligen las técnicas H por evaluar. Se abre el menú

Datos de la evaluación	
Sitio web	http://148.225.71.8/cc2/
ID Evaluación	D_6_2019_335_12_2_9_51_
Resultados del Eva web Crawler	
Enlaces obtenidos	<input type="button" value="Continuar"/>
<input type="checkbox"/>	Todos los enlaces 24 de Junio
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=980
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=165
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=32
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=26
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=114
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=177
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=358
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=23
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=777
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/?page_id=682
<input type="checkbox"/>	http://148.225.71.8/cc2/

Figura 4: Formulario para la selección de páginas web por evaluar.

de acordeón y se puede elegir una técnica al marcar la casilla de verificación correspondiente. Además, se presentan casillas de verificación para seleccionar categorías enteras o todas las técnicas implementadas en EvA-Web (Figura 5).

Herramienta de evaluación de accesibilidad en línea	
Se usa la guía universal WCAG 2.0	
Datos de la evaluación	
Código de evaluación	T_5_2019_335_12_2_8_38_13
Sitio web	http://148.225.71.8/cc2/
Evaluación automática	
<input type="button" value="Continuar"/>	
<input type="checkbox"/>	Todas las Técnicas
<input type="checkbox"/>	Técnicas para Imágenes
<input type="checkbox"/>	Todas las técnicas para imágenes
<input type="checkbox"/>	(A)H37: Using alt attributes on img elements.
<input type="checkbox"/>	(A)H36: Using alt attributes on images used as submit buttons.
<input type="checkbox"/>	(A)H24: Providing text alternatives for the area elements of image maps.
<input type="checkbox"/>	(A)H45: Using longdesc.
<input type="checkbox"/>	(A)H67: Using null alt text and no title attribute on img elements for images that AT should ignore.
<input type="checkbox"/>	Técnicas para páginas

Figura 5: Menú de acordeón para seleccionar técnicas H.

Después de elegir las técnicas, EvA-Web realiza la evaluación de la accesibilidad del sitio web con las técnicas seleccionadas. Se presenta un menú de acordeón, similar al de la Figura 5, en donde sólo se incluyen las categorías que tienen al menos una técnica evaluada. El desarrollador de software puede hacer clic en alguna de las categorías para generar los informes general y detallado de la evaluación. Por ejemplo, al seleccionar el nombre de la categoría imágenes se presenta un informe general similar al de la Figura 6. El informe contiene la

información de las técnicas evaluadas de la categoría seleccionada (en este ejemplo es la técnica H37 de la categoría Imágenes), la lista de enlaces evaluados, el número de elementos en la página HTML que satisfacen el criterio de la técnica bajo evaluación, la determinación de los elementos que cumplen con los requisitos de la técnicas (advertencia, pasa, no pasa), y el número de renglón en donde se encuentra la etiqueta HTML bajo evaluación. En el caso de la evaluación de conformidad con la técnica H37, advertencia significa que se requiere la intervención humana para validar que la técnica H se implementó correctamente. Es decir, la etiqueta IMG evaluada tiene el atributo ALT con un texto asignado, el cual podría describir el contenido de la imagen. Sin embargo, las herramientas de evaluación de accesibilidad automática no pueden evaluar si dicha descripción es apropiada para la imagen. Por otra parte, la columna denominada “No pasa” presenta los casos encontrados de la etiqueta IMG que no tienen atributo ALT. La columna “Pasa” presenta los resultados de aquellas técnicas H que no requieren la intervención humana. Por tanto, en el caso de la técnica H37 está reportada con el valor cero.

Categoría imágenes, informe resumido

Técnica	Enlace	Elementos	Advertencias	No pasa	Pasa	Renglones
37	http://148.225.71.8/cc2/	10	0	10	0	67 109 112 117 119 124 127 173 174 230
	new_1.php	4	0	4	0	32 32 77 197
	LCC_682.html	1	0	1	0	61
	Unison.html	32	7	25	0	201 209 411 419 427 466 480 494 508 549
	Unison_Marco_normativo.html	14	0	14	0	209 562 565 568 571 574 581 582 583 584
	Unison_Historia_US.html	15	1	14	0	247 464 506 509 512 515 518 525 526 527
	unison_mx_numeralia.html	14	0	14	0	244 529 532 535 538 541 548 549 550 551

Figura 6: Ejemplo de informe resumido para la categoría imágenes de la página web evaluada.

