Número especial

30 ANIVERSARIO DEL PMME

SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS, volumen 5, número 1, abril 2021 - septiembre 2021, es una publicación semestral, editada por la Universidad de Sonora, a través del Departamento de Matemáticas. Blvd. Luis Encinas y Rosales S/N, colonia Centro, Hermosillo, Sonora, México. C.P. 83000. Tel. (662) 2592155. Página web: sahuarus.unison.mx. Correo electrónico: sahuarus@unison.mx. Editor responsable: Misael Avendaño Camacho. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. **04-2017-062817342200-203**, e-ISSN: 2448-5365, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Índice General

Evolución del Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora. Una mirada inicial con base en el análisis de tesis de sus egresados
Silvia Elena Ibarra Olmos & Agustín Grijalva Monteverde . . . . 1 - 15

Análisis del razonamiento de estudiantes de bachillerato frente a una tarea introductoria al contraste de hipótesis
Eleazar Silvestre Castro & Manuel Alfredo Urrea Bernal . . . . 16 - 34

Construcción de función como relación entre magnitudes variables: diseño de enseñanza desde la Teoría de APOE
César Fabián Romero Félix & Román Gpe Esquer Armenta . . . . 35 - 49

Pensamiento geométrico: una experiencia de trabajo con profesores de matemáticas de secundaria
María Antonieta Rodríguez Ibarra & Gisela Montiel Espinosa . . . . . . 50 - 63

Cardiología, Matemáticas y Matemática Educativa: Una base de significados para la angularidad
Angelica Moreno Durazo . . . . 81 - 93

Reflexiones en torno al diseño de una propuesta formativa sobre variación lineal orientada a futuros profesores de secundaria
María Teresa Dávila Araiza & Karina Jaquelin Herrera Garcia . . . . . . 94 - 111

Intervención didáctica para el aprendizaje de números complejos en modalidad virtual
Daniela Romero Robles, Mario Alberto Quiñonez Ayala & Ana Guadalupe del Castillo Bojorquez . . . . 112 - 126

Evaluación de conocimientos geométricos en futuros docentes de matemáticas
Mario Alberto Quiñonez Ayala . . . . 127 - 142

Un recorrido por nuestra experiencia en la inclusión de software dinámico en el diseño de materiales didácticos
José Luis Soto Munguía & César Fabián Romero Félix . . . . 143 - 159

Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp. 1-15
SahuarUS

Evolución del Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora. Una mirada preliminar con base en el análisis de tesis de sus egresados

Silvia Elena Ibarra Olmos[1], Agustín Grijalva Monteverde[2]
e-mail: silvia.[1]ibarra@unison.mx, [2]agustin.grijalva@unison.mx
Universidad de Sonora

Resumen

Se presentan algunos datos sobre las tesis elaboradas por egresados de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora, estableciendo, a partir su análisis, algunas consideraciones sobre el proceso de evolución de este posgrado. La información obtenida se organizó atendiendo las siguientes categorías: Área matemática de interés, Líneas de desarrollo, Nivel educativo, Profesores, estudiantes o currículo, Aspectos de género. En cada una de estas categorías se muestra la evolución del posgrado y de la disciplina misma, y aunque no es el único recurso del cual se pudiera disponer para este estudio, en las tesis es posible destacar los resultados teóricos generados por la disciplina que paulatinamente se han ido incorporando en el trabajo del posgrado. Además, un análisis como el que aquí se muestra, permite visualizar, entre otros elementos, el nacimiento, la evolución y el fortalecimiento, a lo largo del tiempo, de las líneas de generación y aplicación del conocimiento que actualmente se cultivan.

Palabras clave: Maestría Matemática Educativa, Análisis de tesis, Líneas de generación y aplicación del conocimiento

Recibido 7 de febrero de 2021
Aceptado 14 de abril de 2021

Introducción

El Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa (PMME) de la Universidad de Sonora, fue aprobado por el Consejo Universitario de esta Institución en 1985; sin embargo, por diversas circunstancias, inició su funcionamiento hasta el 12 de octubre de 1990. Esta última fecha indica que el posgrado llegó a sus treinta años de actividades ininterrumpidas el pasado 12 de octubre de 2020.

En un periodo de tal dimensión es natural considerar que el PMME ha sufrido una serie de modificaciones motivadas por diversas circunstancias, algunas de ellas de naturaleza interna, otras por demandas institucionales, y otras más debidas a los cambios propios de la disciplina que se cultiva en esta comunidad, Matemática Educativa.

En este contexto, se plantea realizar un acercamiento al proceso de evolución del PMME en estos treinta años, compartiendo que "…estudiar lo que produce una comunidad, es una forma de aproximarse al conocimiento de lo que está sucediendo dentro de la misma." (Fuentes, 2013).

La frase "lo que produce una comunidad" puede interpretarse desde diferentes ámbitos; por ejemplo, podrían considerarse los artículos publicados por estudiantes y profesores, las ponencias presentadas en eventos académicos, los materiales que son empleados en el desarrollo de los diferentes cursos, las tesis de los egresados, por citar algunos ejemplos.

En este estudio se decidió tomar como material base de análisis las tesis elaboradas por los egresados, por considerar que son una de las producciones que incorpora y refleja muchos elementos importantes de la vida académica del posgrado y de su evolución. El periodo de análisis son los poco más de treinta años transcurridos desde el 12 de octubre de 1990 hasta el 31 de diciembre de 2020, que cubre a la totalidad de las tesis presentadas por sus egresados.

En estos términos, interesa dar respuesta a las preguntas siguientes:

a) ¿Qué elementos presentes en las tesis de los egresados del PMME permanecen a lo largo del tiempo?
b) ¿Cuáles son las temáticas más abordadas?
c) ¿Cuáles son las áreas de la matemática mayoritariamente estudiadas?
d) ¿Cuáles son los enfoques teóricos que con mayor frecuencia son empleados?

1 Revisión de literatura

La revisión de la literatura de la especialidad, sobre acercamientos a este tipo de estudios, da cuenta de una serie de producciones donde el propósito central ha sido la caracterización, como se señalaba en el apartado introductorio, de diferentes comunidades que cultivan la matemática educativa desde la perspectiva del análisis de lo que por ellas ha sido producido. Por ejemplo, Ávila (2016), se interesa por conocer el estado que guarda la investigación en educación matemática realizada en México en un lapso de 40 años. Declara que su trabajo "constituye una síntesis personal de los tres recuentos de la investigación conocidos en México como *Estados del conocimiento en educación matemática*, (Ávila, 2016).

A partir de la revisión de artículos de investigación, tesis, inclusive algunos libros de texto y algunas propuestas curriculares, muestra cómo, desde su perspectiva, ha ido evolucionando la investigación en ese campo de conocimiento; las categorías que usa para su análisis son la identificación de objetivos, metodologías empleadas, marcos referenciales, presentando sus datos y comentarios organizados por niveles educativos. Entre sus reflexiones finales, destaca que "a pesar del gran dinamismo de la comunidad de investigadores de la educación matemática y la relevancia de muchas de sus producciones, los alumnos en nuestras escuelas siguen aprendiendo muy pocas matemáticas", (Ávila, 2018).

Por su parte, Fuentes y Sánchez (2015), dan a conocer los resultados de un estudio documental, en el cual, a partir de la revisión de la productividad de los educadores matemáticos publicada en los números 16 al 25 en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (ALME), responden los cuestionamientos siguientes:

a) ¿Cuál es el volumen de la productividad de la región centroamericana en cuanto a trabajos publicados en el ALME?; b) ¿Cuáles son las características principales de sus trabajos que son reportados en el ALME?

Entre sus resultados destacan lo limitado de la producción académica de la comunidad centroamericana de matemática educativa, siendo los temas más abordados la formación de profesores, el uso de tecnología avanzada, el diseño de propuestas para la enseñanza, y la resolución de problemas; en sentido contrario, es decir, como el tema menos abordado aparece el de la evaluación del aprendizaje. Entre otros aspectos señalan también que la mayor parte de los artículos revisados fueron presentados de manera individual, lo que podría sugerir la ausencia de colaboraciones entre investigadores de distintas instituciones o naciones, y, en consecuencia, ser una posible causa de la baja productividad académica de los investigadores radicados en países centroamericanos, al menos en ALME.

Más cercanos a la línea que se plantea en este reporte, por lo menos en cuanto a los materiales examinados, se encuentran Hernández y Jacobo (2011), quienes realizaron una investigación en la cual analizaron 31 tesis elaboradas por egresados de un programa de maestría en educación matemática. La pregunta de investigación que guio su trabajo es "¿cuál fue el marco teórico y los instrumentos metodológicos que tomaron los estudiantes de la maestría en educación matemática para realizar sus propuestas de intervención pedagógica en las tesis de grado?", (Hernández y Jacobo, 2011).

Para encontrar respuestas a estos planteamientos, definieron algunos indicadores que les permitieron evaluar a las tesis: la orientación que siguieron, los ejes temáticos, los marcos teóricos, así como los instrumentos metodológicos y los autores que fueron referenciados con mayor frecuencia por los egresados.

A partir del análisis de esta información, los investigadores mencionados declaran "inferimos la visión que los egresados tienen de la educación matemática, su papel como docentes y los conocimientos que les han dejado los distintos cursos para su desarrollo profesional" (Hernández y Jacobo, 2011), expresando grandes preocupaciones debido a que encuentran que en las tesis del programa académico analizado, al ser disciplinar (educación matemática), debieron prevalecer los fundamentos teóricos provenientes de los investigadores en educación matemática para interpretar los datos. Añadiendo a lo anterior que:

> "La preocupación se hizo alarmante cuando en ninguna de las tesis aparecieron los investigadores educativos matemáticos que hacen investigación actualmente, como lo son: Battista, Clements, Kammi, Ball, Cobb, D´Ubiratan, Carpenter, Fennema, Ernest, Llinares, Sfard, Shaughnessy y Jaworski, entre otros, lo que hace ver una investigación con un marco teórico local débil. Otro elemento preocupante fue la presencia exclusiva de instrumentos de corte empírico para medir resultados, el empirismo es un elemento predominante en las tesis sobre educación matemática, no es que sea una visión equivocada, sino que se dejan de explorar otros instrumentos como son los instrumentos de corte histórico, los elementos narrativos, las narraciones autobiográficas, los trabajos sobre buenas experiencias docentes que bajo el amparo de la Investigación-Acción se han documentado. Y no sólo explicar la actividad matemática desde el Empirismo que ha hecho que los fenómenos educativos se expliquen desde la relación lineal causa-efecto (Boaler,2002; y Schoenfeld, 2007)" (Hernández y Jacobo, 2011, p. 133).

Con una metodología de corte bibliométrico, Pacheco, Martínez y González, (2018), reportan una indagación en los trabajos de grado de la Maestría en Educación Matemática (TgMeM), aprobados en la Universidad de Carabobo, Venezuela durante el período 2003-2014. Estos autores analizaron resúmenes y referencias de 133 tesis elaboradas por egresados de ese programa académico, con lo cual llegaron a establecer:

> "…la productividad en el tiempo y por género, así como otros indicadores metodológicos, conceptuales y de citación" … Entre las conclusiones destaca lo útil que resulta realizar estudios sobre la producción científica de determinadas instancias a fin de dar cuenta del aporte que han hechos los investigadores, destacando que en este periodo predominó la producción del género femenino, la modalidad proyecto factible y el uso del paradigma positivista. El nivel más estudiado fue el de Educación Media (General) y la temática más investigada fue la Geometría. Ausubel es el teórico más usado seguido de Piaget, Vigotski, Bruner y Gagné, destacando, además, que Piaget es el autor de libros más citado". (Pacheco, Martínez y González, 2018, p.59).

2 Consideraciones previas y de método

2.1 Consideraciones previas

Estudiar la producción de las comunidades académicas universitarias ha sido, desde siempre, uno de los recursos empleados para "medir" el grado de desarrollo de las mismas, así como un criterio utilizado para emitir una calificación acerca de la calidad de las actividades que desarrollan los integrantes de las distintas comunidades que conforman a las diferentes instituciones universitarias. En el caso particular de los posgrados, estos ejercicios de valoración están ligados a los reconocimientos individuales y de grupo otorgados por organismos como el Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP), la pertenencia al Programa Nacional de Posgrados de Calidad o los programas de estímulos al desempeño docente.

En el caso que se reporta, no se centra el interés en la determinación de los indicadores tradicionales y su impacto, toda vez que no se pretende hacer un ejercicio de evaluación externa. Lo que se está planteando es la realización de un ejercicio de introspección tomando como eje rector trabajos de tesis de egresados del PMME; introspección en el sentido del interés por reflexionar qué se ha venido haciendo en un programa de posgrado como éste, que transitó de su concepción original como posgrado de investigación a declararse desde 2005 como un posgrado de orientación profesional.

Este auto reconocimiento como posgrado de orientación profesional, partió de la reflexión conjunta sobre la naturaleza de las actividades académicas que mayoritariamente se habían venido realizando, y se concretó formalmente en el Plan de Estudios del PMME aprobado en 2015, vigente a la fecha. En este documento se declara:

> "Esta tendencia en las acciones realizadas por la planta académica abre la posibilidad de dar un giro hacia un programa que se asuma como "posgrado de modalidad profesional", con la expectativa de formar personal altamente especializado para el diseño e implementación de actividades que hemos denominado de "intervención en educación matemática", para referirnos a la formulación de propuestas didácticas que incidan en la modificación de las prácticas docentes de los profesores de matemáticas, doten a los estudiantes de mejores materiales para su aprendizaje y potencien el uso de nuevas tecnologías, por citar algunas de las posibilidades de intervención.
> Los trabajos terminales de tesis de los estudiantes se encaminarán, consecuentemente, a realizarse con base en productos de intervención en educación matemática fundamentados sólidamente en la Matemática Educativa. Esto es, se centrarán en la elaboración de materiales y recursos que deberán someterse a puestas en escena para mejorarlos y superar las deficiencias detectadas. Sin embargo, en caso de encontrar hallazgos trascendentes para la disciplina o para marcar directrices en la realización de algún tipo de actividades propias de la misma, podrán someterse a un escrupuloso proceso de validación, metodológicamente adecuado." (Plan de Estudios del Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, 2015, p.7)

Puesto que en el Plan de Estudios aludido se hace mención a que éste gira alrededor de la elaboración del trabajo terminal, este último se constituye en la evidencia fundamental de la formación obtenida por un egresado, y contribuye de manera ineludible a proporcionar información sobre el alcance del objetivo general del posgrado, que es: "Formar personal altamente capacitado para elaborar, conducir y evaluar proyectos profesionales en Matemática Educativa", (Plan de Estudios del Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, 2015, p.48).

Por lo anteriormente expuesto, se considera que las tesis de los egresados son un elemento importante para ser considerado como punto de partida en este ejercicio de análisis del desarrollo y evolución del PMME.

2.2 El método

Las acciones que se planearon para responder a las preguntas enunciadas en la sección Introducción, consistieron básicamente en una revisión de información disponible sobre las tesis elaboradas por los egresados del Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora. Esta información provino de diversas fuentes y consistió en:

a) Número y relación de egresados del posgrado desde 1990 a 2020.
b) Número y relación de egresados del PMME, titulados en el periodo mencionado en el inciso a), junto con los títulos de sus tesis y fechas de titulación.
c) Revisión de tesis disponibles.
Las fuentes de donde fueron obtenidos los datos son:
a) La Dirección de Servicios Escolares de la Institución.

b) Documentos de trabajo internos, originalmente elaborados por la Coordinación del PMME para la evaluación del Programa Nacional de Posgrados de Calidad del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología realizada en 2018, los cuales fueron complementados con información pública, generada durante 2019-2020.
d) Tesis de egresados, publicadas en el Repositorio Institucional de la Universidad de Sonora, (http://repositorioinstitucional.uson.mx/handle/unison/4/discover?query=Matem%C3%A1tica+Educativa&submit=), complementadas con tesis de egresados existentes en los archivos personales de los autores de este artículo, derivados de sus participaciones como directores de tesis y/o como integrantes de jurados de exámenes de grado.
Cabe hacer la aclaración de que en el Repositorio Institucional no se encuentra la totalidad de las versiones electrónicas de las tesis de los egresados del PMME, debido, por un lado, a que es una base de datos de reciente creación por la Universidad de Sonora. De todas formas, búsquedas previas a la actual, ésta última limitada por el nulo acceso a los archivos físicos institucionales originado por la situación de pandemia que desde inicios del 2020 sufre la población, arrojaron faltantes en los respaldos físicos que obligatoriamente se deben hacer en la Biblioteca de la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Unidad Regional Centro, sitio donde se deben resguardar tanto los ejemplares físicos como los electrónicos. Cabe hacer la aclaración de que no se pudo determinar cuántas son las tesis que se encuentran resguardadas.

De tal forma que las tesis con acceso a revisión fueron 49 disponibles en el repositorio digital, más 15 provenientes de los archivos personales, que conforman un total de 64 tesis. Con dicho número apenas se arribó al 51%% de las 125 tesis que a la fecha han sido defendidas.

El registro y organización de los datos se realizó mediante tablas elaboradas originalmente en un procesador de texto, en hojas electrónicas de cálculo, así como en gráficas obtenidas a partir del uso de estos recursos digitales. El análisis tuvo dos vertientes: a) la cuantitativa, que proporcionó un primer nivel de análisis y condujo a un tipo de discusión; b) la cualitativa, que dirigió la discusión a otro nivel de análisis. En su conjunto fueron la base para la elaboración de las reflexiones finales.

3. Información obtenida y su discusión

Algunos datos importantes de inicio son los mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1. Relación de egresados y titulados en el PMME

Egresados	Titulados
202	125

Aproximadamente el 62% de los egresados se han titulado. Las causas por las cuales el 48 % restante no lo ha hecho no están definidas. Aunque el porcentaje de titulación es mayor al 50%, es una tarea pendiente del posgrado aumentarlo, pues el proceso de formación de un egresado concluye hasta que defiende su tesis y en consecuencia obtiene el título correspondiente.

La clasificación de los trabajos de tesis puede hacerse con base en diversos criterios que resultan de interés para analizar la evolución del posgrado. Entre las categorías de análisis que proporcionan elementos para este fin, están las siguientes:

a) El área matemática en que se ubica la tesis.

b) El nivel educativo en que se realiza.

c) El sector al que se dirige la atención.

d) El uso y tipo de tecnología que se emplea,

e) El soporte teórico empleado.

f) Clasificación de la tesis como de investigación o de elaboración de propuestas para la intervención en algún sector educativo (sin ser excluyentes).

En las secciones siguientes se muestran los agrupamientos que se realizaron, tomado como base algunas de estas características, proporcionando con ello una primera visión panorámica de la producción generada en el posgrado por los egresados, bajo la conducción y dirección de los profesores.

3.1 Área matemática de interés

Iniciamos con el caso de las áreas matemáticas en las cuales se han elaborado las tesis, los cuales se presentan a continuación, señalando cuántas tesis se han elaborado en cada área:

Álgebra 39, Cálculo 35, Geometría y trigonometría 15, Probabilidad 2, Estadística 13, Ecuaciones Diferenciales 2, Aritmética 5, Análisis numérico 1, Sin declaración, Mat-Otras áreas del conocimiento 2, y Pensamiento Numérico 1.

Una forma resumida se presentar la información anterior, con la agrupación de algunas de esas áreas como "otras", se visualiza en la Figura 1, señalando el porcentaje de tratamiento en cada área matemática considerada.

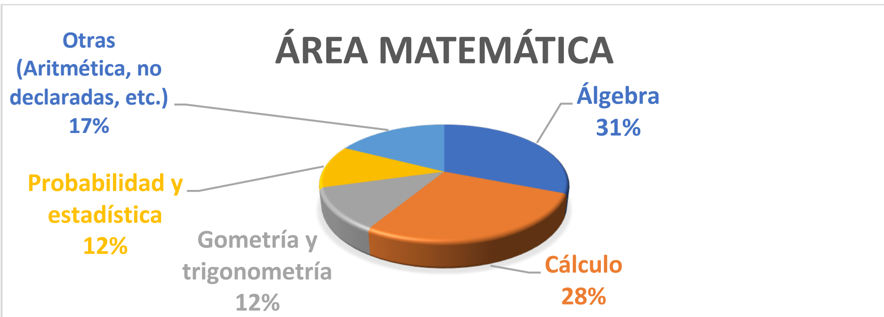


Figura 1. Distribución de las áreas matemáticas de las tesis elaboradas en el PMME

Como puede observarse, las tesis se agrupan mayoritariamente en álgebra y cálculo, geometría y procesos estocásticos (fundamentalmente en estadística), existiendo también una importante cantidad agrupada en "Otras". En esta última categoría se conjuntaron tesis en aritmética, ecuaciones diferenciales, análisis numérico, propuestas integradoras o indiferentes respecto a un área específica, las cuales por separado representan porcentajes muy pequeños.

En las tesis de los primeros años de existencia del posgrado, entre 1990 y 2002, existe un claro predominio del trabajo en las áreas de álgebra y cálculo, con la presencia de estudios sobre estadística, pero de forma notoria no se encuentran trabajos en el área de geometría y trigonometría. Así, desde febrero de 1995 en que se presentó la primera tesis, transcurrieron más de 8 años, hasta julio de 2003, en la cual se presentó una tesis que abordó el tratamiento del seno como razón trigonométrica y como función, en una versión híbrida entre cálculo y trigonometría. La primera tesis de geometría, con estudio de isometrías y simetrías, se presentó en mayo del año 2004.

A partir de esos momentos, aunque el predominio sigue siendo claramente los estudios en álgebra y cálculo, es notorio el incremento de otras temáticas como estadística, geometría y trigonometría, pero también el tratamiento de áreas menos frecuentes como ecuaciones diferenciales, análisis numérico, tratamientos aritméticos, por señalar algunos.

Aunque las áreas matemáticas de los trabajos de tesis se ubican mayoritariamente en los campos matemáticos más tradicionales y, particularmente, en los currículos matemáticos en los diferentes niveles educativos, debe rescatarse que los esfuerzos se han venido diversificando y con más frecuencia que antes el interés se ubica en el estudio de aspectos como “variación”, “pensamiento algebraico”, “pensamiento geométrico”, “evaluación”, “desarrollo de competencias”, “prácticas docentes”, con lo cual se establecen paulatinamente otras formas de organizar el trabajo desarrollado por los directores de tesis y los estudiantes del posgrado.

3.2 Líneas de desarrollo

También debe mencionarse que, desde un inicio, los trabajos de tesis incorporan transversalmente algunas líneas de desarrollo del trabajo académico, independientemente de las áreas matemáticas de interés. Particularmente, es notoria la incorporación de estudios y/o diseños en los que las líneas de desarrollo aparecen de forma accesoria o adjunta, y en otras, en cambio, constituyen el objeto central de atención, como el uso de los recursos tecnológicos, el papel de los problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como la problemática del diseño curricular o la ubicación contextual de las propuestas didácticas diseñadas, dentro de planteamientos curriculares en funcionamiento.

Con respecto a estas líneas de desarrollo, es posible observar que paulatinamente se fueron asumiendo como centrales e inherentes al trabajo realizado en las tesis y son transversales a muchos de los estudios y diseños propuestos, dando cuenta de la evolución tanto del posgrado como de la disciplina y de los sistemas educativos mismos.

Al interior de cada una de estas líneas transversales es posible observar también esta evolución y, por ejemplo, en el uso de los recursos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en las primeras tesis encontramos trabajos desarrollados con el uso de calculadoras, otros con recursos computacionales basados en software usado preferentemente en cada época, explotando también herramientas como las hojas de cálculo y paquetes de graficación, uso de redes y, en la actualidad, la incorporación prioritaria de software de matemática dinámica en casi todas las áreas matemáticas, niveles educativos o población de interés (profesores o estudiantes). Debe señalarse, sin embargo, que existen diversos énfasis que dan muestra de que en algunos casos el uso de una línea transversal aparece como apoyo y en otras continúa apareciendo como de interés primordial. Por ejemplo, es posible que en un trabajo de tesis exista interés en el estudio de la variación y el mecanismo para simular fenómenos variables sea un software de matemática dinámica, en tanto que en otros estudios el interés central es el papel del software, en el que se usan situaciones en las que los fenómenos de variación son analizados.

Similarmente en las otras líneas encontramos dicha evolución. Sucintamente, por ejemplo, en los planteamientos curriculares de los primeros trabajos se incorporan elementos generales del constructivismo, como sucedía en los currículos escolares, después se incorporaron aspectos como el desarrollo de “habilidades matemáticas” y posteriormente se incorporaron elementos de las llamadas competencias, tanto generales como disciplinares o específicas.

Por otra parte, en el caso del papel de los problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las tesis incorporan elementos de los planteamientos de Polya, del desarrollo de la teoría de la enseñanza problémica propia de la escuela soviética y de los estudios de Schoenfeld y de Santos Trigo, hasta la incorporación generalizada de las “situaciones problema”, consideradas en muchos marcos teóricos vigentes. Existen también situaciones en las que es difícil señalar cuál es el interés central del trabajo y las intersecciones son múltiples. De cualquier forma, paulatinamente los profesores fueron delineando en sus direcciones de tesis las líneas de desarrollo en las que se interesaban mayormente y en organismos como la Academia de Matemática Educativa o los cuerpos académicos que han existido se plasmaron como las Líneas de Generación y Aplicación del Conocimiento (LGAC).

En un principio las LGAC ponían de manifiesto el interés individual de los profesores del posgrado, aunque no se desarrollara mucho trabajo en ellas. Existían algunas como “Desarrollo histórico-crítico de las ideas matemáticas” y “Desarrollo de sistemas en línea para la enseñanza de las matemáticas”, de las que se hicieron escasos trabajos y existían otras que se asumieron como primordiales para el diseño de actividades didácticas sin necesidad de profundizar en su estudio, como “El papel de los problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas”, por lo que consecuentemente resultaban transversales a muchas tesis en las que el interés central era otro.

Caso diferente lo tenemos en otro tipo de tesis en los que algunas líneas de desarrollo aparecen esbozadas dentro de planteamientos más generales. Así, por ejemplo, en 1995 se presentó una tesis en la que el contexto para el diseño de un libro de texto lo constituye una estrategia para la formación de profesores. Entre 1995 y 2012 se presentaron dos tesis más en las que el interés se sitúa en los profesores y, a partir de 2012 hasta la fecha tenemos 16 trabajo de tesis más que explícitamente señalan su interés en el desarrollo profesional de los docentes, con estudios y propuestas encaminadas a caracterizar y/o proporcionar elementos para la modificación de las prácticas docentes de los profesores de matemáticas.

Consecuentemente, y a reserva de decidir colectivamente las Líneas de Generación y Aplicación del Conocimiento que deben cultivarse en el Programa de Maestría, se reconocen actualmente las siguientes tres, producto de la evolución de la actividad de profesores y estudiantes del posgrado:

- Desarrollo Profesional Docente
- Didáctica de las Matemáticas
- Uso de los Recursos Tecnológicos en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas

Es de notarse que la Línea “Didáctica de las Matemáticas” tiene un carácter demasiado general y en ella se pueden agrupar, con una actitud sumamente flexible, numerosos trabajos que no se corresponden con las Líneas de Generación y Aplicación del Conocimiento reconocidas hoy o en momentos anteriores, como el caso de la resolución de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que se asume como línea transversal en los trabajos de diseño en las tesis. Es de notar, sin embargo, que conforme pasa el tiempo, las tesis en Didáctica de las Matemáticas confluyen hacia lo que se podría advertir como una línea emergente, que podría denominarse Diseño de proyectos de intervención didáctica.

La Figura 2 muestra en general, la atención que se pone a cada una de las Líneas reconocidas en la actualidad en las tesis del PMME.

Figura 2. Distribución de las tesis por LGAC

3.3 Nivel educativo de interés

Indudablemente que el nivel educativo seleccionado para el desarrollo de trabajo de tesis concierne a los intereses de investigación y de interés de desarrollo profesional, las coyunturas del entorno y las líneas de trabajo de los directores de tesis, pero un factor que resulta determinante es la ubicación laboral o experiencia docente de los estudiantes, por lo cual a grandes rasgos es posible afirmar que los porcentajes de trabajos de tesis en un determinado nivel educativo, es una buena aproximación al porcentaje de estudiantes del posgrado que provienen de cada nivel educativo.