4. Validación de EvA-Web

Para validar el prototipo de la herramienta EvA-Web se realizaron pruebas, en el 2019, para determinar que el prototipo identifica correctamente las técnicas H implementadas. En la primera etapa de la validación, el propósito fue determinar que las técnicas H implementadas en EvA-Web identificaran correctamente los elementos de HTML correspondientes. Para verificar el resultado, se analizaron siete páginas web distintas y, en total, se identificaron manualmente 6,160 elementos de HTML evaluables. La identificación de estos elementos se basó en los resultados de búsqueda que los navegadores de páginas web ofrecen. Además, se accedió al código de la página HTML, que también proporciona el navegador web, para verificar que la técnica H es aplicable. Por su parte, los resultados de EvA-Web son consistentes

con la evaluación manual en cada una de las ocho las categorías evaluadas (mencionadas en la Tabla 2).

En la segunda etapa de la validación, se compararon los resultados de la evaluación de accesibilidad del prototipo EvA-Web con herramientas de accesibilidad en línea, Cynthia Says y Taw. La selección de estas herramientas se debe a que los reportes indican el número de línea del código de la página HTML en donde aparece la inconsistencia con la técnica H evaluada. Para realizar esta actividad, se evaluó otra página web, elegida arbitrariamente, también de la Universidad de Sonora. Ésta corresponde al sitio web de la División de Ciencias Exactas y Naturales (<https://dcen.unison.mx/>). Se evaluaron únicamente las técnicas H del nivel A de la WCAG 2.0 (W3C Working Group, 2008) dado que en este nivel se abordan las barreras más comunes a la accesibilidad.

Los resultados parciales de la evaluación se presentan en la Tabla 3. Las celdas de la tabla muestran el número de elementos que se encontraron para cada una de las técnicas H, según la herramienta de evaluación de accesibilidad utilizada. En cuanto a los resultados de Cynthia Says, esta herramienta no encuentra elementos HTML para evaluar la técnica H44, la cual requiere que se use la etiqueta “label” para cada uno de los elementos que conforman al formulario.

Tabla 3: Hallazgos de accesibilidad encontrados por las herramientas EvA-Web, Cynthia Says y Taw.

Técnica	EvA-Web	Cynthia Says	Taw
H02	12	2	1
H37	12	12	4
H24	0	0	No determinado
H35	0	0	No determinado
H33	0	0	No determinado
H36	0	0	No determinado
H44	1	No encuentra	1
H45	0	0	No determinado
H46	0	0	No determinado
H53	0	0	No determinado

Las diferencias observadas en los resultados (Tabla 3) se pueden explicar por la forma en que están implementadas las técnicas de evaluación de la accesibilidad y el soporte a distintos lenguajes para el desarrollo de sitios web. De hecho, las comparaciones entre herramientas de evaluación de accesibilidad reportan un amplio rango de variación en cuanto a la salidas incorrectas de herramientas, donde algunas alcanzan alrededor del 30 % de salidas erróneas (Vigo et al., 2013) o violaciones a la accesibilidad no detectadas porque las herramientas pasan por alto la implementación de técnicas que puedan determinar el grado de implementación de los criterios de éxito, y en promedio sólo se alcanza una cobertura del 50 % de ellos

(Vigo et al., 2013). Mientras no existan métodos robustos para evaluar la efectividad de estas herramientas se recomienda que el experto en accesibilidad use varias herramientas, dado que algunas de ellas son más efectivas cuando se analizan principios de accesibilidad específicos (Vigo et al., 2013).