En el caso del posgrado tenemos que las tesis se han realizado atendiendo la problemática de los niveles educativos así: superior 54, bachillerato 41, básico 26, posgrado 2 y transversales 2 más, lo cual podemos visualizar (porcentualmente) en la Figura 3:

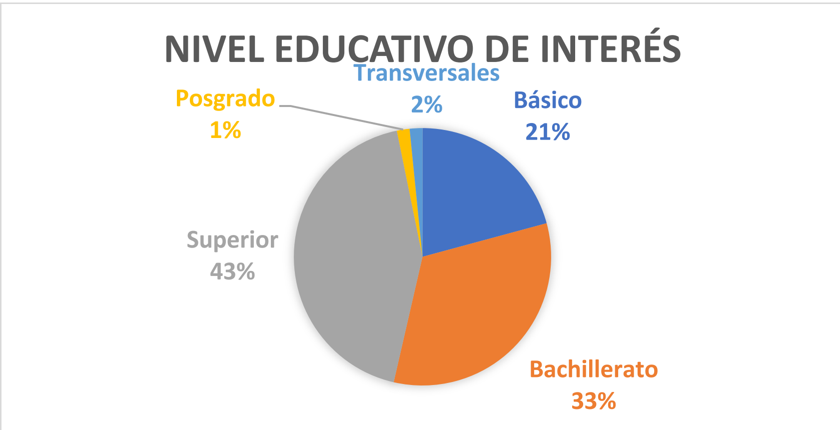


Figura 3. Distribución de las tesis del PMME por nivel educativo

Si tomamos como referencia julio de 2004, fecha en la cual apareció la primera tesis de geometría y trigonometría, completando el cuadro de áreas matemáticas que más se han trabajado, el porcentaje de tesis de nivel superior disminuye a 38.8 % y empieza a subir el porcentaje de tesis de bachillerato.

Esta característica del posgrado tiene su origen en diversos factores, algunos de naturaleza global, nacional, en el sentido de que durante muchos años los estudios de posgrado eran típicos de profesores e investigadores del nivel superior, en donde las exigencias de formación profesional requerían la máxima habilitación escolar y académica.

Por otra parte, a la vez que esta situación se modificaba y la oferta de estudios de posgrado crecía, la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora, incluía a profesores de bachillerato que habían estudiado la Licenciatura de Matemáticas de la propia institución y también se incorporaban profesores de bachillerato que habían realizado estudios dentro del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas.

Así, en general el posgrado centraba sus esfuerzos fundamentales en el medio nivel medio superior y superior, situación que cambió a partir del año 2005 cuando al ingresar por segunda ocasión al PNPC de CONACYT, se abrió la posibilidad de ofrecer becas y se pudo incorporar a profesores egresados de la Normal Superior, de tal manera que la atención de sus trabajos se centró en el nivel básico, principalmente la escuela secundaria. De continuar esta tendencia, es de esperarse que en unos pocos años más la realización de estudios de nivel básico, de bachillerato y nivel superior tienda a ser más equilibrado.

3.4 Profesores, estudiantes o currículo

Tanto en su etapa como posgrado de investigación como de orientación profesional, en una gran cantidad de tesis del PMME se han elaborado actividades didácticas que regularmente se ponen en escena con grupos de interés, en ocasiones con el propósito de profundizar en el conocimiento de una determinada problemática o fenómeno, y otras con la finalidad de tener elementos para mejorar los diseños de las actividades didácticas para presentar versiones mejoradas que contribuyan al tratamiento en el aula de un determinado tema de enseñanza y/o aprendizaje.

Como es natural, el principal punto de atención son los estudiantes y en muchas ocasiones se trata de tesis que abordan problemáticas que forman parte de los intereses directos de los tesistas como profesores en un nivel educativo específico.

A grandes rasgos, las tesis se han dirigido de la siguiente manera: a estudiantes 88, a profesores 30 y a planteamientos curriculares 7, cuyos porcentajes correspondientes se muestran en la Figura 4.

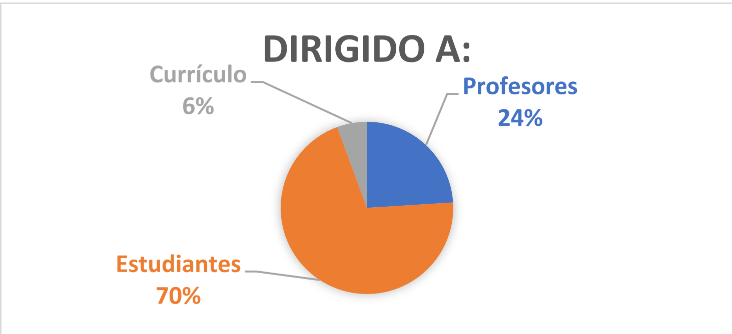


Figura 4. Distribución de tesis del PMME dirigidas a Profesores, Estudiantes o Currículo

Las tesis que centran su atención en los profesores dan muestra, por una parte, del interés creciente en realizar investigaciones y diseños encaminados al desarrollo profesional docente, y, por otra, de la orientación del trabajo realizado por el cuerpo de profesores del posgrado, que cuenta con una amplia experiencia en la puesta en marcha de cursos, diplomados y programas integrales de formación y actualización de profesores de matemáticas en todos los niveles educativos. Esta experiencia se recoge en las actividades que actualmente desarrolla el Bufete de Asesoría en Educación Matemática y que impacta los trabajos de tesis, sumando a estudiantes en la realización de las diversas acciones específicas que se llevan a la práctica.

3.5 Aspectos de género

El propósito central de la matemática educativa, independientemente de las actividades que cada persona o cada grupo realice, es proporcionar elementos para intervenir favorablemente en los sistemas educativos para mejorar el aprendizaje de los estudiantes e incrementar la habilitación matemática de la población en general, promoviendo el desarrollo de habilidades y construcción de conocimiento matemático para la mejor interpretación de los fenómenos naturales y sociales de nuestro interés y mejorar la toma de decisiones en las que nos vemos necesitados o forzados de realizar.

Al contribuir al mejoramiento de la educación matemática y de la educación en general, se promueve la creación de un mundo con menor desigualdad económica, cultural y social. En ese sentido, observar cómo en los primeros años de desarrollo del programa de posgrado la mayoría de la población estudiantil estaba conformada por individuos del género masculino, no era congruente con la búsqueda de condiciones de igualdad. Podemos observar, nuevamente centrando nuestra atención hasta julio de 2004, de las 23 tesis presentadas a ese momento, 16 corresponden a egresados hombres y sólo 7 a estudiantes del género femenino.

Pero por razones de carácter social, no necesariamente de un impulso consciente de políticas del posgrado, esta situación ha cambiado notoriamente, a grado tal que, del total de tesis presentadas a la fecha, 125, han sido presentadas por 67 mujeres y 58 hombres, lo cual se sintetiza en la Figura 5:

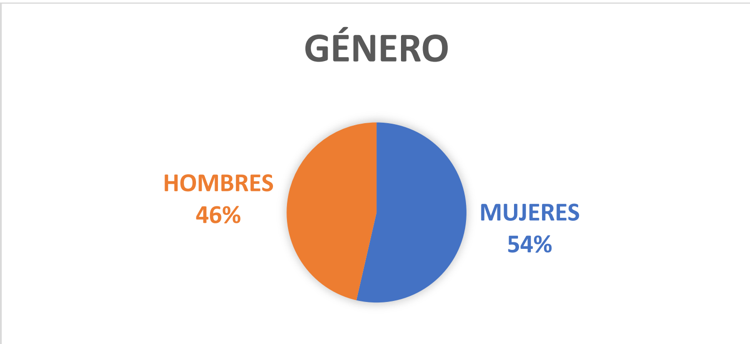


Figura 5. Distribución de tesis del PMME, de acuerdo con el género de las personas que las han elaborado

La situación descrita es quizá de carácter general pues, por ejemplo, en la Universidad de Sonora hay más estudiantes mujeres que hombres, pero adicionalmente a los datos numéricos generales presentados, es relevante señalar que, en los exámenes de defensa de la tesis, los llamados comúnmente exámenes profesionales o de grado, se han entregado 15 menciones honoríficas para destacar la calidad del trabajo presentado, la exposición y defensa del mismo por parte del tesista. De esos 15 reconocimientos, 12 han correspondido a estudiantes mujeres. Asimismo 8 de las menciones honoríficas otorgadas han correspondido a trabajos de dirección de tesis efectuados por profesoras. Estos datos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Relación de tesis a las que se les ha otorgado mención honorífica y sus autoras(es)

Título de la tesis	**Autor(a)**
1**.** Obtención de expresiones analíticas a partir de gráficas: el caso de las funciones senoidales**.**	Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
2. La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local.	Martha Gabriela Robles Arredondo
3. Una introducción gráfica al concepto de transformación lineal usando GeoGebra	César Fabián Romero Félix
4. Seguimiento a la Reforma Integral de la Educación Media Superior: Textos, Prácticas docentes y desarrollo de competencias matemáticas de los Estudiantes	Gloria Angélica Durazo Moreno
5. Seguimiento de las prácticas de Profesores de Matemáticas de Secundaria	Lucía Gisella Mendoza Vonder Borch
6. El papel de las teselaciones en el estudio de los polígonos en el bachillerato	Josefa Osuna Márquez
7. Álgebra y el enfoque por competencias en el bachillerato	Dulce Yuridia Miranda Aragón
8. Sugerencias para la enseñanza de sumas y sucesiones de números en el bachillerato	Carol Yareli Gaxiola Hernández
9. Razonamiento Inferencial Informal en estudiantes universitarios como componente de su formación estadística	Jesús Guadalupe Lugo Armenta
10. Conocimiento didáctico – matemático de profesores de bachillerato en el contexto de la reforma integral de la educación Media Superior	Ana Luisa Llanes Luna
11. Propuesta didáctica dirigida a docentes de secundaria. Razones Trigonométricas”	Guadalupe Isabel Béteme Fierro
12. Prácticas didáctico-matemáticas de profesores del bachillerato mexicano en la evaluación del aprendizaje de las ecuaciones lineales	Raúl Alonso Ramírez
13. Diseño de Actividades didácticas para construir significados de medida y operador de las fracciones	Elizabeth Vásquez Tirado
14. Una propuesta metodológica para el diseño de secuencias didácticas para la matemática del nivel secundaria en un contexto tecnológico, utilizando GeoGebra	Jamil Fabiola Alvarado Sánchez
15. Propuesta de enseñanza para la caracterización del espacio propio como subespacio invariante	Irenisolina Antelo López

Los puntos señalados en este rubro conducen a proponer que en el posgrado deben establecerse políticas que favorezcan la igualdad de género, temática que nunca ha sido tratada en los órganos colegiados del PMME, si bien es cierto que dichas políticas apenas recientemente están recibiendo la atención de instancias universitarias y de otros niveles de gobierno, externos a la Universidad de Sonora.

Conclusiones

La información presentada, si bien analizada de forma parcialmente elemental, muestra componentes a partir de las cuales pueden plantearse conclusiones, un tanto preliminares si se quiere, pero que de alguna manera nos acercan a tener una mirada sobre lo que ha sido el devenir del PMME y sobre aspectos que requieren impulso, discusión e inclusión. Por lo menos, se considera que abre interrogantes que pueden ser profundizados con análisis más pormenorizados y con información más abundante.

Se ha pretendido proporcionar argumentos para hacer notar cómo la comunidad del PMME ha evolucionado acorde a los tiempos, atendiendo y entendiendo reformas curriculares y su impacto en las actividades docentes cotidianas, conociendo y compenetrándose con los avances tecnológicos susceptibles de impactar los procesos de enseñanza y aprendizaje, interesándose por las preocupaciones del entorno educativo que le rodea y canalizando sus inquietudes vía la formación de recursos humanos especializados.

Como se pudo constatar con el análisis de la evolución de algunos aspectos centrales del funcionamiento del posgrado, éste ha venido modificando su accionar y en esta parte se quiere destacar algunos hechos.

Una primer conclusión que es posible extraer de los trabajos de tesis es que aún en la etapa declarada como de posgrado orientado a la formación de investigadores, la tendencia hacia el desarrollo profesional es manifiesta y las tesis incluían, en su gran mayoría, un diseño de actividades didácticas y en sus conclusiones era frecuente que se señalaran elementos para mostrar su validez y pertinencia, más que extraer resultados para fortalecer la disciplina con el análisis de un fenómeno determinado.

Ante tal circunstancia es posible observar que los aspectos metodológicos eran presentados con poco rigor y las valoraciones tenían un rango de validez de carácter empírico. De la misma forma se observa que las consideraciones teóricas eran muy generales y se hacía una presentación superficial, de carácter enciclopédico, de conceptos generales, por ejemplo, de las teorías de Piaget o Vygotsky y, por otra parte, de diferentes marcos teóricos, sumando elementos que no necesariamente se intentaban concatenar entre sí. Consecuentemente se dificultaba aún más el seguimiento metodológico, pues los diseños y los análisis de su puesta en escena no reposaban sobre preceptos operativamente claros.

Las direcciones de tesis muestran también el paulatino fortalecimiento de la planta académica del posgrado, toda vez que al inicio los profesores que dirigían tesis eran pocos y, salvo el caso de un profesor, cada uno de los directores atendía a muy pocos tesistas.

En el PMME, con un cuerpo de profesores e investigadores que desarrolla sus actividades en comunicación e intercambio dentro de una creciente comunidad nacional e internacional, los ejes en la construcción de una disciplina científica se han ido fortaleciendo, concentrándose en dos ramas centrales: una preocupada primordialmente por la investigación básica ligada al fortalecimiento de los principios teóricos, y otra rama más ligada al uso y aplicación de los resultados de investigación.

En ese sentido, el trabajo del PMME observado en la elaboración de tesis, se corresponde más con el uso y aplicación de resultados de investigación, pero siempre con planteamientos actualizados al desarrollo del momento y, aun siendo de carácter aplicado, las problemáticas en estudio y los elementos señalados como sustento, con las limitaciones ya destacadas, dan cuenta del nivel de desarrollo de la disciplina en su conjunto y no sólo del PMME en particular.

Por último, es pertinente resaltar que, a pesar de la diferenciación de los intereses académicos de los profesores del posgrado, en las áreas matemáticas trabajadas, los marcos teóricos empleados, el nivel educativo de interés y otros, se han venido generando puntos comunes de interés que están presentes transversalmente en las tesis y se reconocen como las Líneas de Generación y Aplicación del Conocimiento (LGAC), de su planta académica y son básicamente las tres siguientes:

a) Didáctica de las matemáticas.

b) El uso de los recursos tecnológicos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

c) El desarrollo profesional docente en matemáticas.

Quedan por supuesto, como ya se señalaba con anterioridad, aspectos que todavía lucen débiles o ausentes en las tesis. Por ejemplo, es notorio en muchos trabajos de grado cómo los esfuerzos de los tesistas se concentran en ciertas secciones del corpus de las tesis, pero se debilitan al llegar al apartado de las conclusiones; las referencias son en su mayoría de trabajos en español.

Resalta el reto de poder exportar los resultados de las tesis hacia publicaciones tanto de los autores de las tesis como de sus directores; si bien esta es una tarea a la que en tiempos recientes se le está dedicando esfuerzo, es una actividad que debiera impulsarse como obligatoria dentro del plan de estudios del PMME.

Finalmente, es importante señalar que estudios como el que aquí ha sido expuesto, generan nuevos cuestionamientos e ideas sobre aspectos a incluir y otras vertientes con las cuales se podría enriquecer lo presentado. Por ejemplo, se podrían analizar relaciones existentes entre las diferentes categorías de análisis que fueron empleadas. Otra posibilidad sería estudiar los cambios significativos que hubiesen sucedido en los periodos determinados por los tres distintos planes de estudio que ha tenido el posgrado; una más resultaría de establecer comparaciones entre el panorama local contra el panorama nacional, o más aún, una comparación con el entorno internacional. Añadir otros aspectos de la productividad, como artículos, presentaciones en eventos de la especialidad, también marca otra ruta para la profundización. Una más surge del propio manejo y representación de los datos que aquí se hizo, esto es, en lugar de presentar gráficas de pastel que muestran solamente frecuencias mediante porcentajes, se podrían usar por ejemplo gráficas de barras apiladas, que permiten examinar la variación de las características escogidas en determinados periodos de tiempo. Se espera que alguna de las opciones señaladas, sea retomada en trabajos posteriores.

Referencias

Ávila, A. (2016). La investigación en educación Matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*. Vol. 28. Número 3, pp. 31-59. DOI 10.24844/EM2803.02

Fuentes, C. & Sánchez, M. (2015). Productividad de la comunidad de matemática educativa de la región centroamericana. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Número 53, 113-132. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/44/20141002_Carlos%20Fuentes_Mario%20S%C3%A1nchez%20Aguilar(1).pdf

Hernández, S. & Jacobo, H. (2011). Descripción de algunas tesis de maestría en educación matemática. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, Vol. 13, Número 1, 123-134. Recuperado de: http://redie.uabc.mx/vol13no1/contenido-hdezjacobo.html.

Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Universidad de Sonora. (2015). Plan de estudios del Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Mat. Educativa. Versión electrónica. Recuperado de http://pmme.mat.uson.mx/docs/Plan2015.pdf.

Pacheco, V., Martínez, O. & González, F. (2018). Análisis de los trabajos de grado de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Carabobo: 2005-2014. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Número 53, 159-180. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/44/20141002_Carlos%20Fuentes_Mario%20S%C3%A1nchez%20Aguilar(1).pdf.

Cómo citar este artículo: Ibarra Olmos, S; Grijalva Monteverde, A. (2021). Evolución del Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora. Una mirada preliminar con base en el análisis de tesis de sus egresados. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS, 5 (1), pp. 1-15.

Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp. 16-34
SahuarUS

Análisis del razonamiento de estudiantes de bachillerato frente a una tarea introductoria al contraste de hipótesis

Eleazar Silvestre Castro[1] y Manuel Alfredo Urrea Bernal[2]
e-mail: [1]eleazar.silvestre@unison.mx, [2]manuel.urrea@unison.mx
Universidad de Sonora

Resumen
El contraste de hipótesis es una de las principales técnicas de la inferencia estadística que ha probado ser un concepto muy difícil de utilizar e interpretar apropiadamente. En años recientes se ha explorado la posibilidad de introducir algunas nociones acerca del contraste en niveles previos al universitario utilizando acercamientos didácticos que se enfocan en desarrollar la lógica que lo sustenta. Bajo este contexto, en este artículo se describen patrones de respuesta y algunos elementos matemáticos desplegados por un conjunto de estudiantes de bachillerato frente a un problema introductorio al contraste de hipótesis, en donde la distribución muestral del estadístico se construye mediante un enfoque de muestreo repetido. Nuestros resultados sugieren que, en un primer momento, la mayoría de los estudiantes se apoya únicamente en la heurística de la representatividad para tomar la decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula, pero también que, una vez que disponen de la distribución muestral que modeliza la hipótesis nula, son receptivos a utilizar apropiadamente sus conocimientos acerca de la noción de valor muestral típico o atípico para tomar una decisión mayoritariamente acertada ante el problema. Con base en estos resultados finalizamos el reporte con una serie de reflexiones para la enseñanza del tema.

Palabras clave: Contraste de hipótesis, inferencia estadística, distribución muestral, muestreo repetido, razonamiento estadístico, bachillerato.

Recibido 31 de enero de 2021
Aceptado 14 de abril de 2021

1. Introducción

Uno de los objetivos actuales y de mayor relevancia para la educación estadística es que los estudiantes de niveles educativos diversos desarrollen una comprensión apropiada acerca de los vínculos entre las ideas de muestreo e inferencia estadística (Burril y Biehler, 2011). Como parte de este sofisticado sistema de conceptos estadísticos y probabilísticos, el tema del contraste o “prueba” de hipótesis figura como una técnica de la inferencia estadística cuyo propósito es – dicho de forma reduccionista – evaluar la fuerza o consistencia de los datos experimentales respecto a un mecanismo probabilístico que podría haberlos producido. Junto a otras técnicas de la inferencia clásica o frecuentista, el contraste de hipótesis contribuye a avanzar en el problema general sobre cómo desarrollar nuevo conocimiento (una nueva teoría científica) a partir del análisis de casos particulares (inducción empírica).

Podría decirse, entonces, que la técnica del contraste constituye un método particular de la investigación científica que permite justificar el razonamiento inductivo y el alcance de sus extensiones, por lo cual es actualmente utilizada en una amplia variedad de situaciones y disciplinas científicas: nuevas medicinas y tratamientos médicos deben probar su efectividad e inocuidad; científicos sociales se interesan por los hábitos e impactos del uso de las redes sociales; comunicólogos y mercadólogos caracterizan preferencias electorales a través de encuestas o estudios de opinión pública; psicológicos realizan experimentos para caracterizar el desarrollo de capacidades cognitivas en determinados temas o situaciones; entre otras.
Dada la importancia del contraste para la educación estadística, el desarrollo del pensamiento científico e inclusive para la evaluación crítica de información estadística encontrada en el día a día (Gal, 2004), no es

ISSN: 2448-5365
Universidad de Sonora

de extrañar que el concepto figure en prácticamente todo programa universitario que contemple una introducción a la inferencia estadística, y, más contemporáneamente, en algunos programas curriculares de matemáticas del nivel bachillerato (ver por ejemplo, Ministerio de Educación, 2007; CCH, 2016). No obstante, la literatura especializada ha documentado serias dificultades para la enseñanza y aprendizaje del concepto tanto en estudiantes, profesores e inclusive investigadores en ejercicio (Batanero, 2000; Castro-Sotos, Vanhoof, Noortgate y Onghena, 2009; Inzunza y Jiménez, 2013; Lee, 2018).

La caracterización de estas dificultades se enfoca principalmente en la interpretación del resultado del contraste y en la de algunos conceptos involucrados; por ejemplo, entre las más documentados se destacan: confundir la identificación de la hipótesis nula con la alternativa; creer que las hipótesis aplican tanto a la población bajo estudio como a la muestra; considerar que el p – valor representa la probabilidad de que el resultado de la prueba sea debido a la aleatoriedad; interpretar el nivel de significancia intercambiando los términos de su probabilidad condicional; interpretar el nivel de significancia como la probabilidad de que alguna hipótesis sea verdadera, entre otras. De la literatura especializada se advierten algunas de las principales causas de esta situación, entre las cuales destacamos:

- *Una elevada complejidad epistémica del concepto*. El concepto del contraste se sostiene en una compleja red de relaciones entre conceptos como muestreo, distribución muestral, distribución de probabilidad, probabilidad condicional, incertidumbre, entre otros, donde cada uno tiene su propia fuente de retos y dificultades respecto a sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Los libros de texto suelen presentar el tema como un híbrido entre los enfoques de sus principales contribuidores – la propuesta de Ronald Fisher (1890-1962), y la de Jerzy Neyman (1894-1981) y Egon Pearson (1895-1980) –, ignorando que la interpretación del concepto está influenciada por las diferentes posturas filosóficas entre ambos planteamientos (Batanero, 2000).
- *Una alta propensión a incurrir en razonamientos heurísticos*. El influyente programa de investigación desarrollado por Kahneman, Slovic y Tversky (1982) puso de manifiesto que las personas, en general, se apoyan fuertemente en el uso de mecanismos cognitivos simples (heurísticas) que ayudan a reducir y hacer frente a la complejidad involucrada en la toma de decisiones en situaciones bajo incertidumbre. El apoyo en tales recursos contradice a menudo los principios normativos que rigen al razonamiento estadístico-inferencial y, además, es reacio al cambio. Un ejemplo paradigmático de estas heurísticas es la de la *representatividad*[1]; bajo esta heurística las personas evalúan el nivel de atipicidad de un evento, entre otros atributos, con base en qué tanto representa algunos aspectos salientes de la población o proceso del que proviene.
- *Un enfoque tradicionalista aplicado a la enseñanza estadística*. Al mismo tiempo, problemas prototípicos sobre contrastes de hipótesis encontrados en libros de texto suelen presentar de antemano todas las especificaciones de los supuestos necesarios para realizarlos, lo cual inhibe que los estudiantes participen en el proceso de traducir los aspectos contextuales de la situación a los modelos probabilísticos involucrados y las hipótesis que habrán de ser contrastadas. Más aún, la técnica del contraste suele introducirse de forma atomista y descontextualizada porque, generalmente, no hay vínculo directo a la intención de contribuir a resolver un problema más amplio que, en este caso, es de índole estadístico inferencial (i.e., cómo pasar de una muestra a la inferencia sobre una población o proceso).

[1] La falacia más conocida que se deriva de esta heurística es la *Ley de los Números Pequeños*, que consiste en asumir que inclusive muestras de tamaño pequeño deben reflejar de manera exacta las características de la población de donde provienen.

Para incidir en esta problemática, desde hace aproximadamente dos décadas que algunos investigadores comenzaron a explorar la idea de introducir las nociones que subyacen al concepto del contraste en niveles preuniversitarios, y con la intención de que los estudiantes generen las bases conceptuales para una progresiva formalización de sus conocimientos y razonamiento estadísticos. En esta tarea se ha dado un rol clave a los recursos tecnológicos, particularmente el uso de simulaciones aleatorias para simular procesos de muestreo, pues su uso flexibiliza los requerimientos conceptuales y procedimentales que se derivan del aparato matemático que sostiene a la técnica del contraste (Rossman, 2008; Batanero y Díaz, 2015). Sin embargo, el estado actual de la investigación en este problema brinda incipientes evidencias acerca de las verdaderas potencialidades y limitaciones para el aprendizaje del contraste cuando se utilizan este tipo de acercamientos didácticos (Lee, 2018).

Así, en este reporte describimos los resultados de un experimento de enseñanza, que sigue los principios de una investigación de diseño (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003), en el que un grupo de estudiantes de bachillerato resolvió una serie de actividades didácticas que abordaron el concepto de distribución muestral empírica, utilizando simulaciones computarizadas para emular un proceso de muestreo repetido, para entonces enfrentarse a una situación introductoria al contraste de hipótesis. En particular, estamos interesados en documentar y caracterizar los patrones de razonamiento y los elementos matemáticos que despliegan ante la tarea introductoria al contraste, con el objetivo de aportar conocimiento acerca de las posibles causas de las dificultades para su aprendizaje y, potencialmente, dilucidar la influencia de los principales rasgos de nuestro diseño instruccional. De esta manera, nuestra pregunta de investigación consiste en: *¿qué patrones de razonamiento y elementos de significado manifiestan estudiantes de bachillerato ante una actividad diseñada para introducir el concepto del contraste de hipótesis y que utiliza un enfoque de muestreo repetido en un ambiente computacional?*

2. Antecedentes

Algunos de los estudios de más alto impacto han sido realizados con estudiantes del nivel superior, por ello describiremos brevemente algunos de sus resultados y luego otros de estudios realizados con estudiantes de niveles previos.

2.1 Estudios realizados en el nivel superior

La serie de estudios realizados por Vallecillos y colaboradores (Batanero, Godino, Vallecillos, Green & Holmes, 1994) reveló que los estudiantes interpretan conceptos involucrados en el contraste de manera considerablemente distinta a lo esperado normativamente. Por ejemplo, los autores encontraron que los estudiantes a menudo intercambian los dos términos de la probabilidad condicionada implicada en el nivel de significación (i.e., lo interpretan como la probabilidad de que la hipótesis nula sea verdadera, una vez que se tomado la decisión de rechazarla), interpretan el p-valor como la probabilidad de que los datos experimentales sean producto del azar, o asumen que el procedimiento del contraste posibilita calcular la probabilidad de que alguna hipótesis sea verdadera (una interpretación bayesiana de una metodología frecuentista).

Una creencia destacada en estos estudios fue la de considerar al contraste como una demostración matemática de la veracidad de cualquiera de las hipótesis involucradas, la cual también ha sido identificada en estudios más contemporáneos (Liu y Thompson, 2009; Batanero, Vera y Díaz, 2012; Inzunza y Jiménez, 2013). En años posteriores, Castro-Sotos et al. (2009) corroboraron que la propensión a caer en las interpretaciones mencionadas había sufrido un cambio mínimo pero favorable.

Varios investigadores han señalado que profesores y libros de texto promueven prácticas de enseñanza que no parecen corregir este tipo de creencias, sino que, desafortunadamente, más bien parecen reproducirlas (Harradine, Batanero y Rossman, 2011). Por ejemplo, Liu y Thompson (2009) evidenciaron que profesores de matemáticas del nivel bachillerato presentaron dificultades para concebir la atipicidad de un resultado estadístico bajo un enfoque estocástico, además de considerar que el rechazo de la hipótesis nula implicaba probar su falsedad. Por su parte, Batanero, López-Martín, Gea y Arteaga (2019) aplicaron un problema prototípico sobre contrastes de hipótesis utilizado en las pruebas de admisión para la universidad a una muestra de profesores de matemáticas del nivel secundario y de bachillerato, y encontraron que poco menos del 40% logró tomar la decisión correcta respecto al rechazo o aceptación de la hipótesis nula y sólo el 15% brindó respuestas sin errores procedimentales y conceptuales.