Respecto de los resultados que genera EvA-Web, ésta solo revisa el código HTML de la página web y no toma en cuenta el código escrito en lenguaje CSS, JavaScript, entre otros. Esta restricción de capacidad podría explicar las diferencias entre resultados observados. En particular, de las 32 técnicas evaluadas por EvA-Web, Cynthia Says reporta el mismo resultado en 25 de ellas (78 %). Mientras que en el caso de Taw, de las diez técnicas H nivel A que reporta, solo seis muestran el mismo resultado que EvA-Web (60 %). De hecho, el número de técnicas H que reporta Taw para el nivel A de accesibilidad está por debajo del número de técnicas implementadas en EvA-Web. Por tanto, podemos señalar que los resultados de EvA-Web son consistentes con los resultados de la comparación de herramientas (Vigo et al., 2013) y que existen oportunidades para mejorar el prototipo de la herramienta EvA-Web en términos de efectividad.

En el caso concreto de las diferencias en el reporte de Cynthia Says con respecto de EvA-Web, éstas se presentan en las técnicas: H02, H44, H67, H42, H30 y H65. En el caso de Taw, las diferencias se presentan en las técnicas: H02, H37 y H30. Para entender la diferencia en la aplicación de estas técnicas, se revisó por separado la forma en que cada herramienta de evaluación de accesibilidad determina la aplicación correcta de las recomendaciones. Como ejemplo, presentamos el análisis de la técnica H37.

La técnica H37 trata de mejorar la percepción de los contenidos no textuales: “Cuando una imagen contiene palabras que son importantes para comprender el contenido, el texto alternativo debe incluir esas palabras. Esto permitirá que el texto alternativo juegue la misma función en la página que la imagen” (W3C Working Group, 2012).

Para probar esta técnica (H37), el código HTML de cada etiqueta IMG debe tener el atributo ALT. En el análisis manual de la página bajo estudio, se encontraron doce etiquetas IMG. De éstas, ocho tienen atributo ALT con texto o cadena vacía. Por su parte, la evaluación de Cynthia Says, reporta las doce etiquetas IMG. Además, el reporte indica que cuatro etiquetas no cumplen con la técnica H37. Este resultado es consistente con la evaluación manual. También reporta que seis de esas etiquetas deben ser revisadas manualmente porque el atributo ALT está vacío. Sin embargo, reporta dos casos que corresponden a la técnica H02 en donde la etiqueta IMG debería ser evaluada en el contexto de la etiqueta de enlace (`< a > ... < img > ... < /a >`) que la contiene.

En el caso de la herramienta Taw, ésta da como resultado cuatro incidencias de errores en el uso de la etiqueta IMG con la técnica H37 porque no contienen el atributo ALT. Por su parte, EvA-Web detecta las doce etiquetas IMG. Al igual que Taw, EvA-Web reporta cuatro casos en donde la técnica no pasa (etiquetas en las líneas 145, 434, 345, 456). Los restantes son advertencias ya que tienen el atributo ALT y el desarrollador debe verificar manualmente su contenido en las líneas de código: 281, 290, 313, 316, 319, 322, 325 y 328.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentaron los resultados de implementar una herramienta de evaluación de accesibilidad que llamamos EvA-Web. El propósito de esta herramienta es identificar los sitios web que hayan implementado las recomendaciones de la WCAG 2.0 en el nivel A. Particularmente, se implementaron las técnicas H para el lenguaje HTML 5.0. Para diseñar la herramienta, se estudió la guía WCAG 2.0 y las técnicas H fueron categorizadas en tablas, formularios, páginas, párrafos, enlaces, estructura, imágenes y otros, para facilitarle al desarrollador de software la selección de las técnicas que le interese evaluar. Además, se desarrolló un *web crawler* para obtener varios enlaces del sitio web y evaluarlos en un solo paso.

Basándose en los resultados de otras herramientas de evaluación de accesibilidad y las recomendaciones de la literatura, se creó la herramienta con un informe de resultados que identifica con claridad la técnica H evaluada, el número de línea en donde aparece el código de la etiqueta evaluada, y el valor de la evaluación automática cuando ésta es posible. Además, el desarrollador de software trabaja con un conjunto muy pequeño de interfaces de usuario con el mínimo de datos de entrada. A diferencia de otras herramientas disponibles en línea de forma gratuita, este prototipo permite la evaluación de todas las páginas del sitio web y genera informes en archivos HTML. La herramienta está disponible en español con la intención de que la comunidad de desarrolladores hispanohablantes disponga de otro instrumento para evaluar la accesibilidad.