2.2 Estudios realizados en niveles preuniversitarios

En vista de las dificultades reportadas en la literatura acerca de la comprensión sobre el contraste de hipótesis, en años recientes se ha explorado la posibilidad introducir el concepto a través de un enfoque informal (Rossman, 2008; Batanero y Díaz, 2015). En general, en este enfoque se diseñan tareas basadas en el esquema de las pruebas de significación de Fisher en conjunto a la sustitución del modelo probabilístico de la distribución muestral implicada por su versión empírica. La intención principal para el aprendizaje es provocar que los estudiantes comiencen a familiarizarse con algunos procedimientos e ideas de la lógica subyacente a la técnica del contraste.

Dentro de esta línea de investigación, Lee, Angiotti y Tarr (2010) realizaron un experimento con estudiantes de secundaria (11 y 12 años de edad) para analizar su razonamiento en la tarea de inferir si un dado virtual estaba trucado o no, partiendo únicamente de analizar evidencias experimentales derivadas de simular su lanzamiento en repetidas ocasiones. Los autores señalan que, desde esta etapa, los estudiantes son capaces de traducir la hipótesis nula de que el dado sea justo a una distribución de probabilidad uniforme, lo cual les permite mapear los datos empíricos a dicho modelo y arribar eventualmente a inferir correctamente si el dado está equilibrado o no.

Por otra parte, Saldanha y Thompson (2002 y 2007) encontraron que estudiantes de bachillerato, al adentrarse en la lógica del contraste utilizando simulaciones computarizadas, tuvieron múltiples dificultades para interpretar un resultado estadístico típico o atípico bajo una concepción estocástica, en particular debido a los retos que supone comprender y utilizar el concepto de distribución muestral. Al igual que Chance, delMas y Garfield (2004), los autores señalan que el estudio de conceptos de la inferencia estadística, como el caso del contraste, se ve tremendamente limitado cuando los estudiantes son ajenos al concepto de distribución muestral.

Esta valoración es compartida por Sánchez, García-Ríos y Mercado (2017), quienes aplicaron una trayectoria de actividades didácticas a estudiantes de bachillerato para introducir el contraste de hipótesis desde una perspectiva informal. Sus resultados dan muestra de que los estudiantes de este nivel pueden mejorar considerablemente su desempeño en reproducir la técnica del contraste usando simulaciones computarizadas, y enfatizan que es necesario trabajar constante y cercanamente con ellos para evitar que caigan en confusiones acerca del papel de la distribución muestral en el esquema del contraste y discutir el papel de la incertidumbre en la interpretación de su resultado.

3. Marco de referencia

3.1 Razonamiento estadístico y el contraste de hipótesis

Nuestro interés primario reside en el razonamiento de los estudiantes; interesa caracterizar los patrones de razonamiento que son observables en sus respuestas y comentarios a las tareas que configuran un primer acercamiento al concepto del contraste de hipótesis. Por razonamiento nos referimos al proceso de obtener o producir conclusiones sobre la base de evidencia y/o de proposiciones supuestas o ya establecidas (Shaughnessy, Chance y Kranendonk; 2009).

Dado que las actividades intelectuales o cognitivas tienen, en última instancia, el propósito de formular y establecer conclusiones verdaderas sobre determinada situación problémica (i.e. proposiciones), éstas implican la generación de razonamiento, por lo que, al conectar de diversas maneras los enunciados y evidencias nuevos con conocimientos ya establecidos, el razonamiento resulta en la *producción de sentido* o de *significado* sobre un objeto o concepto, el cual varía de individuo a individuo y en términos de diferentes niveles de complejidad cognitiva, argumentativa, de formalidad y de abstracción.

Asimismo, el objeto central sobre el que interesa desarrollar significado es el del contraste de hipótesis. A diferencia de la propuesta de Fisher, el concepto del contraste se concibe como una regla de decisión entre dos hipótesis, la nula o alternativa, como el modelo probabilístico más plausible de haber producido los datos experimentales. Para ello se definen, en la distribución muestral del estadístico (también llamado "estadístico de prueba"), regiones de rechazo y aceptación de la hipótesis nula, el nivel de significancia, los errores tipo I y II y la probabilidad de cometer cada uno.

En el esquema del contraste, el nivel de significancia se selecciona previo a realizar la experimentación, lo cual delimita las regiones de rechazo y no rechazo de la hipótesis nula. Si el valor del estadístico cae en la región de rechazo, la hipótesis nula es rechazada; en caso contrario, la hipótesis nula no es rechazada y se acepta su complemento (la hipótesis alternativa). Para introducir a los estudiantes de bachillerato al concepto del contraste, hemos planteado una situación problema en la que deben tomar una decisión contextual basada en la selección (o aceptación) de la hipótesis nula o alternativa, además de enfocarse (o no) en la noción de región de rechazo / de aceptación de la hipótesis nula como un recurso clave dentro de la propuesta de solución.

3.2 Elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS)

Nuestro segundo componente teórico proviene de la teoría EOS (Godino, 2002), la cual parte de supuestos pragmáticos (los objetos matemáticos emergen de la actividad de resolución de problemas) y realistas (los objetos tienen un carácter ostensible y se sitúan en determinada realidad cultural) acerca del significado de los objetos matemáticos. En el EOS, el significado de un objeto matemático se constituye progresivamente a partir del *sistema de prácticas* en las que se involucra. Tales sistemas, así como los campos de problemas de los que se desprenden, varían entre los considerados grupos de expertos y las instituciones educativas que llevan a cabo procesos de enseñanza y aprendizaje matemático (*faceta institucional*). A su vez, se reconoce que cada estudiante desarrolla significado en función de su propia experiencia con los sistemas de práctica y campos de problema que haya enfrentado hasta determinado momento de su formación escolar (*faceta personal*).

Para el EOS, distintos elementos intervienen en la actividad de resolución de problemas matemáticos; en particular, utilizaremos los llamados *elementos primarios del significado*, que plantean una tipología de cinco componentes para dar cuenta sobre el significado (*personal*) que los estudiantes desarrollan, en este caso, acerca del objeto del contraste de hipótesis. Tales elementos son desplegados, consciente o inconscientemente, al resolver un problema matemático determinado y permiten identificar el bagaje y/o desarrollo de nuevo conocimiento matemático en función de los siguientes objetos:

- *Situaciones problema* (elementos fenomenológicos). Se refiere al campo de problemas del cual emerge progresivamente el concepto, es decir, las situaciones que inducen a la activación del empleo del razonamiento matemático con los objetos de interés y que ultimadamente configuran su significado. Por ejemplo, el contraste de hipótesis puede realizarse para el caso de una media o proporción muestral, o tomando en consideración sólo una de las dos colas de la distribución muestral del estadístico.
- *Lenguaje* (elementos representacionales). Se refiera a las representaciones ostensivas de los conceptos involucrados. En el contraste se manipula y opera con diversas representaciones simbólicas ($\hat{p}$, H_0 y H_1, α, β), gráficas (curva suave para la distribución muestral del estadístico, región de rechazo y aceptación) y verbales (“rechazar / aceptar H_0”).
- *Acciones* (elementos procedimentales). Se refiere a los procedimientos específicos realizados por el estudiante al resolver la situación problema; estos pueden ir desde operaciones sencillas hasta algoritmos y procedimientos de cálculo que se realizan en varias etapas y que relacionan distintos dominios matemáticos. Por ejemplo, una primera acción a realizar para resolver un contraste es la determinación de las hipótesis nula y alternativa, así como la selección de una variable aleatoria que se corresponda con la distribución muestral del estadístico de prueba.
- *Argumentos* (elementos de validación). Se refiere a las argumentaciones utilizadas para justificar y explicar las acciones y procedimientos que se siguieron para arribar a una determinada solución. Por ejemplo, en el contraste se rechaza la hipótesis nula *justificando* que el valor del estadístico se considera demasiado atípico de obtener bajo el supuesto de que es verdadera (i.e., se encuentra en la región de rechazo).
- *Conceptos y propiedades* (elementos conceptuales). El primer elemento se refiere a los conceptos y definiciones que se utilizan para resolver la situación problema, considerando en algunos casos estos son referidos de manera indirecta; para el caso del contraste, ejemplos son los conceptos de muestra, hipótesis estadística, distribución muestral, errores tipo I y II, etcétera. El segundo elemento se refiere a las *proposiciones teóricas* que sirven como sustento para llevar a cabo una determinada acción, o bien, que emergen de la producción de sentido; por ejemplo, una propiedad de las hipótesis estadísticas dentro del esquema del contraste es que se representan mediante una distribución muestral, o que el resultado de la prueba puede alterarse si se modifica el tamaño de muestra.

Es importante considerar que el significado personal (*logrado*) de los estudiantes no necesariamente se corresponde con el institucional (*pretendido*), pero es precisamente el análisis de esta diferencia lo que posibilita identificar errores en el razonamiento matemático de los estudiantes y, potencialmente, informar y reorientar el proceso del diseño instruccional.

4. Método

4.1 Participantes

La metodología del estudio es de carácter cualitativo. En el experimento participaron 42 estudiantes, agrupados en 21 parejas, que se encontraban cursando un segundo curso de Estadística y Probabilidad II (CCH, 2016) durante su último semestre de bachillerato (17-18 años de edad). Los antecedentes estadísticos y probabilísticos más recientes de los estudiantes se corresponden con los contenidos del curso de Estadística y Probabilidad I (introducción al análisis exploratorio de datos e introducción a los enfoques de la probabilidad), llevado a cabo en el semestre previo. El profesor responsable del grupo y del experimento de enseñanza fue el primer autor de este reporte.

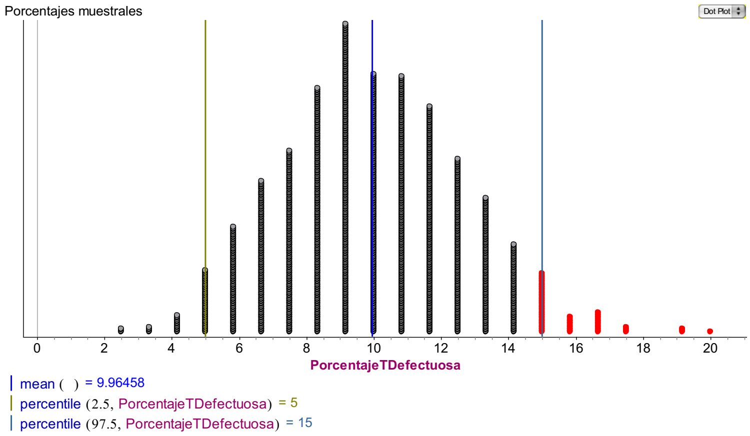
Los estudiantes trabajaron con el concepto de distribución muestral empírica durante las semanas previas a enfrentarse a la situación del contraste. Dicho concepto, que se construye mediante simulaciones computarizadas que emulan un proceso de muestreo repetido (Chance et al., 2004), fue el objeto central de aprendizaje durante una trayectoria de seis actividades didácticas, las cuales a continuación se enlistan de manera somera:

- Introducción al concepto de distribución muestral: (1) partiendo de un parámetro p desconocido, construir una distribución muestral empírica de la variable "número de éxitos en la muestra" (distribución binomial) a través del muestreo repetido usando simulaciones computarizadas, para caracterizarla a través de su forma, centro y nivel de variabilidad; (2) estimar probabilidades usando la distribución muestral cuando se conoce p.
- Rol del tamaño de muestra en la distribución muestral: (1) partiendo de un parámetro p conocido, identificar los efectos de modificar el tamaño de muestra en la distribución muestral (acercamiento al Teorema del Límite Central); (2) estimar probabilidades usando la distribución muestral y modificando el tamaño de muestra.
- Acercamiento a la formalización del concepto de distribución muestral: (1) partiendo de un parámetro p desconocido y una distribución muestral generada con dicho parámetro, estimar probabilidades y el valor de p; (2) partiendo de un parámetro p conocido, bosquejar la distribución muestral correspondiente.

Los estudiantes trabajaron con el software *Fathom* para resolver los problemas de la trayectoria, ya que el ambiente y herramientas virtuales que proporciona, en particular las que permiten simular procesos de muestreo de manera intuitiva y en un entorno amigable, son ampliamente recomendadas para asistir procesos de educación estocástica (Biehler, Ben-Zvi, Bakker y Makar; 2013). En general, estos recursos fueron empleados en las actividades de la trayectoria para promover que los estudiantes asociaran la noción de variabilidad muestral (el estadístico puede tomar distintos valores) con el concepto de la distribución muestral (pero unos son más probables de ocurrir que otros). En la actividad que aquí reportamos no se requirió que los estudiantes manipularan el programa, pero aun así requirieron apoyarse en su experiencia con el mismo dado que fue en este entorno donde construyeron su significado del concepto de distribución muestral (empírica).

Adicionalmente, un antecedente relevante para los estudiantes al momento de enfrentarse a la situación introductoria al contraste fue un ítem que se presentó en los tres bloques de actividades y que consistió en, dada una distribución muestral empírica, clasificar un valor muestral específico como probable/típico o atípico de obtener. Los estudiantes, en conjunto con el profesor, acordaron realizar esta clasificación delimitando un rango de valores alrededor del promedio de la distribución, de tal manera que abarcara el 95% de todos los valores que la conforman. La siguiente imagen ilustra este rango de valores probables o típicos al centro de la colección para una distribución muestral empírica de 2 mil valores del estadístico del porcentaje muestral, con parámetros n =120 y p =.1:

Figura 1. Distribución empírica de 2 mil valores construida en Fathom



4.2 Instrumentos y procedimiento de ejecución

El experimento se llevó a cabo en una sola sesión de clase de aproximadamente una hora y media de duración. En el diseño del experimento se contemplan tres momentos; en el primero, agrupados los estudiantes en parejas, se les planteó la siguiente situación problema:

> Una fábrica dedicada a la generación de componentes para computadora posee cuatro máquinas especializadas en producir tarjetas madre para laptop. De manera irremediable, cada máquina produce, de forma *aleatoria*, una cierta cantidad de tarjetas defectuosas en determinado período de tiempo. El departamento de control y calidad indica que las máquinas pueden presentar hasta 10% de tarjetas defectuosas en su producción, de lo contrario éstas deben ser enviadas a revisión para una *posible reparación*. Ahora bien, un equipo de técnicos recolectó en cierto día una muestra aleatoria de 120 tarjetas de cada máquina, para estimar el % de tarjetas defectuosas que produce, obteniéndose los siguientes resultados: máquina A - 42 tarjetas defectuosas; máquina B – 21; máquina C - 27 y máquina D - 15. Con base en esta información, ¿cuáles máquinas consideras son necesarias mandar a revisión[2]?

Cada pareja elaboró una propuesta de solución al problema y sin ningún tipo de ayuda por parte del profesor-investigador; sus respuestas fueron registradas en una hoja de papel que entregaron al profesor antes de pasar al segundo momento de la actividad.

La respuesta esperada al problema debería iniciar, según el punto de vista normativo, asumiendo que cada máquina produce un 10% de tarjetas defectuosas y entonces preguntarse por la *atipicidad* de obtener el porcentaje muestral correspondiente o algo más extremo. No obstante, anticipando que los estudiantes tendrían un abordaje de la situación relacionado con la heurística de la representatividad (i.e., su decisión se

[2] Sólo para el caso de la máquina D se acepta la hipótesis nula de que $p = .1$ con un $\alpha = .025$, en el resto de los casos se rechaza.

basaría únicamente en la cercanía del estadístico con el 10% permitido), en el segundo momento de la actividad el profesor utilizó un simulador de porcentajes muestrales, donde el parámetro poblacional era conocido, para que visualizaran (o recordaran) que, debido a la variabilidad muestral, el porcentaje muestral puede ser considerablemente distinto al 10% permitido inclusive si $p = .1$. El propósito de esta acción era inducir a los estudiantes a que relacionaran la variabilidad muestral del estadístico con el concepto de distribución muestral, para entonces medir su grado de atipicidad asumiendo la hipótesis nula de que la máquina producía 10% de tarjetas defectuosas. Hecho esto, los estudiantes tuvieron la oportunidad de replantear sus respuestas a la situación del contraste, registrando sus respuestas en otra hoja de papel que fue entregada al profesor.

En el tercer momento de la actividad, el profesor mostró a los estudiantes una distribución muestral empírica correspondiente a una máquina Z que *se sabe con certeza* produce un 10% de tarjetas defectuosas (ver Figura 1). En esta distribución se grafican y presentan dos valores del estadístico que delimitan el rango que contiene el 95% de los valores simulados y que están alrededor del promedio de la distribución. Debido a sus experiencias recientes con el concepto de distribución muestral empírica, los estudiantes estaban familiarizados con este rango de valores y por esta razón no fue modificado[3]. A partir de esta distribución muestral, los estudiantes realizaron una tercera y última propuesta de solución a la situación del contraste, registraron sus respuestas en una nueva hoja de trabajo y la entregaron al profesor.

4.3 Datos y procedimiento de análisis

La fuente primaria de evidencias se constituye de las hojas de trabajo que los estudiantes entregaron en cada momento de la actividad. El análisis de datos se realizó en dos etapas; en la primera se realizó una codificación abierta de las respuestas de los estudiantes tomando como categorías de análisis sus acciones y argumentos frente a la situación problema y de acuerdo con cada momento de la actividad. A partir de este análisis se caracterizaron algunos patrones de respuesta que aluden, desde nuestra perspectiva, a modos de razonamiento intrínsecos a las capacidades de nuestros estudiantes y la micro-cultura de la clase. En la segunda etapa de análisis se utilizaron los elementos primarios del significado para analizar las respuestas de los estudiantes y así inferir su significado personal acerca del objeto del contraste.

5. Resultados

5.1 Patrones de razonamiento según los momentos de la tarea

En el primer momento de la actividad se espera que los estudiantes asuman que cada máquina presenta un 10% de tarjetas defectuosas y entonces se pregunten por el grado de atipicidad en la muestra respecto al resto de los valores del estadístico que podrían haberse obtenido; si se considera al valor del estadístico como atípico se acepta provisionalmente la hipótesis de que la máquina excede el 10% de tarjetas defectuosas. No obstante, los patrones de respuesta caracterizados en esta etapa evidencian que la mayoría de los estudiantes no parece considerar que el porcentaje muestral, de repetirse el experimento, podría modificarse hasta quedar por debajo del 10% independientemente del verdadero porcentaje de tarjetas defectuosas que produzca:

[3] La solución normativa considera sólo el extremo superior de la distribución muestral. Es decir, la situación corresponde a una prueba de una cola porque sólo interesa analizar si los valores muestrales son atípicamente elevados asumiendo H_0 como $p = .1$.

Tabla 1: Patrones de respuesta en el primer momento de la tarea

Código	Acción y argumento	Frecuencia
Determinista: no identifica variabilidad muestral;	Todas las máquinas a reparación porque exceden el 10%;	14 parejas
Semideterminista: intuye variabilidad muestral	A y C a revisión, exceden por mucho el 10%; casos B y D son ambiguos	7 parejas

Esto es, 14 parejas evidenciaron una indiferencia hacia la variabilidad muestral del estadístico, por lo cual se considera siguieron un razonamiento determinista ya que tomaron la decisión de enviar todas las máquinas a *reparación* bajo el argumento de que el valor muestral excedió el 10% permitido de tarjetas defectuosas. Por ejemplo, la pareja P8 señaló: "mandaríamos a reparar todas las máquinas ya que el límite permitido de tarjetas defectuosas es el 10% y todas las máquinas rebasaron ese porcentaje, pues el máximo de tarjetas defectuosas que deberían salir serían 12 de una muestra de 120".

Las siete parejas restantes siguieron un razonamiento semideterminista al reconocer la existencia de un cierto *margen de error* en el que puede oscilar el valor del estadístico respecto al 10% esperado; este razonamiento implica asumir como hipótesis nula que la máquina en cuestión presenta un máximo de 10% de tarjetas defectuosas. Esta línea de argumentación se aplicó en los casos de las máquinas D y B por haber presentado los porcentajes muestrales más cercanos al 10% permitido. Por ejemplo, la pareja P2 mencionó que:

> Se mandarían a revisión las máquinas A, B y C de manera inmediata debido a que exceden el 10% que se permitía como margen de error. De la misma manera se mandaría a revisar la máquina D, pero esa, se haría dicha operación en un tiempo posterior, debido a que no hay mucha variación en el margen de error.

En el segundo momento de la actividad, los estudiantes tuvieron la oportunidad de reformular su respuesta a partir de observar cómo varía una proporción muestral cuando se conocen el tamaño de muestra y la proporción poblacional de donde se extraen (pero sin aludir al concepto de distribución muestral). Finalizada esta actividad, las respuestas a la situación del contraste se reformularon como:

Tabla 2: Patrones de respuesta en el segundo momento de la actividad

Código	Acción y argumento	Frecuencia
Determinista: no identifica variabilidad muestral;	Todas las máquinas a reparación porque exceden el 10%;	3 parejas
No determinista: identifica variabilidad muestral	B y/o D dentro del "margen de error aceptable", no se envían a reparar	18 parejas

La casi totalidad de los estudiantes, con 18 de las 21 parejas, consideró ahora que las máquinas con el menor número de tarjetas defectuosas cumplían con estar dentro de un cierto margen de error o variación aceptable con respecto al 10% permitido, preservando así la idea de asumir temporalmente que cualquier máquina producía un 10% de tarjetas defectuosas. Esta consideración de la variabilidad muestral llevó a clasificar este razonamiento como no determinista; adicionalmente, como puede apreciarse en la respuesta de P20, ningún estudiante evocó de forma alguna el concepto de distribución muestral para modelar la forma en la que varía el estadístico del porcentaje muestral:

> Sí, en la máquina B no la mandaríamos a arreglar porque el simulador nos hizo recordar la variabilidad que puede haber en la muestra y no sobrepasa por mucho el límite establecido, ya que puede bajar o subir el % de

> tarjetas defectuosas siempre y cuando no sobresalga mucho. En la D considerando lo anterior no la mandaríamos a arreglar.

Estos patrones de respuesta sugieren que, hasta este punto de la actividad, el razonamiento de los estudiantes parece apoyarse en la heurística de la representatividad como recurso único para enfrentarse el problema. En otras palabras, bajo esta aproximación, los estudiantes se limitan a juzgar la representatividad de las muestras con base en su parecido o diferencia con el 10% esperado (según la hipótesis nula).

En el tercer momento de la actividad, los estudiantes se confrontaron por última vez con la pregunta del contraste disponiendo de la simulación de una distribución muestral empírica de porcentajes obtenida de la máquina Z, la cual se sabe con certeza presenta 10% de artículos defectuosos (ver Figura 1). En este escenario los patrones de respuesta se caracterizaron como:

Tabla 3: Patrones de respuesta en el tercer momento de la actividad

Código	Acción y argumento	Frecuencia
Acercamiento intuitivo al contraste	D no se envía a reparar, es un valor probable de obtener bajo la hipótesis nula;	10 parejas
	D no se envía a reparar, es un valor probable de obtener bajo la hipótesis nula y es, además, cercano al valor esperado	4 parejas
Razonamiento a la inversa	Sólo D se envía a reparar, es un valor probable de obtener bajo la hipótesis nula;	3 parejas
Heurística de representatividad	D no se envía a reparar, su valor es cercano al esperado	4 parejas

10 de las 21 parejas tomaron la decisión correcta de rechazar la hipótesis nula de que la máquina correspondiente producía un 10% de tarjetas defectuosas. Para ello se basaron en identificar en qué región se encontraban los distintos valores del estadístico: si el valor se encontraba fuera del rango de valores considerados como probables o usuales de obtener (en este caso en la cola derecha de la distribución), entonces la hipótesis nula del 10% fue rechazada. Un ejemplo de estas respuestas es la de P10:

> Mandaríamos a reparar las máquinas A, B y C porque los % de tarjetas defectuosas de estas máquinas quedan fuera de los valores críticos (representan sólo el 2.5% de todos los valores obtenidos). La máquina D sería la única que no mandaríamos a reparar debido a que su % de tarjetas defectuosas entra en los valores críticos que representan el 95% de todos los valores obtenidos.

Este tipo de razonamiento se toma como indicio de que los estudiantes fueron receptivos a razonar intuitivamente con la lógica del contraste en (por lo menos) esta etapa del proceso. Por otro lado, cuatro parejas aplicaron este razonamiento y complementaron su respuesta con la heurística de la representatividad. Esto es, para decantarse por una u otra hipótesis, los estudiantes evaluaron la distancia que hay entre el valor del estadístico y el valor esperado según la hipótesis nula: si el porcentaje muestral se considera como demasiado lejano del esperado (10%), entonces la hipótesis de que produce un 10% de tarjetas defectuosas es rechazada. La respuesta de P3 ilustra este tipo de razonamiento:

> Es seguro que se mandarían a reparar las máquinas A, B y C ya que son las que presentan mayor cantidad de tarjetas defectuosas y se encuentran fuera del rango de valor crítico superior (el rango 10-15%), por lo que la máquina D tiene menos probabilidad de producir tarjetas defectuosas.

Pese al uso de esta heurística, consideramos que este tipo de respuestas preservan un acercamiento intuitivo a la lógica del contraste porque se valen de argumentos basados – al menos parcialmente – en la distribución muestral empírica del estadístico y la idea de considerar si su valor es probable de obtener bajo la hipótesis nula. Aunque la decisión de tres parejas más fue errónea por haber invertido la decisión de aceptar la hipótesis nula para la máquina D y viceversa en los casos restantes, clasificamos sus respuestas dentro de la misma categoría por haberse enfocado en la distribución muestral empírica y en el rango de valores probables o usuales de obtener.

Las cuatro parejas restantes no utilizaron argumentos como los anteriores y, pese a tomar la decisión correcta de aceptar o rechazar la hipótesis nula en cada caso, su razonamiento se basó únicamente en la heurística de la representatividad; la respuesta de P13 ilustra este tipo de argumentación:

> Mandaríamos a revisar las máquinas A, B y C ya que el % que se observa en las muestras es muy elevado lejano al 10% permitido. La máquina D no la mandaríamos a revisar ya que el 12.5% que se observa en la muestra es muy cercano al 10%. Después de realizar más muestras el valor se mantendría muy cercano a este 10%, caso contrario de las A, B y C que está muy alejado.

Finalmente, como parte del análisis de la formulación de la conclusión, conviene destacar que a partir del segundo momento de la actividad, los estudiantes intercambiaron el verbo “revisar” por “reparar”, sugiriendo el haber asumido (implícitamente) que si el porcentaje muestral se encuentra fuera del rango de valores probables o usuales de obtener entonces se *asegura* que el porcentaje de tarjetas defectuosas de la máquina excede el 10% permitido. Más aún, el análisis de las respuestas en el último momento de la actividad reveló una falta de expresiones que aludan a una incertidumbre respecto al hecho de que las máquinas enviadas a reparación no necesariamente presentan una descompostura; análogamente, tampoco se encontraron expresiones que denotaran la consideración de que la máquina D podría exceder el 10% de tarjetas defectuosas. Una vez que se entregaron las últimas hojas de trabajo, el profesor-investigador preguntó a los estudiantes: “¿no sería posible que su conclusión (enviar máquinas A, B y C a “reparar” porque exceden el 10% permitido), sea incorrecta? Inclusive si no hay “fallas” en el procedimiento…” Todos los estudiantes afirmaron que el procedimiento que habían seguido permitiría *determinar* si la máquina tenía una descompostura o no.

5.2 Elementos del significado

5.2.1 Acciones y lenguaje

En el primer momento de la actividad, los estudiantes primero traducen el estadístico “número de tarjetas defectuosas en la muestra de n=120” al estadístico del porcentaje muestral, después comparan cada porcentaje muestral con el porcentaje límite de tarjetas defectuosas (10%) y descartan la hipótesis nula para los casos en que se considera demasiado alejado del límite permitido (máquinas A y C). En este punto, sólo una tercera parte de los estudiantes realiza una acción adicional, de naturaleza analítica, en la que consideran que la producción de tarjetas defectuosas tiene un carácter aleatorio; ello permite flexibilizar su abordaje determinista para analizar los casos de las máquinas B y C. Además de los cálculos y representaciones numéricas que se realizan en la obtención de los porcentajes muestrales, el lenguaje utilizado por los estudiantes es únicamente verbal.

En el segundo momento de la actividad, en donde los estudiantes traen de vuelta la idea de que los porcentajes muestrales no necesariamente reflejan con exactitud el parámetro que los genera, la casi totalidad del grupo realiza la acción, también de naturaleza analítica, de concebir un "margen de error" en el que el porcentaje muestral podría presentarse (i.e., el rango de valores que podría tomar el estadístico) asumiendo implícitamente que la máquina en cuestión podría producir un 10% de tarjetas defectuosas. Quienes se apoyan en la heurística de la representatividad no parecen realizar acciones adicionales a las descritas en el momento anterior de la actividad. Hasta este punto el lenguaje utilizado por los estudiantes continúa siendo mayoritariamente de carácter verbal.

En el tercer momento de la actividad, la primera acción que realizan los estudiantes es enfocarse en la interpretación de la distribución muestral empírica que representa la hipótesis nula de que la máquina produce un 10% de tarjetas defectuosas (máquina Z), en tanto que sólo un grupo minoritario de estudiantes se apoya exclusivamente en la heurística de la representatividad para tomar la decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula (evalúa subjetivamente qué tan distante es el porcentaje muestral del 10% permitido). Como segunda acción, del grupo de estudiantes que se enfoca en la distribución muestral, la mayoría identifica en qué región de la distribución se encuentra cada porcentaje muestral (i.e., dentro o fuera de la región de valores probables o usuales de obtener) para tomar la decisión, en su mayoría correcta, de aceptar la hipótesis nula sólo en el caso de la máquina D. Algunos estudiantes complementan la acción de identificar en qué región se encuentra el porcentaje muestral con la de aplicar la heurística de representatividad mientras que otros, pese a haber identificado que el valor muestral es probable o usual de obtener, invierten la decisión de rechazar la hipótesis nula y viceversa para los otros casos. De una u otra forma, todos los estudiantes continúan apoyándose en un lenguaje verbal que incorpora escasas representaciones numéricas y simbólicas (porcentajes) como parte de su argumentación.

5.2.2 Argumentos y propiedades

La siguiente tabla exhibe nuestras conjeturas acerca de los principales argumentos y propiedades que los estudiantes utilizaron, de acuerdo con cada momento de la actividad, para justificar su valoración acerca de cuáles máquinas podrían producir más del 10% de tarjetas defectuosas:

Tabla 4: Argumentos y propiedades para cada momento de la actividad

Momento	Argumento	Propiedad
1	El porcentaje muestral excede el 10%, entonces hay descompostura	Heurística de la representatividad: las muestras presentan valores iguales (o muy cercanos) al parámetro que las genera
2	El porcentaje muestral puede moverse en cierto rango de valores; El porcentaje muestral se sale (o no) del "margen de error"	Debido a la aleatoriedad, las muestras varían alrededor del parámetro que las genera; Heurística de la representatividad

3	El porcentaje muestral se encuentra (o no) en el rango de valores probables / usuales de obtener; El porcentaje muestral se sale (o no) del “margen de error”	Si el porcentaje muestral es atípico bajo la hipótesis nula, entonces debe ser falsa y viceversa; Heurística de la representatividad

Respecto al primer momento de la actividad, consideramos que el argumento primario de los estudiantes se nutre directamente de la heurística de la representatividad. Al comparar el valor del porcentaje muestral con el de la hipótesis que se quiere refutar, y “verificar” que ésta se cumple, los estudiantes asumen implícitamente la creencia de que las muestras presentan valores iguales (o muy cercanos) al parámetro que las genera; esto conduce a que ignoren el escenario en el que el porcentaje muestral podría obtenerse inclusive si la máquina no excede el 10% de tarjetas defectuosas.

En el segundo momento de la actividad, la mayoría de los estudiantes son receptivos a traer de vuelta la noción de variabilidad muestral al contexto de la situación y por tanto argumentan que la máquina D no necesitaría una reparación, siempre y cuando su porcentaje muestral “no se aleje demasiado de un margen de error (variabilidad) aceptable alrededor del 10%” permitido. Dicha argumentación evidencia la creencia de los estudiantes en la propiedad de que, al tomar una muestra aleatoriamente, el valor del estadístico debería encontrarse alrededor del parámetro poblacional que la genera, relajando entonces la expectativa de que ambos valores deberían ser idénticos.

Es importante observar que hasta este punto de la actividad los estudiantes no consideran necesario precisar los límites del margen de variabilidad en el estadístico que sería razonable de obtener. Aunque el razonamiento de los estudiantes ya no es tan determinista como en el primer momento de la tarea, sus argumentos no aluden de forma alguna al concepto de distribución muestral para especificar cómo es que se comporta la variabilidad del estadístico, por lo que el argumento que alude a la heurística de la representatividad sigue siendo de fuerte influencia.

En el tercer momento de la actividad, la mayoría de los estudiantes basa su argumentación en propiedades que extraen de la distribución muestral empírica que representa la hipótesis nula. La propiedad que les permite tomar una decisión sobre aceptar o rechazar la hipótesis nula, para la mayoría, consiste en asociar un evento poco probable (casos de las máquinas A, B y C) con un evento imposible; esto les lleva a asumir que si el porcentaje muestral se considera poco probable de ocurrir, entonces la hipótesis nula de que la máquina produce 10% de tarjetas defectuosas debe ser falsa y por tanto su complemento sería verdadero. Por otra parte, en este punto de la actividad sólo una minoría de los estudiantes presenta argumentos que se desprenden de la heurística de la representatividad (i.e., que ignoran la información que provee la distribución muestral y continúan asumiendo de manera intuitiva que las muestras presentan nula o muy poca variabilidad muestral).

5.2.3 Conceptos y situación problema

La siguiente tabla exhibe una serie de conceptos utilizados por los estudiantes y de acuerdo con cada momento de la actividad. Algunos de estos conceptos son referenciados, desde nuestra perspectiva, de manera implícita o indirecta:

Tabla 5: Conceptos referenciados durante la actividad

Momento	Conceptos
1	Muestra, proporción y porcentaje muestral, margen de error (variabilidad muestral);
2	Muestra, parámetro, proporción y porcentaje muestral, margen de error, simulación del muestreo;
3	Muestra, parámetro, proporción y porcentaje muestral, margen de error, simulación del muestreo, distribución muestral empírica, porcentaje muestral probable/atípico, región de rechazo/aceptación

En el primer momento de la actividad, la casi totalidad de los estudiantes hace un uso muy limitado de los conceptos estadísticos y probabilísticos que se esperarían observar en un contraste de hipótesis. En efecto, verificar que el porcentaje muestral se corresponde con el porcentaje esperado del 10% requiere, para la mayoría, una cantidad muy limitada de esfuerzo cognitivo y procedimental, en tanto que el grupo minoritario considera indirectamente la presencia del componente aleatorio en la producción de tarjetas y por ello incorpora el concepto de margen de error (variabilidad muestral).

Para el segundo momento de la actividad, el número de conceptos evocados por los estudiantes sufre un cambio mínimo respecto al anterior ya que del simulador identifican y abstraen, de forma más explícita, los conceptos de parámetro, variabilidad muestral (i.e., variabilidad del estadístico) y simulaciones del muestreo. Pero una diferencia clave entre ambos momentos es que, a diferencia del primero, la mayoría de los estudiantes se aleja de abordar la situación desde un punto de vista meramente determinista.

Para el tercer momento de la actividad, la mayoría de los estudiantes incorpora a su razonamiento los conceptos de distribución muestral, rango de valores probables o usuales de obtener, porcentaje muestral probable y atípico y regiones de aceptación y rechazo. Ningún estudiante parece intuir el concepto de error tipo I o II, entendido como aquel que se derivaría de aceptar o rechazar una hipótesis cuando esta puede ser ultimadamente falsa o verdadera según sea el caso.

De esta forma, podemos inferir que la interpretación de los estudiantes acerca de la situación problema cambia dependiendo del momento de la actividad en la que se encuentren, pero preservando la idea de que el procedimiento tiene la intención última de establecer la veracidad de las hipótesis involucradas. Esto es, en el primer momento, es más probable que los estudiantes conciban la situación problema como una que puede presentarse en un curso de matemáticas en general, ya que sobreentienden que se solicita realizar una operación aritmética sencilla correspondiente a la verificación de la hipótesis que se quiere contrastar. En el segundo momento, toda vez que los estudiantes han incorporado la noción de variabilidad muestral al tratamiento de la situación, es más probable la conciban como una especie de prueba de tolerancia hacia la variabilidad del porcentaje muestral respecto al 10% esperado, pues se valen del recurso de la heurística de la representatividad para tomar la decisión de aceptar o rechazar (implícitamente) la hipótesis nula de que la máquina presente descompostura. Y en el tercer momento, aunque la mayoría de los estudiantes toma la decisión correcta de aceptar o rechazar la hipótesis nula de que la máquina produce 10% de tarjetas defectuosas – inclusive apoyándose en una versión informal del concepto de regiones de rechazo y aceptación dentro de la distribución muestral –, la mayoría termina por desterrar la noción de incertidumbre de su razonamiento pues concibe que el procedimiento y la lógica que se han seguido hasta el momento, de manera similar a cualquier procedimiento atendido en una clase de matemáticas, permiten dar una respuesta correcta y certera al problema del contraste (i.e., permiten establecer la veracidad o falsedad de cualquiera de las hipótesis involucradas).

6. Conclusiones y discusión

En respuesta a nuestra pregunta de investigación, un primer patrón de razonamiento a destacar es la tendencia de nuestros estudiantes a valerse mayoritariamente de un razonamiento idiosincrático acerca de la relación parámetro-estimador cuando resuelven el problema de manera independiente. Bajo este modo de razonamiento, el apoyo preponderante en la heurística de la representatividad les conduce a basar su decisión acerca de aceptar o rechazar la hipótesis nula con base en el parecido del valor muestral con el del valor esperado. Pero arribado al punto en el que los estudiantes disponen de la distribución muestral que materializa la hipótesis nula, un segundo patrón que se destaca en su razonamiento es la alta propensión para utilizar su concepción de valor muestral atípico para asociarla con la imposibilidad de que la hipótesis nula sea cierta.

En lo que respecta a los elementos del significado, nuestros resultados señalan que éstos dan un salto cualitativo en el razonamiento de los estudiantes sólo hasta que se les sitúa en el contexto de interpretar y utilizar la distribución muestral empírica que modeliza la hipótesis nula. Previo a este punto, los elementos del significado que los estudiantes despliegan se rigen principalmente por la manipulación de los conceptos de muestra, parámetro y margen de error, que se encuentran desligados de los conceptos de distribución muestral y los de hipótesis nula y alternativa, y con los cuales se razona bajo la lógica de la heurística de la representatividad. Por esta razón, el lenguaje, acciones y propiedades que utilizan se limitan a los necesarios para valorar la representatividad de una muestra con base en su parecido al parámetro supuesto, algo muy distinto de valorarla en términos de la comparación hacia un conjunto de valores del estadístico (Saldanha y Thompson, 2007).

A partir de que los estudiantes disponen de la distribución muestral que modeliza la hipótesis nula, incorporan nociones conceptuales relacionadas con los conceptos de hipótesis nula y alternativa, valor muestral típico o atípico y las regiones de rechazo y aceptación de la hipótesis nula. En particular, el utilizar una proto-versión de las regiones de rechazo y aceptación para tomar una decisión sobre las hipótesis, en su mayoría correcta, permitió a los estudiantes conjeturar una nueva proposición acerca de la relación muestra-parámetro: un valor muestral inusual o atípico hace – por lo menos – insostenible el supuesto de que la hipótesis nula es verdadera, en tanto que, análogamente, uno típico lleva a la decisión de – por lo menos – no rechazarla.

Por otra parte, algunos de nuestros resultados coinciden con otros ya reportados en la literatura especializada; en particular, Sánchez y colaboradores (2017) también habían reportado la tendencia de los estudiantes a brindar respuestas iniciales a la situación del contraste que consisten en verificar la hipótesis que se desea contrastar, además de asumir que la técnica del contraste puede ser vista como una demostración matemática de la veracidad de las hipótesis (Batanero et al., 1994; Castro-Sotos et al., 2009). A un nivel más general, la prevalencia de este tipo de razonamientos puede ser explicada, en parte, por la falta de experiencias escolarizadas de los estudiantes con los conceptos de muestreo e inferencia durante su formación inicial, además de haber pasado por años de instrucción matemática que difícilmente fomenta el razonamiento con las principales ideas estadísticas y probabilísticas que subyacen a los conceptos y técnicas de la inferencia frecuentista (Burril y Biehler, 2011; Harradine et al., 2011).

En este sentido, una de las implicaciones principales de nuestro estudio para la enseñanza es el reconocimiento de que cuando los estudiantes se familiarizan con el concepto de distribución muestral empírica, pueden estar mejor equipados en el momento específico de utilizarla para tomar una decisión apropiada dentro del mecanismo y lógica del contraste. Esto es, si bien es notorio que un desarrollo de significado más robusto acerca del concepto requiere de más experiencias y prácticas con el mismo, la actuación de nuestros estudiantes sugiere que el recurso que les ha resultado más útil, respecto a la solución normativa del contraste, fue el ver a la distribución muestral empírica como un vehículo para clasificar los resultados como probables o no probables de obtener, prefigurando así la noción de regiones de rechazo y aceptación de la hipótesis nula. Conjeturamos que es probable que el paso por la trayectoria de actividades que promueve prácticas con esta noción les haya empujado a utilizarla para enfrentarse a la situación introductoria al contraste.

Nuestros resultados también evidencian que las etapas inicial y final de la técnica del contraste presentan retos potencialmente ineludibles al razonamiento de los estudiantes, ya que requieren del uso de un razonamiento hipotético-deductivo para el planteamiento de la hipótesis nula, su apropiada modelización a través de una distribución muestral, así como la consideración del rol de la noción de la incertidumbre especialmente a la hora de interpretar correctamente el resultado del contraste. La prevalencia de errores conceptuales en estas etapas sugiere que podrían constituir verdaderos conflictos epistemológicos para los estudiantes en general (Batanero, 2000); por consiguiente, se esperaría que la serie de habilidades y modos de razonamiento necesarios para enfrentarlos se desarrolle, probablemente, en años, no semanas.

Finalmente, consideramos que algunas vertientes apropiadas para continuar la presente investigación son:

- Caracterizar y profundizar en el razonamiento de los estudiantes cuando se enganchan en trayectorias didácticas más longitudinales que buscan desarrollar conocimiento acerca del contraste de hipótesis.
- Diseñar y evaluar un currículum escolar que contemple el desarrollo gradual y sistemático de las principales ideas subyacentes a las técnicas de la inferencia estadística, en lugar de dar un peso preponderante o casi exclusivo a contenidos del análisis exploratorio de datos y el cálculo (descontextualizado) de probabilidades.
- En estrecha cercanía al punto anterior, estudiar los conocimientos didácticos y estocásticos de los profesores de matemáticas en relación con el contraste de hipótesis y otros objetos de la inferencia estadística.

Referencias

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(1-2), 75-98.

Batanero, C. y Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Granada: Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2*, (pp. 207-214).

Batanero, C., López-Marín, M. M., Gea, M. M., y Arteaga, P. (2019). Conocimiento del contraste de hipótesis por futuros profesores de educación secundaria y bachillerato. *Publicaciones*, *48*(2), 73-95.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25* (4), 527–547.

Batanero, C., Vera, O. D., y Díaz, C. (2012). Dificultades de estudiantes de Psicología en la comprensión del contraste de hipótesis. *Números*, *80*, 91-101.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. En A. Bishop, K. Clement, C. Keitel, J. Kilpatrick, & A. Y. L. Leung (Eds.), *Third international handbook on mathematics education* (pp. 643-689). Nueva York: Springer.

Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69). Nueva York: Springer.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Noortgate, W. V. y Onghena, P. (2009) How confident are students in their misconceptions about hypothesis tests? *Journal of Statistical Education*, *17*(2), 18. DOI: 10.1080/10691898.2009.11889514

CCH (2016). *Programas de estudio. Área de Matemáticas. Estadística y Probabilidad I-II*. Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM. Recuperado de https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/ESTADISTICA_PROBABILIDAD_I_II.pdf

Chance, B., delMas, R. y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). The role of design in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Gal, I. (2004). Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47–78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2), 237-284.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School-Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 235- 246). A Joint ICMI/IASE Study.

Inzunza, S. y Jiménez, J. (2013). Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16* (2), 179-211.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Nueva York: Cambridge University Press.

Lee, H. (2018). Probability Concepts Needed for Teaching a Repeated Sampling Approach to Inference. En: Batanero C., Chernoff E. (eds) *Teaching and Learning Stochastics. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_6

Lee, H., Angotti, R., & Tarr, J. (2010). Making comparisons between observed data and expected outcomes: Students' informal hypothesis testing with probability simulation tools. *Statistics Education Research Journal*, *9*(1), 68–96.

Liu, Y., & Thompson, P. W. (2009). Mathematics teachers' understandings of protohypothesis testing. *Pedagogies*, *4*(2), 126-138.

Ministerio de Educación (2007). *The New Zealand Curriculum*. Wellington, Nueva Zelanda: Learning Media Limited.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 5-19.

Saldanha, L. y Thompson, P. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(3), 257-270.

Saldanha, L. y Thompson, P. (2007). Exploring Connections between Sampling Distributions and Statistical Inference: an analysis of students' engagement and thinking in the context of instruction involving repeated sampling. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 270-297.

Sánchez, E., García-Ríos, V.N. y Mercado, M. (2017). Desarrollo del razonamiento sobre pruebas de significación de estudiantes de bachillerato en un ambiente tecnológico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 447-456). Zaragoza: SEIEM

Shaughnessy, M. J., Chance, B. y Kranendonk, H. (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cómo citar este artículo: SILVESTRE CASTRO, E., & URREA BERNAL (2021), M. A. Análisis del razonamiento de estudiantes de bachillerato frente a una tarea introductoria al contraste de hipótesis. *SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. (5), 1, pp. 16-34.*

Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp. 35-49
SahuarUS

Construcción de función como relación entre magnitudes variables: diseño de enseñanza desde la teoría APOE

Román Gpe. Esquer Armenta[1] y César Fabián Romero Félix[2]
e-mail: [1]ing.romanrgea@hotmail.com, [2]cesar.romero@unison.mx
Universidad de Sonora

Resumen
Se presenta un reporte de experiencia en el aula, como parte de un proyecto de intervención didáctica para favorecer la construcción del concepto de función a partir de la unión significados parciales. Se plantea construir este objeto matemático como la coordinación de varios significados, apoyados en diversas representaciones; de manera acorde al enfoque de Cálculo Cualitativo y en contraste con la marcada prioridad a la Teoría de Conjuntos y el uso de expresiones analíticas. Enfocados en el aprendizaje de alumnos de ingeniería y ciencias aplicadas, se analiza la problemática del aprendizaje de funciones a partir del análisis de libros de texto y la implementación de un instrumento diagnóstico; se concluye la necesidad de una intervención didáctica que facilite el desarrollo de uno de los significados parciales y la coordinación de los distintos procesos mentales asociados al concepto de función, en términos de la teoría APOE.
Palabras clave: Función, Diseño de enseñanza, APOE, GeoGebra

Recibido 24 de febrero del 2021
Aceptado 13 de abril de 2021

Introducción

El siguiente reporte muestra los resultados de una experiencia áulica, como parte de un proyecto de intervención didáctica sobre el concepto de función, dirigida a estudiantes de Cálculo Diferencial en el nivel educativo superior, particularmente en el área de Ingeniería. Aunque existe abundante literatura sobre investigaciones e intervenciones didácticas desde hace alrededor de medio siglo, los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo continúan siendo atendidos, ya que se sigue observando bajo desempeño académico en esta rama de las matemáticas, así como dificultades en su aprendizaje, algunas de estas atribuibles a un pobre entendimiento del concepto de función.

Uno de los elementos asociados a las dificultades de aprendizaje del tema es la complejidad del concepto en términos de la diversidad de concepciones y representaciones con las que se enfrentan los estudiantes, a quienes eventualmente se les exige el uso simultáneo de las mismas; así como el tránsito entre sus representaciones. En algunos estudios se analiza esta diversidad en términos de significados asociados al concepto a lo largo de su historia (Parra, 2015), mientras que en otros se analizan las definiciones o *imágenes mentales* que utilizan los estudiantes (Vinner & Dreyfus, 1989), en nuestro caso, reinterpretamos esta problemática a partir de los procesos mentales movilizados para resolver distintos tipos de problemas, observando que las manipulaciones específicas a distintos tipos de objetos matemáticos implican distintos esfuerzos mentales a realizar para resolver problemas asociados al concepto de función. De tal manera, proponemos definiciones de algunos significados parciales, en términos de tales procesos, y analizamos la complejidad de su aprendizaje en términos de su desarrollo de forma aislada o articulada por parte de los estudiantes.

Para mostrar la complejidad del aprendizaje de los distintos significados de función en el panorama actual de la enseñanza del Cálculo, partimos de un análisis de las distintas maneras en que aparece el concepto de función, en términos de las manipulaciones de otros objetos matemáticos; e identificamos su presencia en libros de texto, con lo que encontramos una exposición muy desbalanceada en términos de cuáles significados se favorecen, así como las relaciones entre ellos. A partir de este análisis, planteamos la necesidad de actividades de enseñanza para favorecer uno de los significados parciales menos atendido, *función como relación entre magnitudes variables* ya que nos parece que este significado es de los más útiles para estudiantes de ingeniería; y posteriormente atender las relaciones entre los diversos significados.

Antecedentes

Encontramos diversas publicaciones relacionadas con la dificultad que se presenta en estudiantes de nivel superior para aprender Cálculo, por citar algunos tenemos el de Artigue (1995), quien afirma que los problemas del acceso al cálculo se pueden organizar en tres grandes grupos: el primero asociado con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones), el segundo asociado a la conceptualización y formalización del límite y el último vinculado a la ruptura que debe realizarse entre el pensamiento algebraico y el trabajo técnico del cálculo. A la vez, declara que las dificultades asociadas al concepto de interés se relacionan con:

- Identificar lo que realmente es una función
- La identificación de la función depende directamente del registro de representación
- El enfoque conjuntista de la noción de función
- Los registros diferentes en la que se puede manipular este concepto

Esta lista de tipos de dificultades ilustra la complejidad del aprendizaje de funciones. En particular, en este artículo nos concentramos en la dificultad para distinguir qué es y qué no es una función y en que el enfoque conjuntista genera por sí mismo dificultades para los estudiantes.
Por otro lado, Dubinsky y Wilson (2013) describen también tipos de dificultades para el aprendizaje de función, analizando sus propiedades, definiciones, representaciones y manipulaciones, presentando las siguientes cuatro categorías:
Distinguir lo que es función, de lo que no es función
Sierpinska (1992) reporta que los estudiantes, incluso los que muestran un buen desempeño en los cursos de álgebra superior, piensan que una función debe definirse por una sola fórmula analítica, por ejemplo $f(x) = 5x - 2$ o $x^2 + y^2 = 49$. A su vez, investigaciones como la de Carlson (1998) y Clemente (2001), identificaron que la mayoría de los estudiantes forman la idea de que todas las funciones se pueden representar mediante el uso de una fórmula.
Otras dificultades asociadas al concepto, es la incapacidad de reconocer la función como representación de una colección de puntos discretos situados en el plano cartesiano (Markovitz, Eylon, & Bruckheimer, 1986), (Figura 1). Estas dificultades provocan un trazo erróneo de la curva correspondiente a la relación, lo anterior impacta al tratar de definir las regularidades que se presentan en la colección de puntos, así mismo, el comportamiento general de los puntos descritos.

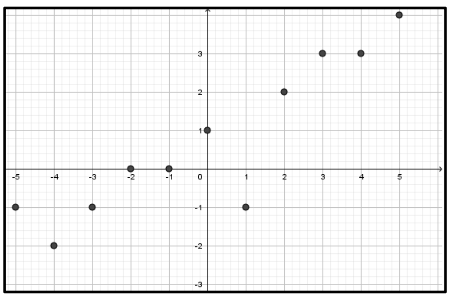


Figura 1 Grafica de dispersión de una relación

También está la creencia de que las funciones constantes no son funciones, como $f(x) = 5$, y la noción de que una función debe definirse mediante una única fórmula analítica y no por partes, de modo que una expresión como:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ x & si\ x = 0 \end{cases}$$

representa dos funciones (Carlson, 1998; Vinner & Dreyfus, 1989).

Entendimiento de la propiedad uno a uno

Existen investigaciones que afirman que los estudiantes necesitan que los elementos de dos conjuntos estén en una correspondencia de uno a uno, para determinar que existe una relación funcional. Lo anterior, muestra que hay confusión entre la condición de univalencia en la definición de función y la condición de singularidad en la propiedad uno a uno (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990; Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986), por ejemplo, para decidir si las relaciones ilustradas en la siguiente figura pueden ser funciones.

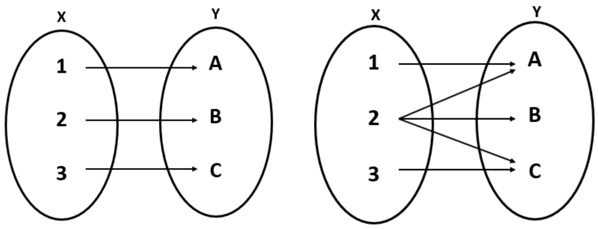
a)  b)

Figura 2 a) Conjunto con relación funcional y b) Conjunto que guarda una relación

Prueba de la línea vertical

La mayoría de los estudiantes creen que la prueba de línea vertical es una definición de función; lo anterior puede ocasionar dificultades conceptuales, como no poder interpretar la gráfica de una parábola que abre horizontalmente, $x = y^2$ (figura 3b), como una función, bajo la consideración de que la variable “y” representar un elemento del dominio y “x” un elemento del rango (Breidenbach et al., 1992).

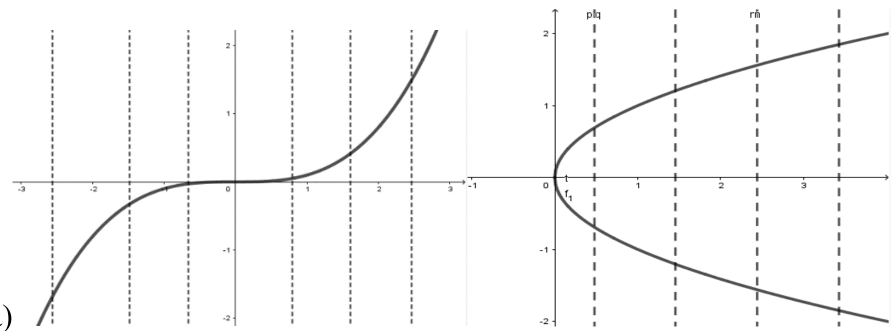
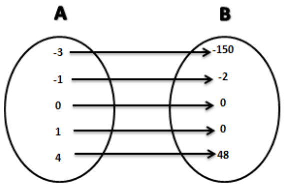
a)  b)

Figura 3 Aplicación del criterio de la recta vertical

Representaciones de la función

Las múltiples representaciones asociadas al concepto de función, como el diagrama sagital, expresión analítica, tabla y gráfica (figura 4), la manipulación de cada una de ellas, que exige distinto grado de abstracción, además, el manejo de distintas representaciones al mismo tiempo y el traspaso de una a otra, son las principales dificultadas ligadas el concepto. (Thompson, 1994, p. 39).

a) Conjuntista



b) Tabular

x	y
-5.0	-150.0
-4.0	-80.0
-3.0	-36.0
-2.0	-12.0
-1.0	-2.0
0.0	0.0
1.0	0.0
2.0	4.0
3.0	18.0
4.0	48.0
5.0	100.0

c) Algebraica

$$y = x^3 - x^2$$

d) Gráfica

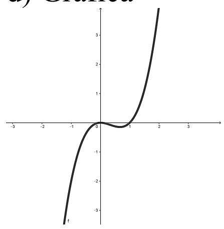


Figura 4 Representaciones asociadas al concepto de función, a) Conjuntista, b) Tabular, c) Algebraica y d) Grafica

Notación de función

Vinner y Dreyfus (1989) reportan dificultades por parte del estudiante con la notación funcional. Declaran que muchos estudiantes no están familiarizados con la terminología ni sus relaciones con los aspectos conceptuales de la noción matemática de la función. En particular, los estudiantes a menudo no entienden el concepto de variable y la notación $y = f(x)$, que en particular se manifiesta con la interpretación como producto de una variable "*f*" por una variable "*x*".

$$\overbrace{\underbrace{y}_{\text{Variable dependiente}} = f(\underbrace{x}_{\text{Variable independiente}})}^{\text{Expresión analítica de la función}}$$

Figura 5 Notación de función y sus componentes

Complejidad del significado de función

Observando las diferencias entre las distintas representaciones y manipulaciones del concepto de función, y las dificultades asociadas a éstas, coincidimos con Ramos, citado por Parra (2015, p.24) en que la noción de función es actualmente uno de los objetos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora. No obstante, es un concepto complejo debido a la multiplicidad de significados y de registros representativos que generan distintos niveles de abstracción.