Como trabajo futuro se tomarán en cuenta las capacidades que tienen las herramientas evaluadas para mejorar el prototipo EvA-Web. Algunas herramientas tienen implementado una opción de corrección de la anomalía encontrada. Además, es importante proporcionar al desarrollador de software mecanismos que le permitan verificar que la técnica H se implementó apropiadamente. El diseño de estas dos características requiere de la comunicación con los desarrolladores de sitios web para conocer las prácticas que aplican para liberar sitios web accesibles. Además, la construcción del prototipo de EvA-Web está conceptualizado en el contexto de un proyecto mayor, en donde la herramienta se podría convertir en un componente principal en el diagnóstico de barreras de accesibilidad, como apoyo a la introducción de un proceso de mejora de la calidad de los sitios y aplicaciones web.

A futuro se estudiarán e implementarán otras técnicas de la WCAG 2.0 orientadas a tecnologías como CSS o JavaScript. Finalmente, el desarrollo de una herramienta robusta para la evaluación de la accesibilidad puede servir para que las empresas, y otras organizaciones, analicen la accesibilidad de sus sitios web y verifiquen si sus contenidos están llegando a todos sus usuarios.

Referencias

- Acosta, T., Acosta-Vargas, P., and Luján-Mora, S. (2018). Accessibility of eGovernment Services in Latin America. In *2018 International Conference on eDemocracy & eGovernment (ICEDEG)*, pages 67–74. IEEE.
- Agangiba, M. and Kabanda, S. (2017). Research foci, methodologies, and theories used in addressing E-government accessibility for persons with disabilities in developing countries. *Interdisciplinary Journal of Information, Knowledge, and Management*, 12:245–268.
- Henry, S. L. and McGee, L. (2018). Accessibility. <https://www.w3.org/standards/webdesign/accessibility>. Consultado el 10 de agosto de 2018.
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (México) (2016). La discapacidad en México, datos al 2014. http://conadis.gob.mx/gob.mx/transparencia/transparencia_focalizada/La_Discapacidad_en_Mexico_datos_2014.pdf. Consultado el 10 de agosto de 2018.
- Laitano, M. I. (2015). Accesibilidad web en el espacio universitario público argentino. *Revista española de documentación científica*, 38(1):e079–e079.
- Power, C., Freire, A., Petrie, H., and Swallow, D. (2012). Guidelines are only half of the story: accessibility problems encountered by blind users on the web. In *Proceedings of the SIGCHI conference on human factors in computing systems*, pages 433–442.
- Vigo, M., Brown, J., and Conway, V. (2013). Benchmarking web accessibility evaluation tools: measuring the harm of sole reliance on automated tests. In *Proceedings of the 10th International Cross-Disciplinary Conference on Web Accessibility*, pages 1–10.
- W3C Working Group (2008). Web Content Accessibility Guidelines (WCAG) 2.0. <https://www.w3.org/TR/WCAG20/>. Consultado el 10 de agosto de 2018.
- W3C Working Group (2012). HTML and XHTML Techniques for WCAG 2.0. <https://www.w3.org/TR/WCAG20-TECHS/html.html>. Consultado el 23 de noviembre de 2019.
- W3C Working Group (2016). Techniques for WCAG 2.0: Techniques and Failures for Web Content Accessibility Guidelines 2.0. <https://www.w3.org/TR/WCAG20-TECHS/>. Consultado el 10 de agosto de 2018.
- W3C Working Group (2018). Web Accessibility Initiative (WAI). Introduction to web accessibility. <https://www.w3.org/WAI/fundamentals/accessibility-intro/>. Consultado el 10 de agosto de 2018.
- World Health Organization (2011). World Report on Disability. http://www.who.int/disabilities/world_report/2011/report.pdf. Consultado el 10 de agosto de 2018.