Otras investigaciones como la de Zandieh, Ellis y Rasmussen (2017) muestran que el concepto función es de gran importancia para las matemáticas y continúa siendo problemático para los estudiantes de educación superior. En su análisis identificaron que los estudiantes que no contaban con una construcción del concepto función no podían identificarlo, ni aplicar sus propiedades en otras ramas de las matemáticas; a partir de una caracterización de los distintos significados de función como: *ecuación*, *relación de asignación*, *gráfica* y *tipos de variación*. A su vez, Maharaj (2013) identificó que los alumnos que solo contaban con una comprensión de función y derivada hasta un nivel operacional difícilmente podían resolver problemas relacionados con estos conceptos, mientras que alumnos con un significado *más completo* podían efectuar las distintas transformaciones de las funciones y sus derivadas, necesarias para la solución de problemas de ecuaciones diferenciales.

Los trabajos citados muestran que algunas dificultades para construir el concepto de función están relacionadas con la multiplicidad de significados parciales que es necesario desarrollar. De tal manera, en diversas investigaciones se sugiere la creación de actividades orientadas a favorecer la comprensión del concepto de función en distintos contextos sustentados por medios tecnológicos (por ejemplo, Maharaj, 2013; Goldenberg, Lewis y O'Keefe 2010). A continuación, respaldaremos tal sugerencia mediante el análisis de los materiales didácticos más comúnmente usados y la aplicación de un instrumento diagnóstico, elaborados en términos de la teoría APOE.

Marco teórico

La teoría APOE se centra en modelos de lo que podría estar pasando en la mente de un individuo cuando él o ella está tratando de aprender un concepto matemático y utiliza estos modelos para diseñar materiales de instrucción y /o para evaluar los logros de los estudiantes y fallas en el manejo de situaciones de problemas matemáticos (Figura 6) (Arnon et al., 2014, p.1)

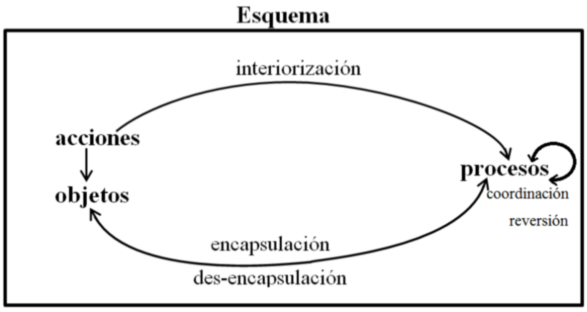


Figura 6 Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Traducida de Arnon et al., 2014, p. 18)

Se consideran cinco tipos de *abstracción reflexiva*: *interiorización*, *coordinación*, *reversión, encapsulación* y *des-encapsulación*. Estos son considerados mecanismos que dan lugar a las estructuras de tipo: *acción*, *proceso, objeto* y *esquema*. Una acción consiste en la transformación *externa* de objetos previamente concebidos, que requiere ser aplicada de forma explícita, en un orden fijo y guiada por instrucciones. Cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, ésta puede ser interiorizada en un proceso mental, lo cual consiste en construir una estructura mental que inicialmente obtiene el mismo resultado que el de la acción. Se dice que el individuo posee una concepción proceso del concepto cuando puede obtener o utilizar los resultados de los pasos de la acción, sin realizar las transformaciones externas (Arnon et al., 2014, p. 20).
Mientras que las acciones y procesos son transformaciones dinámicas de otro tipo de construcciones, los procesos pueden volverse entidades estáticas como resultado de la encapsulación. Cuando un individuo piensa en el proceso como un todo, susceptible de transformaciones sobre su totalidad, se dice que posee una concepción objeto, que se considera como el más importante para construir el conocimiento matemático (p. 21), al permitir la búsqueda de propiedades y relaciones con otros objetos.
A partir de ordenamiento coherente de las acciones, procesos y objetos surge la estructura *esquema,* la cual puede ser usada para dar soluciones a problemas en matemáticas. Esta estructura tiene la particularidad de ser concebida como un nuevo objeto; es decir de la misma manera cuando el proceso avanza y se coordina con otro proceso se logra concretar en un nuevo objeto, el esquema se logra cuando el objeto se tematiza y es considerado como un mecanismo que permite al individuo resolver un problema.
En este marco, una *descomposición genética* es un modelo hipotético y preliminar que describe el camino o los posibles caminos que puede seguir un individuo para construir el conocimiento matemático, en términos de las estructuras mentales y los mecanismos necesarios. Además, la descomposición genética es la base teórica para realizar diseño de intervención didáctica, los cuales a posteriori ayudaran a refinar la descomposición genética o validarla, siguiendo el ciclo de investigación APOE. (Arnon et al., 2014, p.27):

la descomposición genética se presenta comúnmente como el resultado de haber implementado el ciclo de investigación y en específico del análisis teórico.

Metodología

Este estudio se organiza con base en el ciclo de *investigación* de APOE, el cual consta de tres componentes: *análisis teórico*; *diseño e implementación de enseñanza*; y *recolección y análisis de datos* (figura 7) (Arnon et al., 2014, p.94).

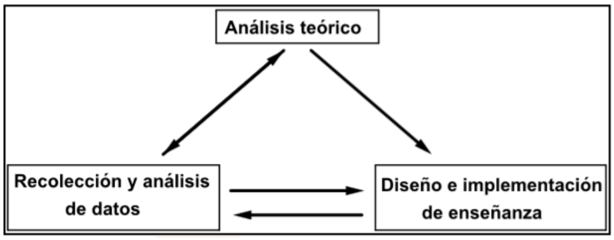


Figura 7 Ciclo de investigación (Traducida de Arnon et al., 2014, p.94)

Como lo indican las flechas en la figura anterior, los tres componentes del ciclo de investigación se influyen mutuamente. El análisis teórico impulsara el diseño y la implementación de la instrucción a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales declaradas requeridas por el análisis teórico. Las actividades y ejercicios están diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlas en procesos, encapsular procesos en objetos, y coordinar dos o más procesos para construir procesos nuevos. La implementación de la instrucción proporciona una oportunidad para la recopilación y el análisis de datos. Enseguida se muestra las etapas implementadas del ciclo de investigación y las actividades realizadas en cada una.

Análisis teórico

Durante el desarrollo de este apartado se pretende dar respuesta a los siguientes cuestionamientos: 1) *¿Qué significa comprender un concepto matemático?* y 2) *¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo?* La forma de dar una respuesta parcial a las preguntas es mediante el análisis de libros de texto, la experiencia de los investigadores y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que puedan contribuir al diseño de un camino viable en la construcción del concepto. Estos planteamientos proporcionarán las consideraciones necesarias para comprender el concepto matemático, así como las implicaciones necesarias para que este se construya (Arnon et al., 2014, p.94). El objetivo principal del análisis teórico consiste en diseñar una descomposición genética, esto para determinar un camino viable para que un estudiante desarrolle el concepto, tomando en cuenta las construcciones y mecanismos mentales necesarios.

Diseño e implementación de enseñanza.

La etapa de instrucción es guiada bajo el ciclo de enseñanza ACE: (A) actividades, (C) discusión en el aula y (E) ejercicios realizados fuera de clase (figura 8) (Asiala et al., 1996). Las actividades, que constituyen el primer paso del ciclo, están diseñadas para fomentar el desarrollo de las estructuras mentales por parte de los estudiantes mediante un análisis APOE. En el aula, el profesor guía a los alumnos a reflexionar sobre las actividades y su relación con los conceptos matemáticos que se estudian. Los estudiantes hacen esto realizando tareas matemáticas. El grupo, estudiantes y profesor, participa en una discusión sobre sus resultados y escuchan las explicaciones de los significados matemáticos de lo que están trabajando. En la misma etapa de discusión, el profesor puede formalizar los conceptos discutidos, presentando definiciones y el lenguaje o métodos sugeridos en el currículo, es decir, la institucionalización del conocimiento en clase.

Los ejercicios de tarea son problemas bastante estándar. Refuerzan los conocimientos obtenidos en las actividades y discusiones en el aula. Los estudiantes aplican este conocimiento para resolver problemas estándar relacionados con el tema que se está estudiando.

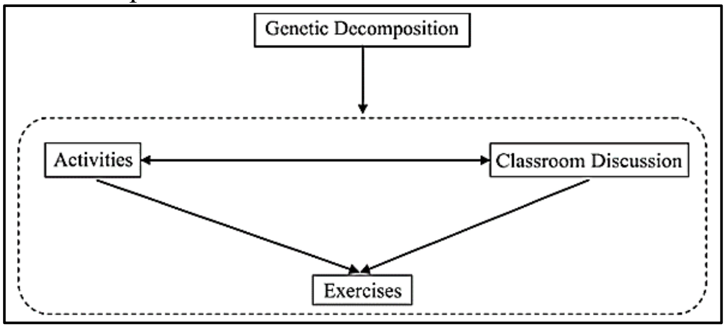


Figura 8 Ciclo de enseñanza ACE

Recolección y análisis de datos.

La etapa de análisis de datos debe girar alrededor de los siguientes cuestionamientos: 1) *¿Los estudiantes desarrollaron las construcciones mentales previstas por el análisis teórico?* y 2) *¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el contenido matemático?*

Dar respuesta a estos cuestionamientos permite evaluar tanto al modelo teórico de construcciones mentales como al diseño de enseñanza. También, brinda información sobre la necesidad de realizar refinamientos en la descomposición genética o la instrucción, lo que genera una nueva oportunidad para el análisis de datos. La reimplementación del ciclo proporcionara una descomposición genética refinada que cada vez se acerca más al desarrollo eficiente del concepto (Arnon et al., 2014, p. 94).

Flexibilidad del ciclo

Las relaciones entre las etapas del ciclo de investigación permiten diversos grados de libertad para la implementación de estudios sobre el aprendizaje y la enseñanza. En este reporte, se presenta una implementación del análisis teórico, recolección y análisis de datos, para el futuro diseño e implementación de actividades de enseñanza.

Análisis Teórico: Significados Parciales del concepto de Función

Como etapa inicial del análisis teórico, se han reinterpretado investigaciones previas sobre el *significado holístico* del concepto de función (Parra, 2015), donde se caracterizan seis significados parciales de función:

La función como ***correspondencia***: Es el proceso de asignar elementos de un conjunto a elementos de otro conjunto, mediante el desarrollo de ciertas operaciones que permite asociar a los dos conjuntos, “implícitamente en forma de correspondencias numéricas definidas por operaciones aritméticas” (Parra 2015, p. 4).

Un ejemplo que permite observar la función como correspondencia son las escalas de medidas de temperatura como los Fahrenheit y los Celsius, como se muestra en la siguiente tabla. En estas se puede percibir que a un componente del conjunto de los °C le corresponde un elemento de conjunto °F y dicha asignación de por medio de la ecuación antes mencionada.

Tabla 1 Conversión entre temperaturas de centígrados a Fahrenheit

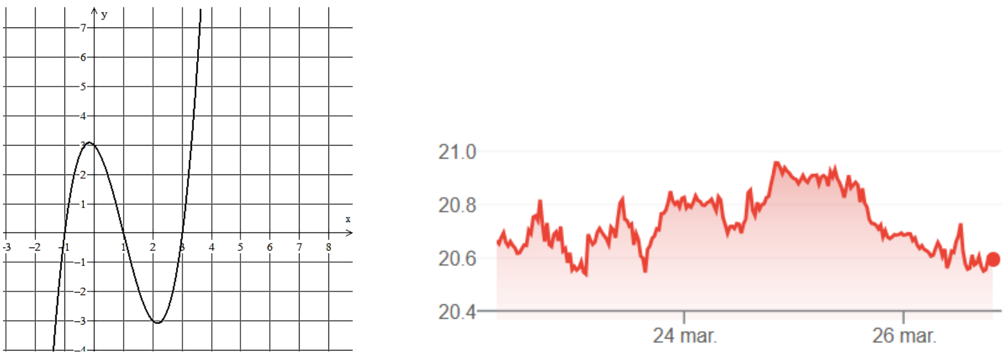
Temp. en °C	0	45	40	100	50	25
Temp. en °F	32	113	104	212	122	77

La función como ***relación entre magnitudes variables***: Es una relación de covariación entre magnitudes de fenómenos físicos y por ser de esta índole las cantidades son variables; puesto que, si una de ellas cambia, esto provoca un cambio en la magnitud con la que existe una relación.
La forma en la que se puede percibir la relación entre magnitudes es, por ejemplo, considerando la situación en la cual un objeto es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s desde el suelo. Tomado en cuenta la ecuación $x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$ y consideramos, para efectos prácticos, que la aceleración debido a la gravedad es de 9.8 m/s, la ecuación que expresa la altura(metros) del objeto en términos del tiempo(segundos), es $x_f = 20t - 4.9t^2$. Para seguir la notación usual de los cursos de física, esta ecuación se puede escribir como $h = 20t - 4.9t^2$, en la que se ha usado la letra h en lugar de x_f. Lo anterior evidencia que si la magnitud temporal (tiempo) cambia, la posición (altura) del objeto también lo hace:

Tabla 2 Relación entre tiempo y altura

Tiempo (seg.)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
Altura (m)	0	8.77	15.10	18.97	20.40	19.37	15.50	9.97	1.60

La función como ***curva en el espacio***: Es un objeto en el plano o el espacio cartesiano, compuesto de puntos que plasman de forma visual la relación matemática entre determinados valores numéricos sobre los ejes. Por ejemplo, la gráfica de una función polinomial (figura 9a), se puede realizar mediante la obtención de una colección de puntos con coordenadas *(x, y)* relacionadas por medio de alguna expresión álgebra, digamos $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$; por otro lado, se podría tener una curva a la que no sea posible asignar una fórmula *y=f(x)*, como al valor del dólar (USD) con respecto al peso (MXN) pero que de la misma manera como objeto en el plano represente la relación entre la variación de una variable *y* con respecto a otra variable *x* (Figura 9b).

a)


b)

Figura 9 Función como curva en el plano

La función como ***expresión analítica***: Es un tipo de expresión algebraica que declara la relación entre variables y constantes.
En el siguiente caso es necesaria la construcción de función como expresión analítica, porque la expresión tiene la capacidad de mostrar las relaciones numéricas que se presentan en el problema. Por ejemplo, un sistema de cómputo tiene10 años de uso y su valor actual es de \$23000, pero hace cuatro años valía \$41400. Considere que el valor del sistema varía linealmente con el tiempo y determine:
La ecuación particular que relaciona el valor del sistema con el tiempo transcurrido.
$V(t) = -4600t + 6900$, al cumplir $V(10) = 23000$ y $V(6) = 41400$

La función como ***correspondencia arbitraria***: Es una relación abstracta entre dos conjuntos, sin conocer la forma en la que se realiza la asignación entre sus elementos.
Se puede presentar la noción de función como correspondencia arbitraria en el estudio meteorológico. Esto debido a que a cada hora del día le corresponde un porcentaje de humedad o velocidad del viento y esta asignación se realiza sin ninguna operación (figura 10).

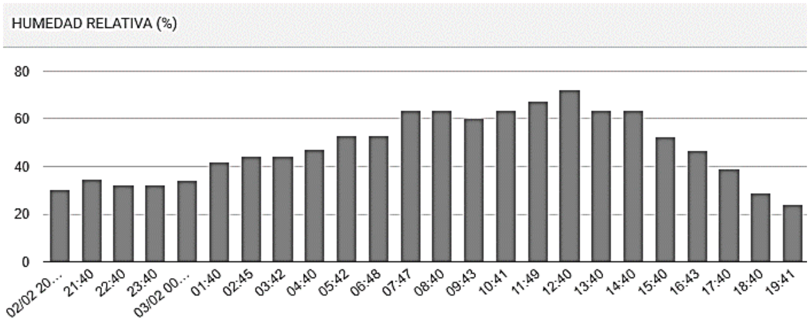


Figura 10 Gráficas de Tiempo Real en la estación Aeropuerto (www.meteored.mx/hermosillo/historico)

Es importante aclarar que la correspondencia arbitraria no es necesariamente graficable, por ejemplo, en el caso de las funciones definidas a partir de la distribución de números primos en la recta numérica.
La función a partir de la ***Teoría de Conjuntos***: Una función es una relación de una variable que cumple varias propiedades: un subconjunto R del producto cruz de X con Y ($R \subseteq X \times Y$) es una función de X a Y si para cada elemento que pertenece a X ($\forall x \in X$) existe exactamente una y que pertenece a Y ($\exists!\, y \in Y$), tal que la pareja (x, y) está en R (Hamilton, 1982).
Un ejemplo de la implementación de esta definición seria determinar si para los conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$, una relación $R = \{(1, a), (2, b), (2, d), (3, c), (4, b)\}$ puede ser considerada como función, e indicar cuál sería el dominio y el rango (figura 11).

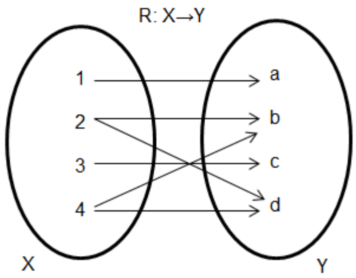


Figura 11 Diagrama sagital de función

Análisis de la Presencia de Significados Parciales en Libros de Texto
Dentro del análisis teórico, evaluamos la presencia de estos significados en libros de texto de Cálculo que son propuestos en la bibliografía básica del programa de la asignatura correspondiente de la Universidad de Sonora, como: *El cálculo* (Leithold, 1994), *Cálculo con geometría analítica* (Swokowski, 1988), *Cálculo diferencial e integral* (Ayres, 1971), *Cálculo con geometría analítica* (Edwards & Penney, 1994) y *Cálculo aplicado* (Hughes-Hallett, et al., 2004); identificando los significados que son favorecidos en cada uno, las relaciones que se establecen entre ellos, así como las representaciones que se utilizan. El análisis se centra en las definiciones, ejemplos y problemas propuestos en las primeras secciones de los libros, que son en las que se introduce este concepto, antes de conceptos más avanzados como el de derivada. El cual, es sintetizado en las siguientes gráficas.

En los materiales revisados, en particular encontramos la intención de utilizar todos los significados parciales asociados a este concepto, no obstante, existe una clara tendencia a favorecer el significado de relación entre conjuntos y el de expresión analítica, subordinado a estos, el de curva en el espacio y el de correspondencia. También se observó que, aunque existe la presencia de los significados parciales declarados anteriormente, en la parte inicial del análisis teórico, estos no son igualmente utilizados en el desarrollo del tema, siendo el significado de expresión analítica el que cuenta con mayor presencia, en todos los aspectos analizados; para ilustrar mejor lo declarado anteriormente, se proporciona el concentrado de este análisis en la (Figura 12).

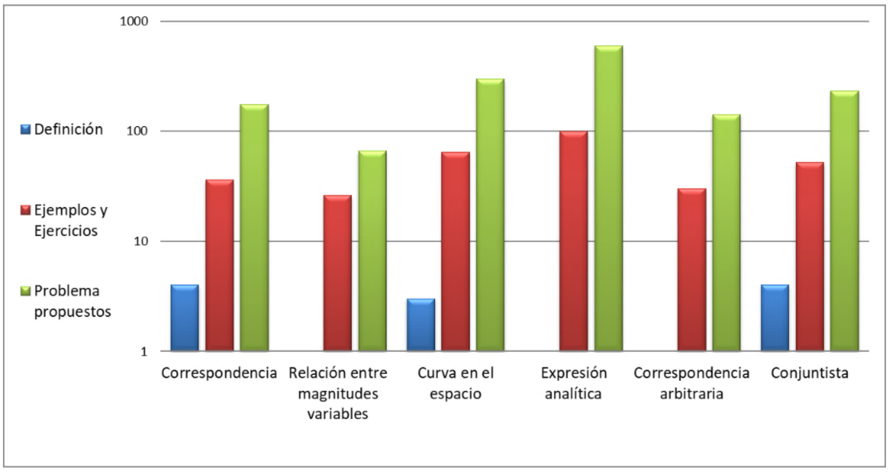


Figura 12 Significados presentes en los libros de texto

El significado de relación entre magnitudes variables es generalmente el menos atendido. Hay que mencionar que, en la articulación de los significados, se observa una tendencia global a subordinarlos al de expresión analítica, siendo la mayoría de las relaciones establecidas *desde y hacia* este significado; siendo nuevamente el de relación entre magnitudes el menos favorecido (figura 13).

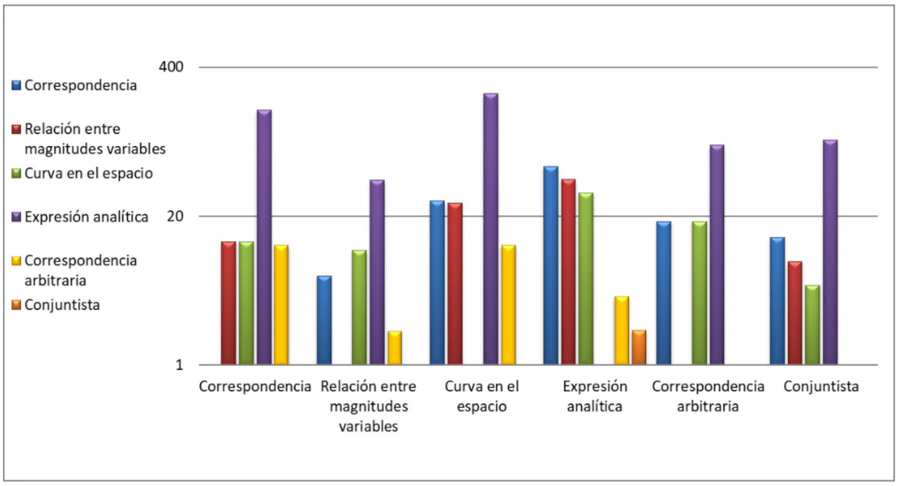
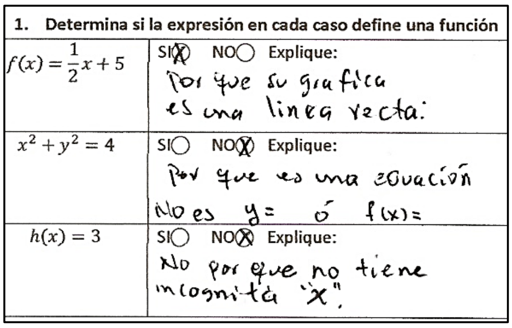


Figura 13 Relaciones entre significados abordadas en los libros de texto

Análisis y recolección de datos: Resultados de un cuestionario diagnóstico.

Se diseñó un cuestionario para exhibir el grado de conocimiento del concepto de función, el cual evalúa si los alumnos reconocen el significado de función como correspondencia, relación entre magnitudes variables,

expresión analítica, y como curva en el espacio en situaciones específicas. Al mismo tiempo, permite valorar el grado de construcción que se tiene del concepto, en particular, los niveles acción y proceso.
A continuación, se presenta uno de los ítems del examen diagnóstico, el cual pretende valorar si el alumno puede identificar a la función como expresión analítica, así mismo, el examen contiene otros reactivos para el resto de los significados parciales asociados al concepto en cuestión (figura 14).



1. Determina si la expresión en cada caso define una función	
$f(x) = \frac{1}{2}x + 5$	SI NO Explique: Por que su grafica es una linea recta:
$x^2 + y^2 = 4$	SI NO Explique: Por que es una ecuación No es y= ó f(x)=
$h(x) = 3$	SI NO Explique: No por que no tiene incognita "x".

Figura 14 Identificación de función como expresión analítica

En el análisis de las respuestas del diagnóstico, se observó que la noción de función con mayor grado de construcción es el de curva, seguido por el de expresión analítica, esto posiblemente debido a que, en cursos previos, son estos a los que más tiempo se les asigna para que los jóvenes puedan desarrollar su significado. Además, se observa una tendencia a manipular el significado de función como correspondencia, siendo el significado más relegado el de relación entre magnitudes variables, posiblemente siendo estos dos los menos estudiados (Tabla 3).

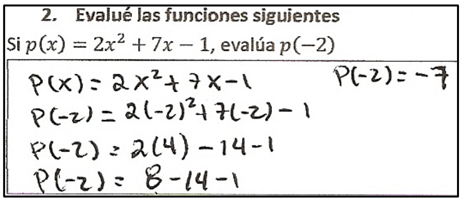
Tabla 3 Porcentaje de alumnos que logran reconocer los significados de función.

Significado	*Correspondencia*	*Relación entre magnitudes variables*	*Curva en el espacio*	*Expresión analítica*	*Núm. De alumnos*
Porcentaje (%)	*66*	*60*	*75*	*71*	*33*

En este apartado, se observó que los alumnos que lograban responder correctamente, tendían a utilizar únicamente criterios sobre la representación para decidir si lo planteado es o no función, como casos específicos: en lugar de utilizar el significado de expresión analítica se limitaban a evaluar la representación de identidad algebraica; igualmente utilizaron la forma de la curva en el plano, su representación gráfica, para tomar la decisión, en lugar de usar la noción de que para cada valor de x existe un único valor de y tal que $y = f(x)$. En contra parte, los alumnos que tendieron a responder incorrectamente no reconocían a la función si la expresión analítica no tenía variables. Mencionaban que existe una relación, sin declarar las características de ésta y si la expresión era lineal, declaraban que ésta es función, aunque fuera una expresión de una sola variable o de más de dos variables.
En el caso del significado como curva en el espacio, algunos alumnos mostraron la presencia de éste al argumentar que, *para cada valor de x, hay un solo valor de y*, y al aplicar el *criterio de la recta vertical*; sin embargo, no argumentaron porque esto es válido. En el caso en que los alumnos respondían incorrectamente, se notó que los alumnos utilizaban la idea de continuidad del trazo para decidir si una curva es función o no, o aplicaron erróneamente el criterio de unicidad ligando el grado del polinomio que genera la curva para decidir.

El último significado que se analizó es el significado de función como relación entre magnitudes variables, los alumnos que pudieron identificar a la función en este significado, solo lograban argumentar su respuesta con el hecho de que existe una variable para cada magnitud, en el caso contrario, los alumnos externaban que, si la relación mostraba un comportamiento creciente, eso basta para tomar la decisión. En la mayoría de los casos, una supuesta *proporcionalidad entre las magnitudes* fue utilizada como sinónimo de relación funcional, apoyándose en la percepción de que, si una magnitud crece la otra también, y viceversa.

Para la evaluación del nivel acción en los significados, se elaboraron ítems como el que se muestra a continuación (Figura 15), los cuales pretenden valorar si el alumno tiene la capacidad de trabajar en casos particulares, evaluando la expresión en valores definidos.



2. Evalué las funciones siguientes

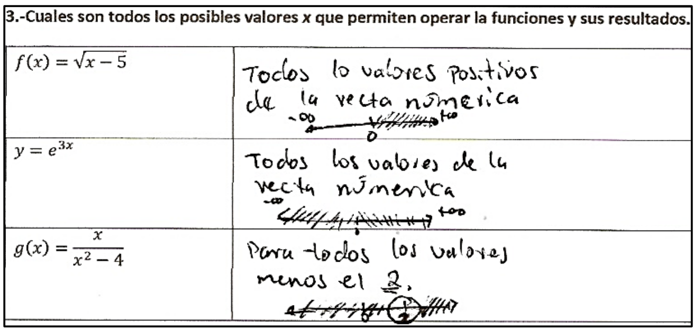
Si $p(x) = 2x^2 + 7x - 1$, evalúa $p(-2)$

$P(x) = 2x^2 + 7x - 1$ $P(-2) = -7$
$P(-2) = 2(-2)^2 + 7(-2) - 1$
$P(-2) = 2(4) - 14 - 1$
$P(-2) = 8 - 14 - 1$

Figura 15 Reactivo de nivel acción del significado de función como expresión analítica.

De estos reactivos, se infiere el nivel de desarrollo de las concepciones de tipo acción para los distintos significados de función, se percibe una relación entre el porcentaje de alumnos que identifican el significado función y el porcentaje del grado de construcción de acción que poseen.

De manera similar, se diseñaron ítems con el objetivo de verificar el grado de construcción del significado, a un nivel proceso, los cuales evalúan si los alumnos tienen la capacidad de generalizar las propiedades de cada uno de los significados, ejemplo de estos, se muestra en la figura 16.



3.-Cuales son todos los posibles valores *x* que permiten operar la funciones y sus resultados.

$f(x) = \sqrt{x-5}$	Todos lo valores positivos de la recta númerica
$y = e^{3x}$	Todos los valores de la recta númerica
$g(x) = \frac{x}{x^2-4}$	Para todos los valores menos el 2.

Figura 16 Reactivo de nivel proceso del significado de función como expresión analítica

Estos reactivos dieron indicadores de un bajo porcentaje de construcción a nivel proceso para el conjunto de los significados parciales, esto causado en la mayoría de los casos, porque los alumnos no han alcanzado a realizar las acciones para cada uno de los significas estudiados, evaluados y por ende los procesos (Tabla 4). Los datos muestran que el nivel acción con mayor desarrollo, es para el significado de expresión analítica, esto no significa que los alumnos no presentaron algún grado de deficiencia con esta construcción. La acción del significado anterior es precedida por el de correspondencia y se presenta en situaciones muy similares; después, para curva en el espacio, los jóvenes apenas pudieron identificar puntos que pertenecen a la una curva; y finalmente, relación entre magnitudes variables se muestra como el más relegado (Tabla 4).

Tabla 4: porcentaje de alumnos que muestra una concepción acción o proceso del concepto función en sus distintos significados.					
Acción	***Correspondencia***	***Relación entre magnitudes variables***	***Curva en el espacio***	***Expresión analítica***	***Núm. De alumnos***
Porcentaje (%)	*60*	*54*	*59*	*78*	*33*
Proceso	*Correspondencia*	*Relación entre magnitudes variables*	*Curva en el espacio*	*Expresión analítica*	*Núm. De alumnos*
Porcentaje (%)	*57*	*54*	*65*	*9*	*33*

- Función como expresión analítica: los alumnos no pueden definir el conjunto de valores con la que es posible operar las expresiones.
- Función como curva en el espacio: no pueden predecir cuál será la forma que esta tendrá.
- Función como correspondencia: no pueden predecir cuál va a ser la tendencia de los datos.
- Función como relación entre magnitudes variables: no reconocen el tipo de relación que presentan las magnitudes que se está manipulado.

Conclusiones

Siendo numerosas las investigaciones sobre los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, ya que en esta rama de las matemáticas se sigue presentando un bajo rendimiento académico, identificamos esta problemática con un pobre entendimiento del concepto de función, en términos del desarrollo de los distintos significados parciales y sus relaciones.

Lo anterior coincide con lo exhibido en el desarrollo de la primera etapa del ciclo de investigación APOE, muestra que el concepto de función es complejo por su carácter unificador, en el sentido de que el proceso *general* de función unifica sus múltiples significados y representaciones. Según el marco APOE, esto se reflejaría en la necesidad de construir acciones y procesos para cada significado y luego coordinar estos procesos para poder tener un proceso de función que incluya a todos.

Por otro lado, la revisión de los materiales propuestos de apoyo en la bibliografía básica de un curso muestra que estos no promueven los significados equitativamente; especialmente el identificado como el más útil para las carreras de ingeniería, por su aplicabilidad en problemas de magnitudes físicas y químicas, el de función como relación entre magnitudes variables. También, se identifica que alumnos de un primer curso de Cálculo no cuentan con las construcciones de acciones y procesos para los distintos significados; lo cual impide que en el inicio del curso de Cálculo se trabaje a nivel proceso, o se suponga la existencia del proceso unificado. Es por ello y con la finalidad de avanzar en esta dirección, concluimos que es necesario el diseño de actividades que: 1) promuevan el significado más útil para las carreras de ciencias aplicadas; 2) favorezcan coordinaciones con los otros significados del concepto; 3) impulsen el uso de distintas representaciones y conversiones entre ellas para el concepto función; y 4) implementen el uso de tecnología como medio para apoyar la construcción del concepto de función de forma dinámica. Lo cual consideramos puede llevarse a cabo desde una perspectiva similar a la del *Cálculo Cualitativo* (Stroup, 2002), en la que el estudiante construye su compresión y desarrolla habilidades sobre los elementos de la disciplina, con actividades de manipulación de componentes concretos como antecedente al trabajo con elementos abstractos.

Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca número 638340 del programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education. Nueva York: Springer.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, *1*, 97-140.

Ayres, F. (1971). Calculo Diferencial e Integral. Madrid. España: Artes gráficas EMA.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics, 23, 247–285.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education III (pp. 114–162). Washington, DC: Mathematical Association of America

Dubinsky, E., & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 83-101.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del valle. (Traducido por Myriam Vega Restrepo).

Edwards & Penny (1996). *Calculo con geometría analítica*. Madrid. España: Prentice Hall Hispanoamericana.

Goldenberg, P., Lewis P. & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of an understanding of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 235-260). Washington: Mathematical Association of America.

Hamilton, A. G. (1982). *Numbers, sets and axioms: the apparatus of mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Hughes-Hallet, D., Gleason, A., Lock, P., Flath. D., … Trash, J. (2004). *Calculo aplicado*. DF. Mexico; Compañía Editorial Continental.

Leithold, L. (1994). *El cálculo*. DF. Mexico: Oxford University Press

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. Review of Educational Research, 60(1), 1–64. Lovell, K. (1971). Some aspects of the growth of the concept of a function. In M. F. Rosskopf, L. P. Steffe, & S. Taback (Eds.), Piagetian cognitive development

Maharaj, A. (2010). An APOS Analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras, 71*, 41-52.

Markovitz, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. For the Learning of Mathematics, 6(2), 18–24.

Parra Y. (2015). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función (Tesis de maestría no publicada). Universidad de los Lagos, Santiago de Chile.

Zandieh M, Ellis J. & Rasmussen C. (2017) Characterization of a unified notion of mathematical function: the case of high school function and linear transformation. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 21–38.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), The concept of functions: Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 25–28). United States: The Mathematical Association of America.

Stroup M. (2002). Understanding qualitative calculus: a structural synthesis of learning research, *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 7, 167–215.

Swokowski, E. (1988). *Calculo con geometría analítica*. DF. México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), Research in collegiate mathematics education (pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.

Cómo citar este artículo: Romero Félix, C. F., & Esquer Armenta, R. G. CONSTRUCCIÓN DE FUNCIÓN COMO RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES VARIABLES: DISEÑO DE ENSEÑANZA DESDE LA TEORÍA APOE. *SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS,* (5),1, pp. 31-49.

Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp- 50-63
SahuarUS

Pensamiento geométrico: una experiencia de trabajo con profesores de matemáticas de secundaria

María Antonieta Rodríguez-Ibarra[1] y Gisela Montiel Espinosa[2]
e-mail: [1]mariaantonieta.rodriguez@unison.mx, [2]gmontiele@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Resumen
Reconociendo que una parte importante del pensamiento matemático, el cual se busca promover en los estudiantes en su paso por las aulas de educación básica, es el pensamiento geométrico, se inició una investigación alrededor de éste con profesores de matemáticas de secundaria en México. Después de identificar que la matemática escolar tiende a priorizar procesos aritméticos y algebraicos, dejando de lado los estrictamente geométricos, se diseñaron situaciones de aprendizaje con sustento socioepistemológico que buscan promover, vía tareas no convencionales, el desarrollo del pensamiento geométrico. Presentamos la experiencia de trabajar una de las situaciones diseñadas con un grupo de profesores en servicio, para lo cual se utilizó una metodología específica de desarrollo docente.
Palabras clave: Pensamiento geométrico, profesores de matemáticas, escuela secundaria, confrontación-resignificación, saberes docentes.

Recibido 7 de febrero de 2021
Aceptado 12 de abril de 2021

Introducción

En México, el estudio de la geometría se inicia en el nivel básico, el cuál comprende preescolar, primaria y secundaria (de los 4 a los 15 años). Al ser una parte de las matemáticas presente en gran parte del currículo escolar, se espera que los estudiantes que hayan cursado este nivel tengan las competencias matemáticas que marca el perfil de egreso y en particular, que hayan desarrollado un pensamiento geométrico que les permita resolver problemas acordes a su nivel.

Sin embargo, algunas evaluaciones estandarizadas aplicadas a los estudiantes muestran resultados poco favorables. Por mencionar el caso de una prueba nacional representativa, los resultados de la prueba PLANEA 2017, aplicada a estudiantes de 3er grado de secundaria, reportan que solo un 8.6% de los estudiantes se ubican en el nivel III de logro; en el cual se establece que deben "resolver problemas relativos con la imaginación espacial (sólidos de revolución)" (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2017, p. 10).

La problemática principal radica en que la matemática escolar tiende a priorizar las aproximaciones aritméticas (en el nivel básico) y algebraicas (en el nivel medio) cuando se abordan los temas geométricos (Sinclair y Bruce, 2015; Sinclair, Cirillo y de Villiers, 2017); dejando de lado aquellos vinculados con la forma, espacio y medida, que es uno de los ejes en los que se divide la educación matemática en secundaria y donde se abordan principalmente los contenidos geométricos. Esto provoca que los diagramas, mapas, gráficos o figuras se conviertan, en el mejor de los casos, en representaciones ilustrativas de los conceptos matemáticos. Es decir, la geometría escolar no da la oportunidad de desarrollar el pensamiento geométrico porque está centrada en el dominio de objetos (definiciones, técnicas y algoritmos), cuya institucionalización, es predominantemente aritmética o algebraica.

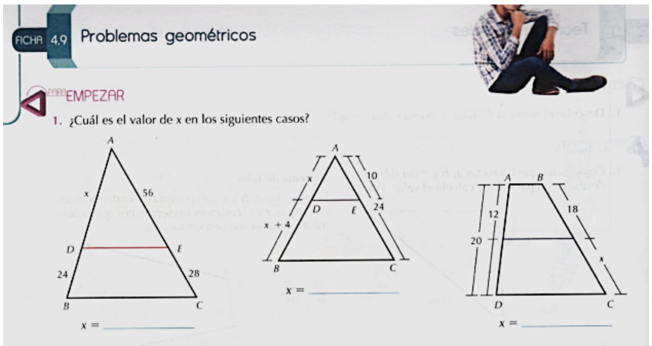
Dado este panorama, se reconoce necesario generar escenarios de trabajo con profesores en donde se cambié la perspectiva de investigación, es decir, no centrarse sólo en la forma cómo enseñan los profesores y cómo aprenden los estudiantes sino orientada a atender el qué enseñamos y qué aprendemos, cuando abordamos los contenidos geométricos. Para ir más allá de la descripción del estado actual, planteamos hacerlo modificando eso que tradicionalmente se enseña, en un escenario de trabajo con profesores de matemáticas de secundaria en servicio; poniendo énfasis en el trabajo geométrico.
Varias interrogantes surgen al tomar esta perspectiva: ¿cómo se da este cambio de trabajo con el profesor?, ¿confrontar los acercamientos aritmético/algebraico con el trabajo geométrico, enriquece la práctica del profesor?, ¿se provoca un proceso de desarrollo del pensamiento geométrico?, ¿se movilizan otros conocimientos del profesor al poner atención y modificar 'el qué enseñamos'?
Para acotar nuestro objeto de estudio y elegir la pregunta específica de investigación, hubo que documentar con detalle el fenómeno y elegir con cuidado los componentes teóricos de la investigación.

1 Geometría escolar: abandono del trabajo geométrico

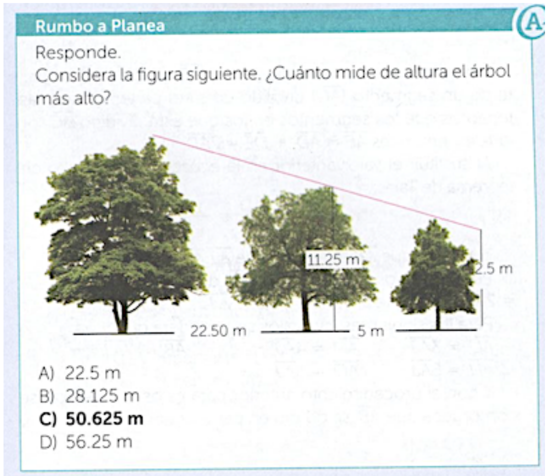
La geometría ha formado parte de la matemática escolar, sin embargo ha sufrido, al igual que otros contenidos curriculares, modificaciones a lo largo del tiempo. En este sentido se señala que:

> …se ha priorizado la enseñanza de la geometría analítica, haciendo uso de herramientas algebraicas y dejando de lado la visualización de objetos geométricos y sus propiedades y es este aporte visual lo que añade a la geometría un factor que no se debe descuidar sobre todo en la resolución de problemas. (Mammana y Villani, 1998, p. 4)

Estos autores también señalan que para tener un impacto en las aulas en distintos niveles con relación al estudio de la geometría, se deben de considerar diferentes aspectos al momento de la enseñanza, tales como: lo visual, computacional, algebraico y diferentes aplicaciones.
En muchos salones de clase, las construcciones con regla y compás han desaparecido, es decir, se ha abandonado el trabajo geométrico, priorizando otros como el algebraico; a pesar de que éste es una buena manera de aprender a analizar propiedades geométricas, nociones como congruencia, semejanza y simetría, construidas desde el trabajo geométrico, se consideran fundamentales para promover la argumentación, la cual es una de las competencias matemáticas a desarrollar en el nivel básico de nuestro país.
La matemática escolar no da la oportunidad de desarrollar el pensamiento geométrico porque está centrada en el dominio de objetos, cuya institucionalización, es predominantemente algebraica. Desafortunadamente, escolarmente sí se demanda de este pensamiento, sobre todo en las evaluaciones de ingreso a los niveles medio y superior, así como en las pruebas estandarizadas, nacionales e internacionales.
Por ejemplo, en la Figura 1a), se muestra un fragmento del libro *Matemáticas 3* (Matías, 2017), donde se solicita al estudiante el cálculo de un valor faltante en un problema enmarcado en un contexto intramatemático (evidentemente no cotidiano). Por otro lado, en la Figura 1b), se muestra un problema geométrico, de la guía del maestro de *Matemáticas 3* (Islas, 2016), que si bien se enmarca en un contexto extramatemático, igualmente se limita a encontrar un valor faltante en una figura (no un modelo de la situación real) en donde no se han cuidado las escalas.
Ambas tareas proporcionan al estudiante la información suficiente para tomar datos, de las figuras, y realizar cálculos con fórmulas dadas *a priori.* En ese sentido es que identificamos que aquello que se enseña y, consecuentemente, aquello que se aprende, no redunda en el desarrollo de un pensamiento geométrico, que es por naturaleza visual y espacial.



a)



b)

Figura 1: a) Ejemplo de problemas geométricos propuestos en el libro de texto Matemáticas 3, (Macías, 2017 p.49) b) Ejemplo de problema geométrico propuestos en el libro de texto Matemáticas 3 (Islas, 2016, p.124).

Si bien, desde los trabajos de investigación de Duval (2005) se habla de la importancia y el papel del proceso de construcción en el aprendizaje de la geometría, poca investigación se ha enfocado en este elemento (Sinclair, Cirillo, de Villiers, 2017) y, sobre todo, poco impacto ha tenido en la enseñanza. Sin embargo, esto ha cambiado ligeramente gracias a los Ambientes de Geometría Dinámica (AGD). Como mencionan Montiel y Scholz (2021), con relación a la enseñanza de la trigonometría:

> … el trabajo geométrico demanda más tiempo para la actividad matemática y ésta puede ser una de las razones por las que el enfoque aritmético o algebraico domine en la escuela para enseñar el contenido trigonométrico. Al respecto, los ambientes de geometría dinámica aportan variables prácticas didácticas que pueden permitir reducir los tiempos y ampliar las exploraciones que realiza un estudiante en procesos de construcción geométrica. (p. 17)

Considerando tanto el valor pragmático como el valor epistémico de cada tecnología (AGD, lapiz-papel, manipulables, entre otras), la creación de un ecosistema híbrido (en el sentido de Rubio-Pizzorno y Montiel, 2020) puede favorecer la centración en el trabajo geométrico, donde se promuevan, además de la construcción de conocimientos geométricos, procesos visuales y espaciales, así como argumentaciones y validaciones; todos ellos fundamentales para el desarrollo del pensamiento geométrico.

2 Fundamento teórico

El cambio de atención hacia el 'qué enseñamos y aprendemos', se hace desde una postura que asume a la matemática como una actividad humana, eminentemente social; por ello se estudia a las personas haciendo matemáticas –tomando en consideración las circunstancias donde las hace– y no sólo a su producción matemática. Sin embargo, se entiende que, al trabajar con el profesor, su quehacer y dominio de conocimientos esté normado por un discurso Matemático Escolar, entendido éste como "un sistema de razón que ha normado las prácticas y representaciones sociales de los agentes educativos provocando un tipo de exclusión a partir de una violencia simbólica" (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015, p. 59). Cabe señalar que la exclusión a la que refieren es particular de la construcción social de conocimiento matemático, el cual es un planteamiento enmarcado en la teoría Socioepistemológica, cuyo componente social apunta

hacia la consideración de prácticas invariantes relacionadas con el uso del conocimiento matemático (Torres-Corrales y Montiel, 2020).
En este sentido, en la investigación nos interesó provocar, lo que en la teoría Socioepistemológica, en particular en la línea de empoderamiento docente, se ha denominado "un cambio en la relación del docente con el saber", en este caso en particular con la geometría escolar; entender cómo se da este cambio, en términos de desarrollo del pensamiento geométrico; e identificar qué efectos tiene. Para el estudio de esto construimos un marco conceptual compuesto por los constructos de la teoría Socioepistemológica orientados a la *problematización de la matemática escolar* (Reyes-Gasperini, 2016; Montiel, 2016) y el constructo de *saberes docentes*, en la línea de investigación de Ruth Mercado (Mercado, 1991; 1994; Rockwell y Mercado, 1986).

2.1 Problematización de la matemática escolar

La especificidad de los fenómenos, objetos de estudio en la teoría Socioepistemológica, radica en la problematización del saber matemático, cuestionando su estatus de saber institucional como aquello que se "debe aprender/enseñar" y reconociendo sus usos en diversos escenarios (Montiel y Buendía, 2012). Dado esto último, dicha problematización se lleva a cabo desde modelos que organizan la actividad matemática en prácticas, organizaciones a las que se denominó *epistemologías de prácticas*. Éstas, en tanto aportaciones epistemológicas, fundamentaron los diseños didácticos que permitieron el diálogo, la interacción y la retroalimentación con la práctica educativa y, principalmente, dieron los primeros elementos para el trabajo con el profesor (Montiel, 2009; 2010; 2016).
Al hacer objeto de estudio la interacción del profesor con los resultados de investigación, provenientes de estudios socioepistemológicos, se identificaron momentos de confrontación y resignificación de la matemática escolar. En un principio se habló de confrontación de concepciones (García-Zatti y Montiel, 2008), sin embargo, las diversas experiencias de trabajo con profesores evidenció que dicha confrontación y posterior resignificación se da en relación a diversas cuestiones epistémicas: en el propio trabajo matemático del profesor, a partir de la construcción y reconocimiento de nuevos argumentos y procedimientos para la resolución de tareas (Montiel, 2005); en el reconocimiento de usos del conocimiento y construcción de significados en los estudiantes al valorar su actividad matemática, usando como referente los resultados de investigación y la experiencia propia con los diseños fundamentados (Montiel, 2010); y en la inclusión de prácticas que intencionalmente provoquen construcción de nuevos significados, en el diseño elaborado por los profesores participantes de un espacio de desarrollo profesional docente (Montiel, 2016).
A partir de estas experiencias de trabajo e investigación se reconoce que la confrontación permite al docente "valorar los significados construidos en torno al discurso Matemático Escolar, para evidenciar que existen otros, propios de la matemática en juego, que se invisibilizan o se pierden en el proceso de transposición didáctica" (Rubio-Pizzorno, 2018).
En los trabajos de Montiel, se identifica esta confrontación como necesaria para lograr que la *matemática escolar* sea resignificada por el profesor, que es el saber con el que interactúa en su práctica; lo que constituyó uno de los puntos de partida del estudio, sobre empoderamiento docente, de Reyes-Gasperini (2016). En esta línea de trabajo e investigación, Reyes-Gasperini (2016) caracteriza la relación que se logra entre el docente y el saber como *problematización de la matemática escolar*, como aquello que propicia un cambio de relación con el conocimiento matemático escolar, relación sustentada en prácticas que a su vez genera una nueva dinámica docente en distintas dimensiones de su práctica. Lograr trastocar todas estas dimensiones es el objetivo del programa de empoderamiento. Nuestra investigación, si bien requiere de provocar un cambio en la relación del docente con la matemática escolar, a propósito de la escasez de investigaciones socioepistemológicas relativas al pensamiento geométrico, comenzará estudiando los momentos de

confrontación y resignificación en situación de aprendizaje con el docente; siguiendo la ruta de trabajo e investigación de Montiel (2005, 2009, 2010, 2016).
En este sentido nos plantemos la siguiente pregunta ¿confrontar los acercamientos artimético/algebraico con el trabajo geométrico, da a los profesores la oportunidad de construir nuevos significados alrededor de la geometría escolar?

2.1.2 Situaciones de aprendizaje

Para lograr la confrontación, en aprendizaje personal y colectivo con los profesores, se han diseñado *situaciones de aprendizaje*, tomando en consideración el doble uso que se le da en la teoría socioespistemológica al término: primero como el dispositivo que desata la acción del individuo (la situación) y luego como el propio estado que induce el diseño (estar en situación). Al respecto, Reyes-Gasperini (2011) señala que "un individuo no se encuentra en situación de aprender en cualquier circunstancia, ésta hay que propiciarla. Los elementos que colaboran a ello es que el diseño sea contextualizado a la cotidianidad de la persona, se parta de su propia realidad" (p. 44).
Como dispositivo, la situación de aprendizaje puede propiciar en el profesor la problematización de la matemática escolar: cuestiona el estatus de la matemática como una verdad única y como un conocimiento acabado, para admitir que es susceptible de construcción y por lo tanto de resignificación (Reyes-Gasperini, 2016). Para esta investigación se han diseñado situaciones de aprendizaje que buscan que el profesor reconozca que, si bien algunas tareas son de una naturaleza, por ejemplo, algebraica o aritmética se pueden trabajar de otras formas de interacción matemática a fin de desarrollar una diversidad de saberes.
Se sugiere que, al momento del diseño de las situaciones de aprendizaje, se considere partir de preguntas que motiven la acción del profesor, que sean interesantes y tenga un contexto situacional acorde a él.

2.2 Saberes docentes

Para identificar si se movilizan otros conocimientos del profesor al poner atención y modificar 'el qué enseñamos', se decidió incorporar a esta investigación el constructo teórico *Saberes Docentes*, que son entendidos como el "conocimiento que los maestros tienen sobre la enseñanza y que desarrollan durante el ejercicio cotidiano de la docencia" (Rockwell y Mercado, 1986; Mercado, 1991, 1994) citado por (Mercado, 2014, p.11). Si bien, las situaciones de aprendizaje se han diseñado para que se desarrollen fuera del aula de clase, se reconoce que el profesor continuamente piensa en sus estudiantes y en lo que estos harían al intentar resolverlas.
Mercado señala también en su investigación cómo los alumnos siempre están presentes en el diálogo que los profesores establecen con diferentes voces durante la enseñanza, así como, en las decisiones que los profesores toman antes y durante la enseñanza y en muchas de sus dudas y reflexiones. De aquí que consideramos que el profesor, aunque esté en diferentes escenarios, nunca deja de ser profesor y siempre toma en consideración a su alumnado.
Mercado afirma que los maestros se apropian de los saberes necesarios para su enseñanza en diferentes ámbitos: en el trabajo en el aula, con la interacción con sus estudiantes, con los materiales curriculares, con sus colegas, con los padres y con toda noticia o información que les llega de la escuela pero también fuera de ella que esté relacionada con la enseñanza. (Mercado, 2014, p.14).
Así, nuestro interés estará en identificar los saberes que el profesor emplea ante las tareas que resuelvan en las situaciones de aprendizaje, saberes que coexisten de manera articulada en su quehacer, y que resultan decisivos en su relación con la matemática que enseñanza, pues el saber matemático está condicionado por saberes de lo situacional y de las circunstancias de la interacción social de sus estudiantes.

3. Fundamento metodológico

Por la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, conocer y comprender qué es lo que sucede en los salones de clases ha despertado el interés tanto de docentes como de investigadores, situación que ha derivado en el surgimiento de distintas metodologías de investigación orientadas a dar explicaciones respecto a ello. Una de éstas es la Investigación Basada en el Diseño, o simplemente investigación de diseño (Collins, Josep y Bielaczyc, 2004); en la que el diseño (instrumento para la obtención de datos) es una parte importante de la investigación, dicho diseño se basa en la investigación y a partir de su implementación se hace investigación. Ésta se desarrolla como una forma de hacer investigación cercana a la práctica educativa (intervencionista), a partir de la cual puedan construirse explicaciones teóricas realistas; sobre todo, se considera una metodología cíclica y reflexiva que va de la investigación a la práctica y viceversa.
Dentro de la Investigación basada en el Diseño (IBD), se enmarcan los experimentos de enseñanza y aunque la investigación ha usado esta metodología para el trabajo con estudiantes, sirvió de punto de partida para la propuesta de *Experimentos sobre el desarrollo del conocimiento de profesores en formación* (Simon, 2000), en los cuales un equipo de investigación ayuda, organiza y estudia la formación de los futuros docentes. Este planteamiento sirvió de guía metodológica para nuestra investigación.

3.1 Experiencia de desarrollo docente (EDD)

Simon (2000) emplea el término "Experimento de Desarrollo Docente" (Teacher Development Experiment –TDE–, en inglés) para distinguirse de los experimentos de enseñanza, aunque reconoce que éstos son la base de los TDE, no están centrados en el profesor en formación o en servicio.
Se ha decidido no usar una traducción literal al español del nombre de la metodología y utilizar el término *experiencia* en lugar de *experimento*. Aunque desde la investigación basada en el diseño, el uso del término experimento no guarda relación con su empleo en estudios experimentales o cuasi-experimentales, en los cuales se trabaja con grupos control, en esta investigación, utilizaremos el término *experiencia*, por considerar que describe mejor el tipo de trabajo que se plantea desarrollar, además, desde nuestra postura teórica, no se estudiará **al** profesor, sino que se estudiará el trabajo logrado **con** él.
En esta metodología, el investigador promueve el desarrollo de los profesores como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención, considerando que el desarrollo de los profesores de matemáticas implica tanto lo pedagógico como lo matemático, y éste sucede no sólo en las clases de matemáticas para los profesores, sino también en cursos de actualización, en su salón de clases, en discusiones con sus colegas, etc.

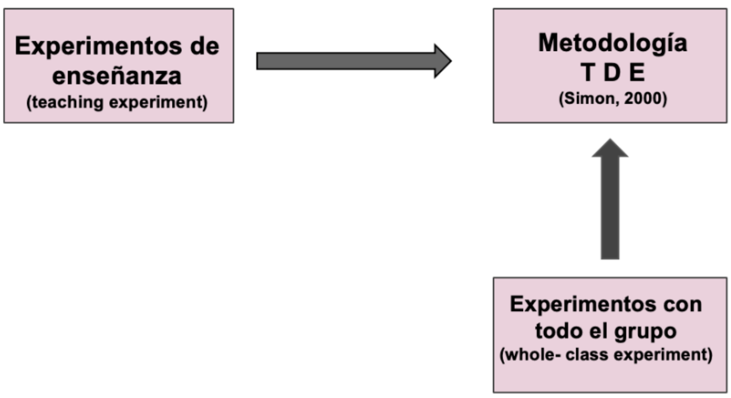


Figura 2. La metodología TDE se sustenta en los experimentos de enseñanza y los experimentos de todo el grupo. Fuente: elaboración propia.

Se distinguen tres participantes:

1) la profesora-investigadora, la cual es el responsable de la promoción del desarrollo del conocimiento a través de actividades planeadas;
2) los observadores, pieza clave en esta metodología ya que representan una perspectiva diferente que complementa a la profesora-investigadora;
3) los y las profesoras en servicio.

En esta metodología se requiere de dos niveles de análisis de los datos. El primero, el análisis en curso o continuo, que ocurre durante y entre las sesiones de trabajo con los profesores, son la base para las intervenciones espontáneas que puedan generar información adicional con el profesorado. El otro tipo de análisis es el retrospectivo, se enfoca en un bloque o conjunto total de las sesiones de trabajo con los profesores. Este análisis implica una cuidadosa revisión estructurada de todos los registros relevantes de la experiencia de enseñanza. El propósito de éste es continuar desarrollando modelos explicativos del desarrollo matemático de los profesores participantes de la experiencia. Así mismo, la metodología considera ciertas fases o etapas, las cuales han sido adaptadas de (Valverde, 2014):

1) Preparación para el estudio: se definen el problema e hipótesis de investigación, se diseñan los instrumentos de producción y recolección de datos.
2) Implementación: en esta etapa se efectúa la producción y recolección de los datos, así como los análisis en curso. Después de cada intervención es necesario que el equipo de investigación revise lo sucedido y de ser necesario se realicen los cambios pertinentes.
3) Análisis retrospectivo de los datos, esta etapa considera la organización y el análisis retrospectivo de los datos. También, se responde la pregunta de investigación o contrastan las hipótesis.

3.2 Preparación para el estudio

Tomando en consideración los elementos teóricos descritos anteriormente y los procesos de confrontación-significación que se buscaban provocar, se diseñaron situaciones de aprendizaje para trabajar con un grupo de profesores en servicio. Además, se diseñó un cuestionario que los profesores contestaron al inicio de la experiencia. El cuestionario abordaba aspectos técnicos de su formación, tales como: años de servicio, grado máximo de estudio, asistencia a cursos de formación, etc. También se les preguntó acerca de temas de carácter pedagógico, por ejemplo, cómo desarrollan ciertos temas geométricos en clase y qué tipo de ejercicios o problemas trabaja con sus estudiantes.
Se diseñó un cuaderno de notas para los observadores, para que se registrara por escrito aspectos importantes de la implementación, por mencionar algunos: las actitudes de los profesores ante ciertas tareas de la situación, el conocimiento matemático puesto en juego por parte de los profesores, el tipo de argumentos e ideas geométricas que surjan, la interacción entre la profesora-investigadora y los profesores, entre otros.

3.2.1 Situación de aprendizaje: Estimando la temperatura

Se reporta aquí una de las situaciones diseñadas sobre la estimación de la temperatura en algún punto intermedio entre dos ciudades, cuyas temperaturas se conocen, se inicia proporcionando información a los profesores respecto a quiénes son los encargados de registrar y estimar la temperatura en el país. Se pone a discusión para qué tipo de decisiones es importante conocer cuál será la temperatura de alguna ciudad. En este primer momento la intención es que los profesores se involucren e interesen en la situación. En una segunda parte de la actividad se empiezan a hacer cuestionamientos para que los profesores pongan en uso sus conocimientos respecto a la situación y hagan estimaciones de la temperatura de un punto que esté entre dos lugares dados. De manera colectiva se pone a discusión qué consideraciones se han tomado para hacer las estimaciones y si habrá manera de validarlas. En un último momento, se orienta la discusión a un contexto geométrico, en el cual se trata de utilizar modelos que expliquen la situación, cerrando con una discusión colectiva centrada en diseñar un mecanismo que dé solución al planteamiento inicial. La actividad considera el uso de material manipulable, así como un applet de GeoGebra.

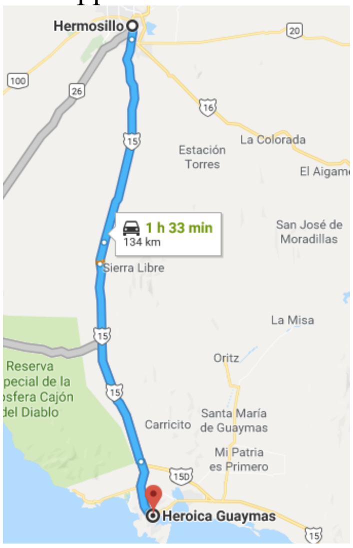


Figura 3. Mapa de la carretera entre las ciudades de Hermosillo y Guaymas (Google, s.f.). En la situación de aprendizaje se les pide a los profesores que, conociendo las temperaturas de Hermosillo y Guaymas, estimen temperaturas de puntos entre ellas.

4. Una experiencia de trabajo con profesores

Para conocer la pertinencia de la situación de aprendizaje, así como la manera en la que se desarrolla el trabajo geométrico y el papel que éste juega en la resolución de situación, se llevó a cabo una experiencia piloto, con un grupo de 5 profesores de matemáticas de secundaria (dos hombres y tres mujeres), en dos sesiones de 2.5 horas cada una. En la primera sesión, se les aplicó un cuestionario para conocer aspectos de su formación matemática y pedagógica.

La experiencia se desarrolló en las instalaciones de la Universidad de Sonora, en un salón equipado con mesas de trabajo. Se les pidió a los profesores participantes que llevaran su equipo de cómputo portátil. Se videograbaron las dos sesiones; se ubicaron dos videocámaras en partes estratégicas del aula a fin de que se tuvieran diferentes ángulos del salón y poder grabar las interacciones entre los participantes.

El equipo investigador estuvo conformado por la asesora de la investigación, la profesora- investigadora y dos observadores especialistas en Matemática Educativa. La profesora-investigadora y los observadores tuvieron una reunión previa para explorar y discutir la situación de aprendizaje, los objetivos de la puesta en escena y el instrumento de registro de datos de los observadores. Después de cada una de las sesiones, el equipo investigador discutió los aspectos más relevantes de la sesión (análisis en curso).

4.1 Resultados y análisis

Los profesores mostraron interés en la situación, mencionaron que les parecía útil conocer información climatología para la toma de ciertas decisiones; en la primera etapa, se puso a discusión bajo qué escenarios es posible estimar la temperatura y se expusieron los distintos métodos de resolución, de los cuáles, en todos los casos fueron aritméticos, aunque se hicieron algunos trazos en la imagen no se utilizaron de manera explícita aspectos geométricos. Dentro de los procedimientos el que más se utilizó fue el de calcular la media o promedio de las temperaturas conocidas. En la Figura 4, se muestran las respuestas de dos participantes a la solicitud de estimar la temperatura de un punto a la mitad del camino entre Hermosillo y Guaymas.

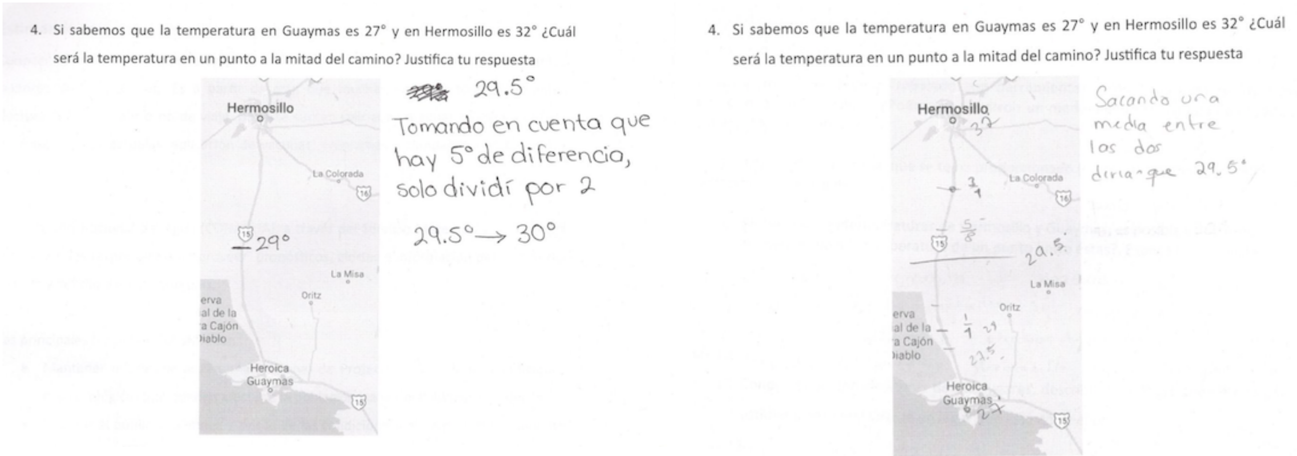


Figura 4. Respuesta de dos profesores a la pregunta 4 de la situación de aprendizaje.

Los profesores concluyeron que el procedimiento utilizado proporciona una buena estimación para los diferentes casos que se planteaban en la situación advirtiendo que es importante conocer ciertas características de las ciudades involucradas, por ejemplo, distancia entre ellas y aspectos geográficos. Sin embargo, como puede observarse en la Figura 4, no se proporcionaron justificaciones del por que considerar el promedio o punto medio les brinda una buena estimación; las respuestas estaban más orientadas al cómo y no al por qué.

En una segunda fase, trabajando con el material manipulable (mapa de la Figura 3 y regleta) y el software de geometría dinámica, se les hicieron cuestionamientos directos acerca de cómo se podría abordar la situación de manera geométrica. Las primeras ideas geométricas que surgieron fue usar proyecciones, ángulos, proporcionalidad, sin que se concretara un procedimiento que resolviera la situación hasta que uno de los participantes sugirió el uso del Teorema de Tales y de manera grupal se resolvió la actividad usándolo.

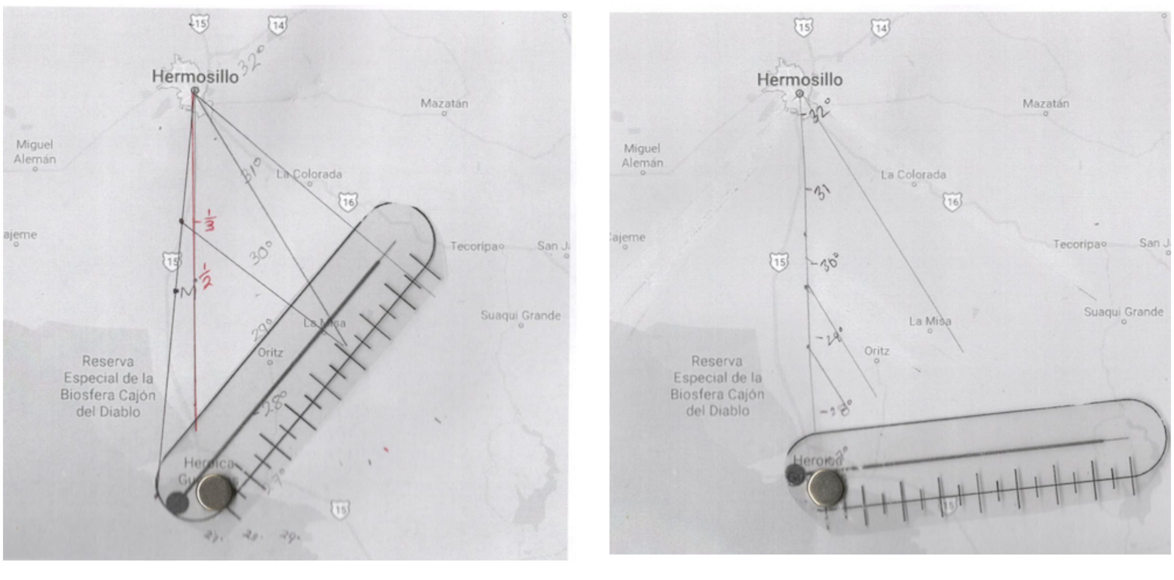
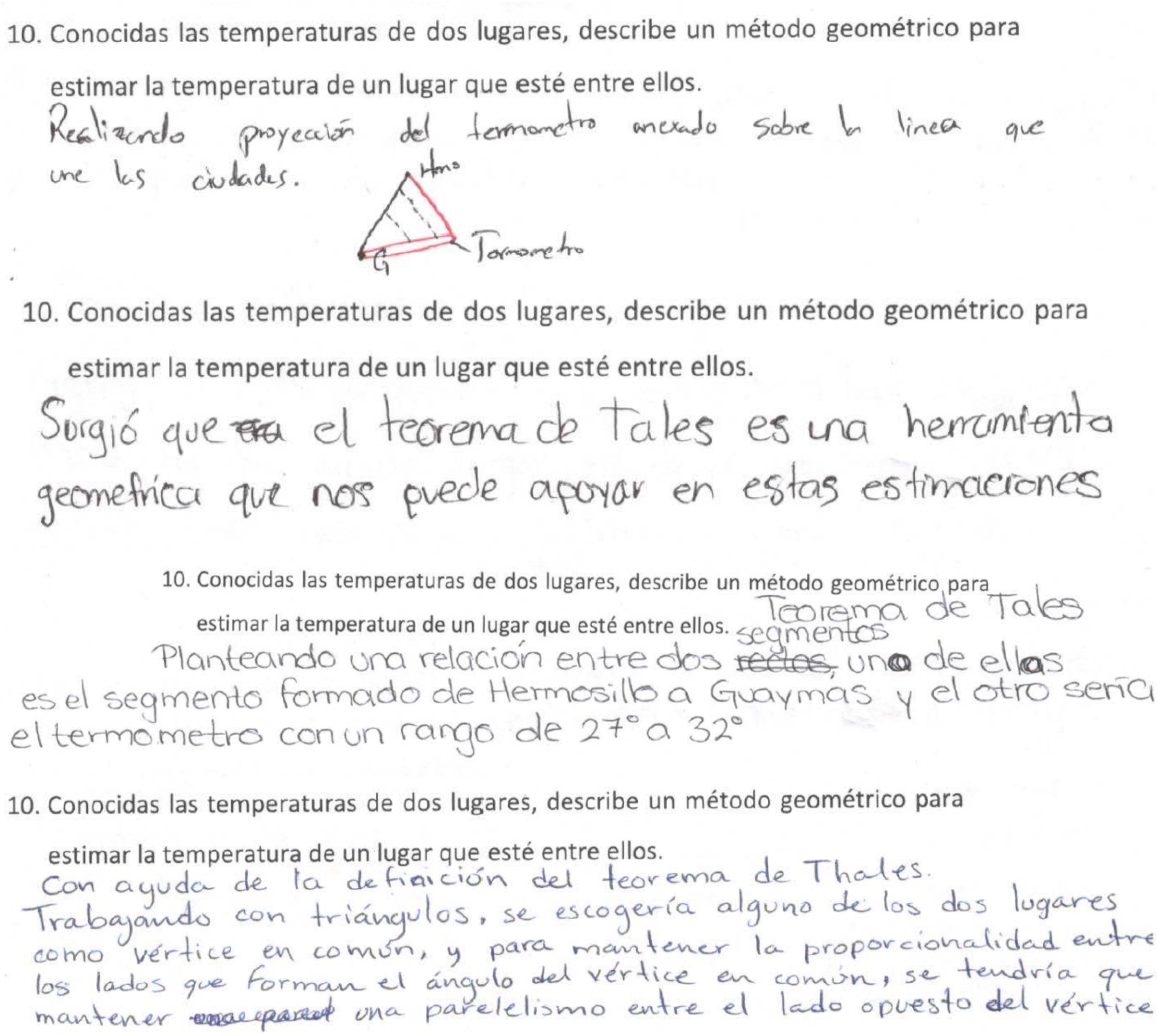


Figura 5. Material manipulable utilizado por dos profesores para resolver la situación.

Dentro de la etapa de cierre de la situación, se les pedía a los profesores que de manera individual, considerando las discusiones que se habían generado en el grupo y del trabajo con el software, describieran un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre dos ciudades conocidas. En la Figura 6 se muestran las respuestas de cuatro profesores, en donde podemos apreciar que aunque las respuestas están vinculadas al uso del teorema de Tales, la concreción con que se describe el método es distinto. En ninguna de las respuestas se rescata del todo la conclusión, en tanto al método geométrico, que se formuló en la discusión grupal. Sin embargo, se pone en evidencia que dado que la situación se los demandó, los profesores entran en un proceso de confrontación-resignificación que les permite resolver una misma tarea matemática (estimar la temperatura), a partir de nuevas estrategias y argumentos.


10. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos.

Realizando proyección del termometro anexado sobre la linea que une las ciudades.

Hmo

Termometro

G

10. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos.

Surgió que ~~era~~ el teorema de Tales es una herramienta geométrica que nos puede apoyar en estas estimaciones

10. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos. Teorema de Tales

Planteando una relación entre dos ~~rectas~~ segmentos, una de ellas es el segmento formado de Hermosillo a Guaymas y el otro sería el termometro con un rango de 27° a 32°

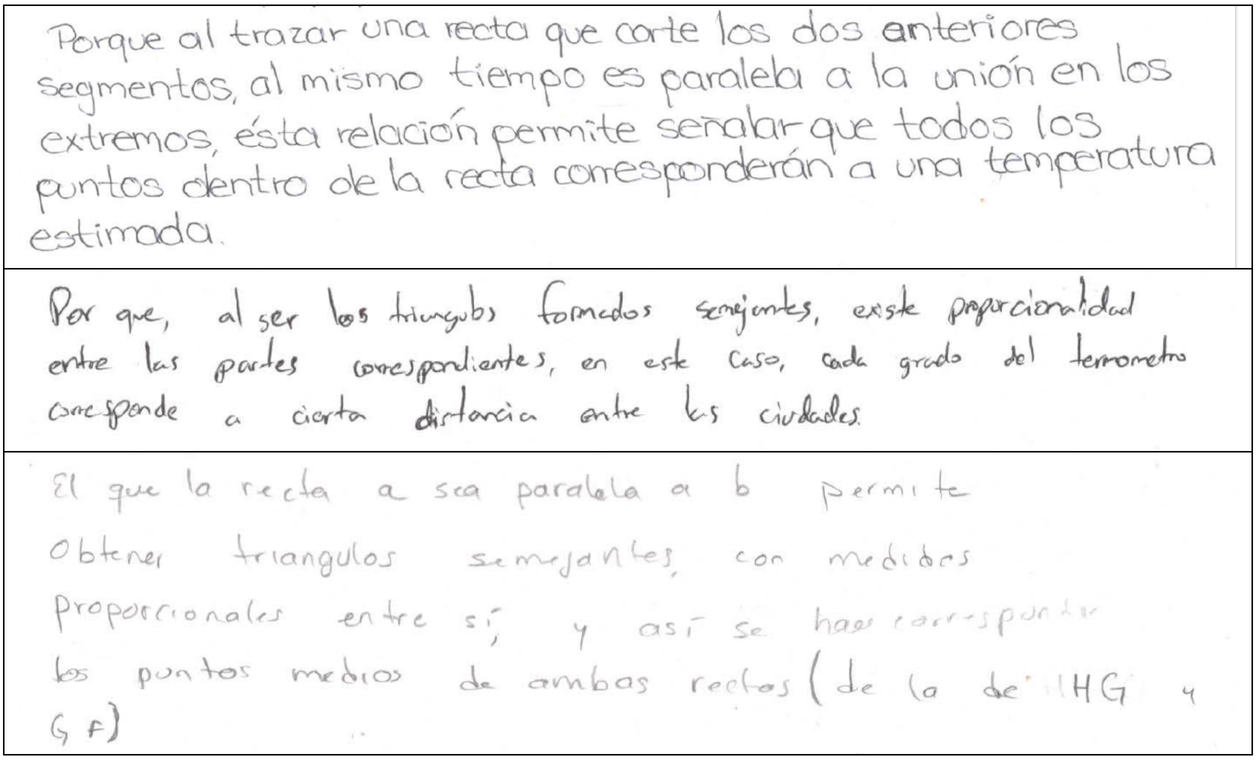
10. Conocidas las temperaturas de dos lugares, describe un método geométrico para estimar la temperatura de un lugar que esté entre ellos.

Con ayuda de la definición del teorema de Thales. Trabajando con triángulos, se escogería alguno de los dos lugares como vértice en común, y para mantener la proporcionalidad entre los lados que forman el ángulo del vértice en común, se tendría que mantener ~~una paralel~~ una parelelismo entre el lado opuesto del vértice

Figura 6. Respuesta de cuatro profesores a la pregunta 10 de la situación de aprendizaje.

También reconocemos evidencia del proceso de confrontación-resignificación cuando al pedirles que justifiquen por qué el método geométrico que describieron funciona (Figura 7), los profesores dan muestra

de una gama más amplia de formas de razonar y resolver la situación que al hacerlo de manera inicial con las aproximaciones aritméticas en donde, a pesar de que la actividad lo solicitaba, no se incluyeron argumentos del porqué su respuesta era correcta.
Si bien, las argumentaciones dadas en la pregunta 11 muestran algunas limitaciones, al menos en lo escrito por los profesores, creemos que el poner a discusión este tipo de situaciones enriquece los significados en torno a lo geométrico.


Porque al trazar una recta que corte los dos anteriores segmentos, al mismo tiempo es paralela a la unión en los extremos, ésta relación permite señalar que todos los puntos dentro de la recta corresponderán a una temperatura estimada.

Por que, al ser los triangulos formados semejantes, existe proporcionalidad entre las partes correspondientes, en este caso, cada grado del termometro corresponde a cierta distancia entre las ciudades.

El que la recta a sea paralela a b permite obtener triangulos semejantes, con medidas proporcionales entre sí, y así se hace corresponder los puntos medios de ambas rectas (de la de HG y GF)

Figura 7. Respuesta de tres profesores a la pregunta 11 de la situación de aprendizaje.

Al final, en la discusión grupal, sin que la actividad se los demandara, los profesores reflexionaron respecto a las ventajas de introducir el teorema de Tales en un entorno geométrico contrastándolo con la manera en cómo usualmente lo promueven algunos libros de textos y cómo ellos lo han abordado en el aula. Sin embargo, concluyeron que aunque era posible resolver la situación de manera geométrica a sus estudiantes les resultaría más familiar utilizar métodos aritméticos-algebraicos.

Conclusiones

A manera de reflexión final queremos señalar que, a partir de lo analizado en esta experiencia de trabajo con los profesores pudimos concluir que el diseño de la situación puede refinarse a fin de subsanar ciertos detalles de redacción, sin embargo, la aportación mayor fue la comprensión del problema que estamos abordando. El reconocer que, si bien los profesores mostraron apertura al trabajo geométrico, éste no surgió de manera natural o provocado inmediatamente por la actividad que se les proponía. Sin embargo, una vez que se puso a discusión grupal, los profesores lograron establecer relaciones entre los resultados que habían obtenido de

manera algebraica/aritmética con la resolución geométrica y, aún más, pudieron concluir que el abordar la situación de distintas maneras podría resultar enriquecedor para los estudiantes.
Respecto al uso de la metodología EDD, consideramos que brinda herramientas tanto para la producción y la recolección de datos en escenarios de trabajo con profesores. En particular reconocemos la importancia de contar con un equipo de investigación, ya que complementan la visión de la profesora-investigadora y enriquecen los análisis en curso y retrospectivos.
Otro aspecto importante que queremos destacar es que durante el desarrollo de toda la experiencia los profesores manifestaron estar pensando en el tipo de respuestas que sus alumnos darían ante los cuestionamientos o bien, cómo es que adaptarían la situación para llevarla al aula, poniendo especial interés en ajustarla para cumplir con los tiempos marcados por el programa y las condiciones de su salón. Aquí podemos reconocer que la fuente más importante en la conformación de los saberes docentes como una voz poderosa es la de los estudiantes.
Si bien, no se espera que los profesores reproduzcan con sus estudiantes lo vivido en esta experiencia, identificamos que vivenciar estos espacios de trabajo y reflexión puede aportar a que los profesores modifiquen de alguna manera sus prácticas en el aula a fin de que traten de incorporar o promover un mayor trabajo geométrico en ella, conscientes de la importancia que tiene.
Por último, consideramos que es necesario propiciar más espacios de trabajo con profesores donde se promuevan los momentos de confrontación-resignificación de la matemática escolar, en particular lo relativo a lo geométrico ya que les permite a los profesores vivir experiencias que encaminadas a desarrollar su pensamiento geométrico.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con apoyo otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT; México).

Referencias

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. Journal of the Learning Sciences, 13(1), 15-42.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad. Barcelona, España: Gedisa.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactique et Sciences cognitives, 10, 5–53.

García-Zatti, M. y Montiel, G. (2008), Resignificando la linealidad en una experiencia de educación a distancia en línea. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias REIEC, 3(2), 12–26.

Google. (s.f.). [Mapa de ruta de Hermosillo-Guaymas, en Google maps]. Recuperado el 3 de Octubre, 2018, de: https://www.google.com.mx/maps/dir/Guaymas,+Son./Hermosillo,+Son./@28.493431,-111.5390862,9z/data=!3m1!4b1!4m13!4m12!1m5!1m1!1s0x86c915f4b8d01def:0x96d95402e805f984!2m2!1d-110.9089378!2d27.9178651!1m5!1m1!1s0x86ce84687adfaee5:0xb33d5395e9887ff9!2m2!1d-110.9559192!2d29.0729673

INEE (2017). Planea Resultados nacionales 2017. Educación Media Superior.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). Introduction. Section I. Geometry and Geometry-Teaching through the ages. En C. Mammana y V. Villani (eds.), Perspectives on the The Teaching Geometry for the 21st Century. Nethertland: Kluwer Academic Publishers, pp.1- 4.

Matemáticas 3: Macía, M. (2017). Vive las Matematicas para Resolver Problemas Cotidianos 3. Secundaria. México: Esfinge.

Matemáticas 3: Islas, K. (2016).Guía para el maestro. México DF.: Castillo

Mercado, R. (1991). Los saberes docentes en el trabajo cotidiano de los maestros. Infancia y aprendizaje, 14(55), pp. 59-72.

Mercado, R. (1994). Saberes and social voices in teaching. En Amelia Álvarez y Pablo del Río (Eds.) Educations as Cultural Construction. Madrid, Fundación Infancia y Aprendizaje y Universidad Complutense, pp. 61-68.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificacion del concepto de derivada. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(2), 219–235.

Montiel, G. (2009). Formación docente a distancia en línea. Un modelo desde la matemática educativa. Innovación Educativa*, 9(46), 89–95.*

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(4-I), pp. 69–84.

Montiel, G. (2016). Condiciones para la innovación educativa en el posgrado. Perfiles Educativos, 38(esp), pp. 101–115.

Montiel, G. y Scholz, O. (2021). Entre la razón y la función. Construcción de significados sobre la relación trigonométrica en bachillerato. Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas 91, 10-17.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (eds.), Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones. México: Lectorum. Pp. 61-88

Reyes-Gasperini, D. (2011), Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas, Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Reyes-Gasperini, D. (2016). Oaxaca: una transformación colectiva con impacto social y educativo. Perfiles Educativos, 38(esp), 37-66.

Rockwell, E., y Mercado, R. (1986). La práctica docente y la formación de maestros. *DF México: DIE*.

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2020). Ecossistemas Educacionais Híbridos na pesquisa em Educação Matemática. En M. Basniak y S. Rubio-Pizzorno (Org.), Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco, 119-157. Brasil: Pimenta Cultural. https://doi.org/10.31560/pimentacultural/2020.472

Rubio-Pizzorno, S. (2018). Integración digital a la práctica docente en geometría. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN. DF: México.

Secretaría de Educación Pública, (2017). Plan y programas de estudio. Educación Secundaria, México. SEP.

Simon, M., (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 335-359.

Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. ZDM Mathematics Education 47(3), 319-329. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4

Sinclair, N., Cirillo, M. y de Villiers, M. (2017). The learning and teaching of Geometry. En J. Cai (Ed.), Compendium for Research in Mathematics Education, 457-489.

Steffe, L., y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education. Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 267-306.

Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2020). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. Nóesis. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades, 29(58-1), 24-55. http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes. Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 14(3),1-20.[fecha de Consulta 29 de Julio de 2019]. ISSN: . Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=447/44732048014

Cómo citar este artículo: Rodríguez Ibarra, M.A; Montiel Espinoza, G. (2021). Pensamiento geométrico: una experiencia de trabajo con profesores de matemáticas de secundaria. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS, 5(1), pp 50-63.

Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp. 81-93
SahuarUS

Cardiología, Matemáticas y Matemática Educativa: Una base de significados para la angularidad

Angélica Moreno–Durazo
e-mail: angelica.morenodurazo@unison.mx
Universidad de Sonora

Resumen
La investigación que aquí presentamos parte del cuestionamiento ¿cómo piensan matemáticamente los individuos? En este caso, mostramos los resultados situados en el contexto del diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas, donde identificamos que se precisa de la participación holística del pensamiento matemático para la toma de decisiones. En particular, en este artículo, mostramos el rol del pensamiento geométrico. Nuestro estudio es cualitativo interpretativo con método etnográfico, llevado a cabo durante varios meses en un centro especializado de Cardiología. Como resultado presentamos el uso de la noción de ángulo en la interpretación de electrocardiogramas y, a partir de estos hallazgos, planteamos una base de significados a considerar en futuros diseños de intervención didáctica para la Educación Media Superior o la Educación Básica donde se evidencie el carácter funcional del conocimiento matemático, particularmente, la angularidad en la práctica médica.
Palabras clave: Interpretación de electrocardiogramas, Método etnográfico, Socioepistemología

Recibido 22 de Febrero del 2021
Aceptado 08 de Abril del 2021

Introducción

La despersonalización y la descontextualización que sufre el saber matemático en su introducción a los sistemas educativos, producto de la denominada transposición didáctica (Chevallard, 1985), tiene implicaciones en los significados que los individuos construyen sobre los conceptos matemáticos. Un efecto de ello es que los individuos separan a la matemática escolar de su actividad cotidiana, es decir, existe una segregación entre los problemas que resuelven en su clase de matemáticas y los problemas de su entorno, su quehacer y/o su profesión (Carraher, Carraher y Schliemann, 2007; Arrieta y Díaz, 2015).

Una situación común que refleja lo anterior sucede cuando los estudiantes de las carreras de ingeniería cursan las materias profesionalizantes, ya que no recuerdan las matemáticas enseñadas en sus cursos básicos, o bien, las recuerdan, pero no las emplean para resolver los problemas que se les plantean (Torres-Corrales y Montiel, 2019). Inclusive, los ingenieros mencionan que los problemas a los que se enfrentan en su práctica involucran nociones matemáticas no formales "para la mayor parte de los ingenieros en esta empresa, una gran cantidad de matemáticas que nos enseñaron, y no diré que aprendimos, no han aparecido todavía" (Kent y Noss, 2002, p. 1).

De manera que, con la finalidad de contribuir a la problemática señalada, se han desarrollado investigaciones en Matemática Educativa que analizan desde diferentes enfoques los significados que toman los conceptos matemáticos en escenarios socioculturales diversificados, como son el caso de nociones de la trigonometría en la Robótica (Torres–Corrales y Montiel, 2019), la geometría en la Topografía (Covián y Romo–Vázquez, 2017), la noción de promedio en la Enfermería (Noss, Pozzi y Hoyles, 1999), la inferencia estadística en la Ingeniería (Bakker, Kent, Derry, Noss y Hoyles, 2008), la variación en la Ingeniería (Rodríguez–Gallegos,

ISSN: 2448-5365
Universidad de Sonora

2010; Cordero, Del Valle y Morales, 2019), entre muchas otras. Pues como mencionan Pozzi, Noss, y Hoyles (1998), para una didáctica eficaz no es suficiente con traer datos de la práctica profesional, sino que se debe hacer un esfuerzo por identificar los usos de los conceptos, los significados que adquieren y luego proponer su discusión en el aula.

En ese sentido, realizamos una investigación centrada en identificar y caracterizar los usos del conocimiento matemático en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas. Mediante la etnografía comprobamos nuestra hipótesis sobre el uso de la variación sucesiva en la interpretación de electrocardiogramas y la participación del pensamiento y lenguaje variacional en ello, estos resultados los hemos reportado ampliamente (Moreno 2018; Moreno–Durazo 2018, Cantoral, Moreno–Durazo y Caballero–Pérez, 2018). También como producto de la investigación se sabe que en realidad la resolución de los problemas, así como la toma de decisiones de los cardiólogos, se realiza desde un acercamiento holístico del pensamiento matemático, es decir, el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades precisa de la participación del pensamiento matemático en conjunto. Así que, con la finalidad de evidenciar la participación de otras formas de pensamiento en la interpretación de electrocardiogramas, en este artículo centramos la atención en el pensamiento geométrico; concretamente, tratamos con el uso de la noción de ángulo en la interpretación de electrocardiogramas.

Elementos teóricos

El enfoque teórico utilizado aborda a la *matemática en uso*: la Socioepistemología analiza la *construcción social del conocimiento matemático* a través del estudio de las prácticas que acompañan y significan a los conceptos matemáticos. Esta *centración en las prácticas* en ningún sentido es el abandono de los objetos matemáticos, sino que son analizados desde su *valor de uso* (Cantoral, 2016; Cantoral, Reyes–Gasperini y Montiel, 2014). Así, para la Socioepistemología el significado de los objetos matemáticos se logra a partir de su uso.

Entre las prácticas que acompañan la *construcción social del conocimiento matemático* (cscm) se encuentran las *acciones* directas que el individuo ejecuta sobre el medio, las cuales evolucionan hasta constituirse, bajo intenciones articuladas en contextos socioculturales específicos, en *actividades* y *prácticas socialmente compartidas* (Figura 1); estos tres momentos son estructurados por los marcos de referencia donde se desarrollen (*prácticas de referencia*) y normados por *prácticas sociales*. Entonces, la cscm precisa de dos mecanismos: relaciones de subida que favorece el paso de la acción a la práctica social y otro, relaciones de bajada, para el tránsito de la normativa de la práctica social a la acción: "[…] hacia arriba, la construcción social del conocimiento comienza por la acción del sujeto sobre el medio y hacia abajo, la construcción social del conocimiento comienza por la norma que regula el quehacer de los individuos en colectividad" (Cantoral, Reyes–Gasperini y Montiel, 2014, p. 14).

En el estudio sobre el uso de la variación en la interpretación de electrocardiogramas se identificó a la Cardiología como la práctica de referencia, al nivel acción se encuentran las prácticas de *medir* y de *comparar* que permiten el reconocimiento del cambio en las ondas del electrocardiograma, como actividad se reconocen las prácticas de *comparar*, *seriar* y *estimar* pues posibilitan la identificación de los comportamientos variacionales que determinan el diagnóstico de los padecimientos cardiacos y, finalmente, las prácticas socialmente compartidas identificadas son la de *secuenciar* e *inferir* (Moreno, 2018). Así, un cuestionamiento de nuestro interés es ¿cuáles son las prácticas que acompañan el uso de la noción de ángulo?

y en particular, ¿cuáles son las prácticas que acompañan el uso del ángulo en el diagnóstico de enfermedades cardiacas?

Figura 1. Modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2016)

Por otro lado, la Socioepistemología postula que la enseñanza de las matemáticas está determinada por un sistema de razón denominado *discurso Matemático Escolar*, caracterizado por:

- La atomización en los conceptos (no se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento).
- El carácter hegemónico (existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, frente a otros).
- La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo (los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden).
- El carácter utilitario y no funcional del conocimiento (la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades).
- La falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar (se ha soslayado el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales). (Soto y Cantoral, 2014, p. 21)

De manera que, el *rediseño del discurso Matemático Escolar* requiere de una *problematización del saber* que considere una articulación sistémica de las cuatro *dimensiones del saber: cognitiva, epistemológica, didáctica* y *social*. En particular, sobre la noción de ángulo, Rotaeche y Montiel (2017) muestran un análisis de las dimensiones didáctica, cognitiva y epistemológica (Tabla 1).

Tabla 1. Análisis por dimensiones de la noción de ángulo (Rotaeche y Montiel, 2017)

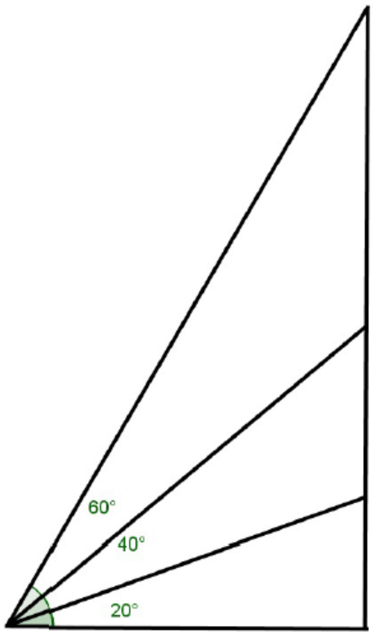
Dimensión	Características
Didáctica	En la educación básica mexicana existen dos momentos donde el ángulo cobra relevancia: en cuarto año de primaria y en primer año de secundaria. En primaria

	es introducido con la idea de “partes de vuelta”, sin mencionar el concepto. Posteriormente se nombra la parte de vuelta o giro como ángulo y es asociada con una medida en grados. Además, es utilizado como elemento de otras figuras geométricas. En la secundaria se parte de estos significados para identificarlo en situaciones concretas o contextualizadas. Su medición se hace con el transportador, y para su trazo se incorpora el compás; finalmente, se avanza hacia su clasificación y el reconocimiento de su papel en la tipología de triángulos y paralelogramos.
Cognitiva	Basado en la perspectiva de Mitchelmore y White (2000) se plantea que la formación del concepto se da a partir de las experiencias físicas que viven los alumnos, mediante un modelo de abstracción que representa una clasificación de dichas experiencias: conceptos situados del ángulo, conceptos contextuales del ángulo y conceptos abstractos del ángulo.
Histórico – Epistemológico	Las autoras reconocen en el desarrollo histórico del concepto momentos de uso en contextos prácticos, en contextos formales (filosófico-matemáticos) y de debate sobre su naturaleza. Lo que les permite caracterizar el ángulo como una noción polifacética cuyos significados aluden a una cualidad (aludiendo a la forma), una cantidad (porque es susceptible de medirse) y una relación (por ser acotada y definida por otros elementos); además, sus usos y representaciones tienen carácter estático o dinámico.

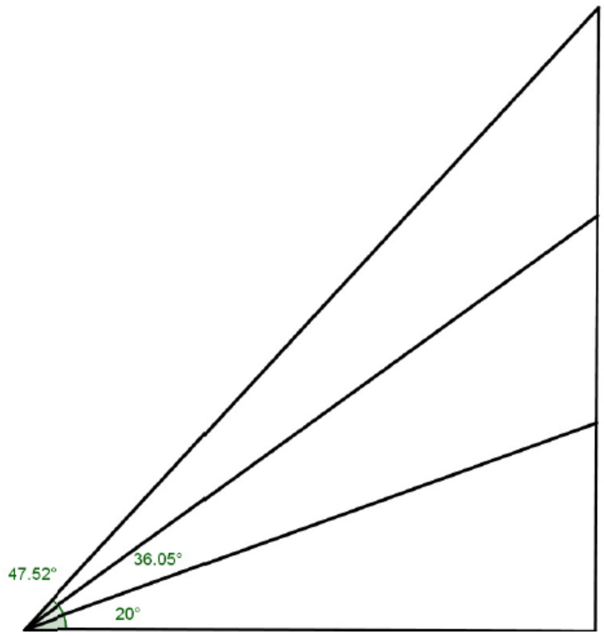
Este análisis es lo que fundamenta la propuesta de intervención didáctica de las autoras para el estudio del ángulo en el nivel secundaria, concluyendo que los estudiantes lograron identificar, cuantificar y acotar la angularidad, más que el ángulo como concepto. Así, de Rotaeche y Montiel (2017) retomamos el término *angularidad* que alude al uso del ángulo, además, en este estudio se identifica a las prácticas de *manipular*, *medir* y *cuantificar* como relevantes en el estudio del ángulo.

También en el estudio de las razones y funciones trigonométricas (tema de estudio a partir del tercer año de secundaria) se moviliza a la noción de ángulo. Cantoral, Montiel y Reyes–Gasperini (2015) mencionan que la enseñanza de la razón trigonométrica se acota al contexto de triángulos rectángulos semejantes y ocultan la esencia de lo trigonométrico: *El entendimiento de la naturaleza de la relación entre un ángulo central y la longitud de la cuerda que subtiende en un círculo* (relación no proporcional) (Figura 2). Esto como producto de una aritmetización y algebrización de la Trigonometría, intencionada al cálculo del valor faltante (ángulos o lados del triángulo).

Considerando lo anterior, el estudio que presentamos enseguida sobre la angularidad en la interpretación de electrocardiogramas robustece la problematización del saber de la noción de ángulo, específicamente, abonamos a las dimensiones epistemológica y social para un contexto fuera del escenario escolar. De manera que, se puede considerar como elemento para futuros diseños de intervención didáctica.



Ejemplo para mostrar que al doble o al triple del ángulo, no le corresponde el doble o el triple de la proyección en la vertical



Ejemplo de que al doble o al triple de la proyección en la vertical, no le corresponde el doble o el triple del ángulo

Figura 2. Relación no proporcional entre el ángulo y la cuerda (Cantoral, Montiel y Reyes–Gasperini, 2015)

Metodología

Nuestro estudio se desarrolla con método etnográfico para conocer las problemáticas de la comunidad de cardiólogos, así como la diversidad de estrategias que siguen para atenderlas. Esto con la intención de determinar el papel del conocimiento matemático en la comunidad. Se desarrolla una inmersión profunda en la práctica de los cardiólogos en el Servicio de Cardiología del Hospital Universitario "Manuel Ascunce Domenech" en Camagüey, República de Cuba durante la primavera de 2017 y, como se mencionó, tuvo la finalidad de analizar las prácticas cotidianas y localizar aspectos del pensamiento matemático que los cardiólogos usaban a diario.

Durante el estudio se observaron las consultas regulares (seguimiento a los pacientes diagnosticados con enfermedades cardiacas) y, además, se observaron los casos de pacientes ingresados en terapia intensiva, es decir, pacientes cuyo estado de salud era riesgoso. La experiencia constó de un acompañamiento diario de entre 6 – 8 horas, con un total de 240 horas de observación y análisis de su práctica profesional. Para la validación de los datos se llevó a cabo una triangulación en el siguiente sentido, "[una] puesta en relación de las aportaciones que realizan los diferentes agentes implicados en la investigación, incluido el punto de vista del investigador" (Álvarez, 2011, p. 277). Particularmente, seguimos una triangulación de métodos (Figura 3).

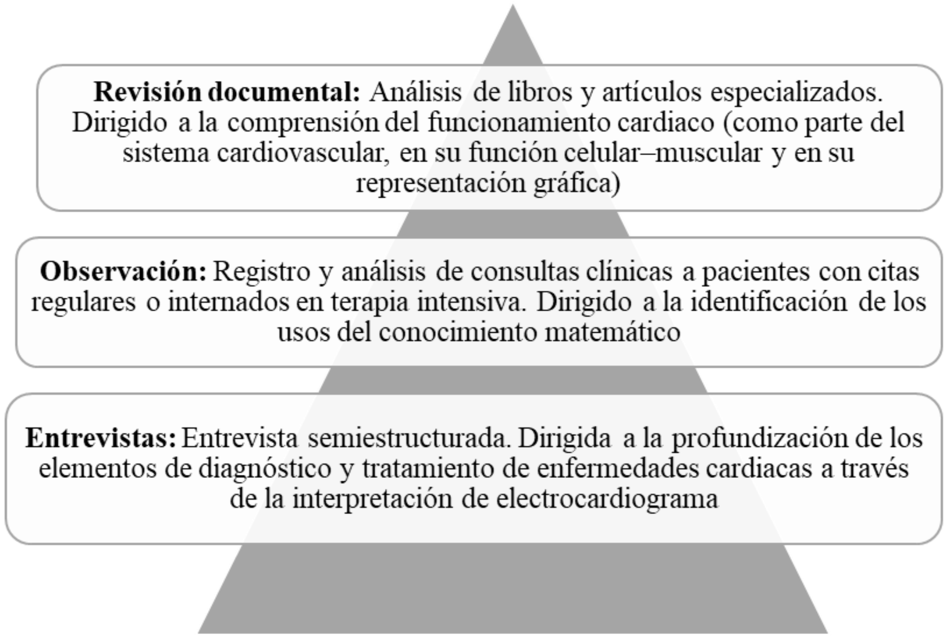


Figura 3. Elementos de la triangulación

La angularidad en la Cardiología

El electrocardiograma (ECG) es una sofisticada herramienta conformada por varias gráficas de voltaje – tiempo (Figura 4) que informan sobre los procesos de contracción y relajación de las aurículas y ventrículos en zonas diferenciadas del corazón (I, II, III, aVR, aVL, aVF, V1, V2, V3, V4, V5, V6). Un ciclo cardiaco corresponde a la contracción de las aurículas (onda P, ver Figura 5), la contracción de los ventrículos (complejo QRS) y la relajación ventricular (onda T), el cual se repite en cada latido del corazón.

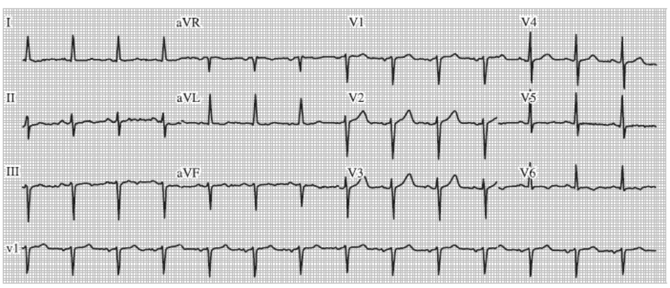


Figura 4. ECG estándar de 12 derivaciones. Nota: El ECG es de un paciente con hipertrofia ventricular (Wagner y Strauss, 2014, p. 110).

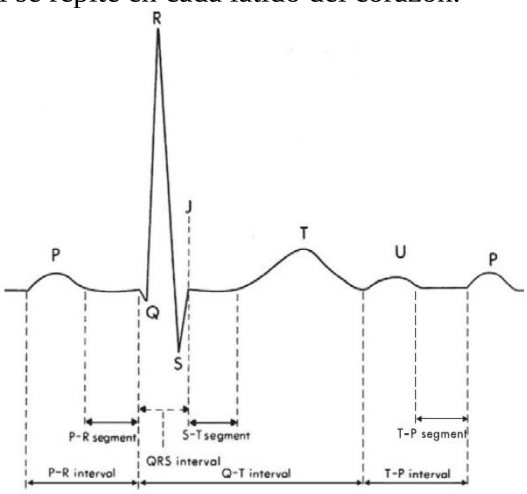


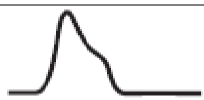
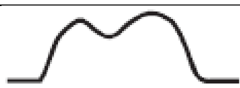
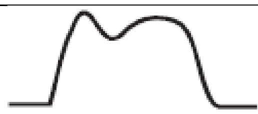
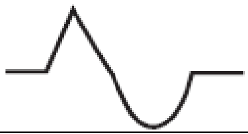
Figura 5. Ciclo cardiaco –un latido– (Wagner y Strauss, 2014, p. 16)

En el siguiente extracto de una entrevista con el cardiólogo observamos que la funcionalidad del electrocardiograma incide directamente sobre el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas. Cardiólogo: básicamente su capacidad [se refiere al ECG] es para evaluar la actividad eléctrica del corazón, lo que pasa es que las enfermedades cuando provocan una alteración con el corazón se provocan cambios en la corriente eléctrica del corazón

> ***Cardiólogo****: por ejemplo, si hay crecimiento del corazón los voltajes crecen porque el impulso tiene que atravesar un mayor grosor de masa miocárdica. Cuando hay un trastorno en la conducción porque hay un bloqueo, el QRS se ensancha.*
> ***Cardiólogo****: uno infiere desde las alteraciones eléctricas crecimientos, isquemias y las arritmias.*
> ***Cardiólogo****: una persona con dolor en el pecho que se supone que tenga un infarto, el electrocardiograma es definitorio. En cuanto la conducta, o es con elevación del segmento ST o sin elevación del segmento ST. Y el tratamiento es totalmente opuesto.*

Notemos también que la interpretación del electrocardiograma precisa del contraste de las formas de las ondas, el cardiólogo menciona que “más ancho”, “con elevación”, “sin elevación”, “más alto” son indicadores de padecimientos cardiacos. Es decir, el cardiólogo para el diagnóstico precisa del análisis de la forma y la cuantificación de las ondas del ECG, por ejemplo, en la Tabla 2 presentamos la forma de la onda P en estado normal, cuando el corazón tiene crecimiento de la aurícula izquierda (LAE), crecimiento de la aurícula derecha (RAE) o un crecimiento biauricular (LAE + RAE).

Tabla 2. Morfología de la onda P (Wagner y Strauss, 2014, p. 91)

Derivación	Normal	RAE	LAE	RAE + LAE
II				
V1				

Con esto establecemos un primer vínculo entre la interpretación de ECG y los aspectos en los que tradicionalmente se ha organizado el estudio de la Geometría, la forma, el espacio y la medida. Enseguida abordamos el papel de la angularidad a través de dos momentos: primero, como elemento importante en el sistema de referencia que permite la producción del gráfico y, segundo, como determinante en el cálculo del eje cardiaco, el cual permite identificar padecimientos como la hipertrofia ventricular.

La angularidad en la generación del electrocardiograma

Las gráficas del electrocardiograma tienen detrás un sistema de referencia poco convencional denominado sistema hexaxial (Figura 6). En este sistema, la actividad eléctrica del corazón es analizada desde puntos de observación ubicados en diferentes ángulos (derivaciones, I, II, III, aVR, aVL, aVF). Este sistema tiene similitudes con el plano polar salvo que los valores positivos del ángulo ocupan el semiplano desde 0° hasta

180° (sentido de las manecillas del reloj) y los negativos ocupan el semiplano desde 0° hasta 180° (sentido contrario de las manecillas del reloj).

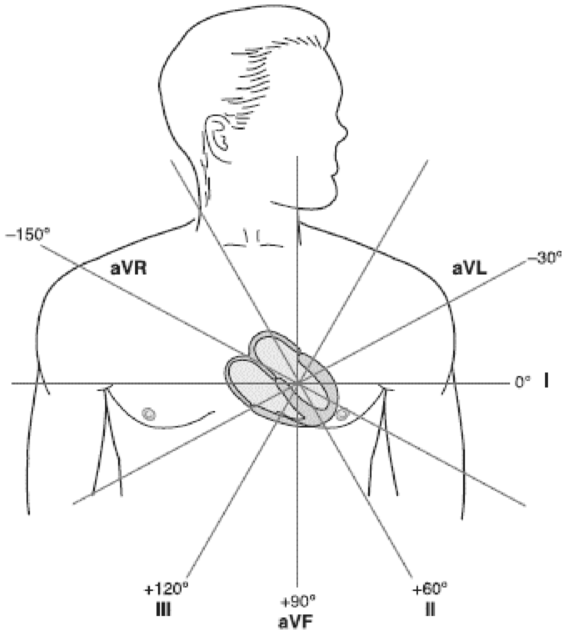


Figura 6. Sistema de referencia hexaxial (Wagner y Strauss, 2014, p. 27)

En la representación de la actividad eléctrica necesaria para la contracción y la relajación de las cavidades del corazón se utilizan vectores, por ejemplo, en condiciones normales, el vector que representa la contracción auricular tiene sentido, dirección y magnitud específica ($\widehat{AP}$, ver Figura 7).

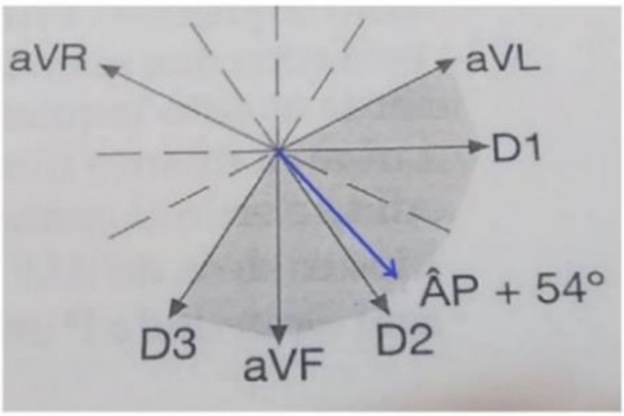


Figura 7. Vector de despolarización auricular en el sistema hexaxial (Castellano, Pérez y Attie, 2004)

Sobre este vector se cuantifica el ángulo que forma con cada derivación del sistema hexaxial y a partir de ese valor, el electrocardiógrafo produce la forma y medida de la onda P. Es decir, una deflexión positiva (hacia arriba) o negativa (hacia abajo) de la onda depende de la magnitud del ángulo que se forme entre el vector y cada derivación: *Si el vector $\widehat{AP}$ forma un ángulo menor a 90°, entonces producen una deflexión positiva, mientras que si el ángulo es mayor a 90° entonces la deflexión es negativa.*

Entonces, en la Figura 7 observamos que el ángulo formado entre $\widehat{AP}$ y D1 es menor a 60°, por tanto, la normalidad de la onda P es que sea positiva en la derivación I. De manera similar, se sabe que la onda es positiva en las derivaciones, II (ángulo menor de 30° entre $\widehat{AP}$ y D2), III (ángulo poco mayor a los 60° entre $\widehat{AP}$ y D3), aVF (ángulo poco mayor a los 30° entre $\widehat{AP}$ y aVF), aVL (ángulo poco menor a los 90° entre $\widehat{AP}$ y aVL). Por último, la onda P es negativa en aVR (es evidente que el ángulo es mayor a los 90° entre $\widehat{AP}$ y aVR). Así, los cardiólogos conocen las características normales de la onda P en el ECG.

De lo anterior, notamos que la forma de la onda está determinada por la medida del ángulo, más aún, una magnitud de voltaje mayor (onda más alta) está en función de que el ángulo entre el vector y la derivación sea más pequeño. La derivación II es la que tendrá una onda P más alta que en la derivación III, ya que en II el ángulo es menor a 30° y en III es poco mayor a 60°.

A partir de esto, identificamos que el significado sobre el ángulo que se moviliza en la generación del gráfico refiere al tipo de relación, ya que está determinada por los puntos de observación donde se colocan electrodos y, sobre todo, por el estado de salud del paciente; por ello, identificamos que su uso es dinámico.
Este principio es el que se sigue para la generación del complejo QRS (a partir de la comparación de tres vectores de despolarización ventricular) y para la onda T (comparando un vector de repolarización ventricular), los cuales en conjunto determinan un electrocardiograma con funcionamiento normal del corazón (Figura 8).

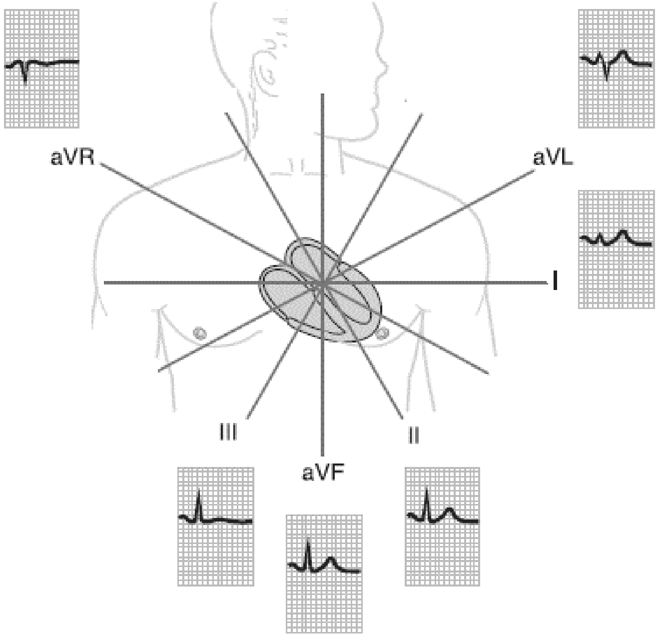


Figura 8. Registro de un latido en el sistema hexaxial (Wagner y Strauss, 2014, p. 36)

Claramente la producción del gráfico es automatizada por el electrocardiógrafo, pero el papel del ángulo es parte del conocimiento que tienen los cardiólogos para dar explicaciones a las modificaciones que se presentan en el ECG de sus pacientes, con lo cual tienen elementos para construir el diagnóstico y el tratamiento.

La angularidad en la interpretación del electrocardiograma

Uno de los pasos involucrados en la interpretación de electrocardiogramas es el cálculo del eje cardiaco que, *Grosso modo*, representa la dirección global de la actividad eléctrica del corazón. Existen diversas técnicas para calcular este eje, por ejemplo:

> 1. *Identificar la derivación de transición, localizando la derivación en la que el complejo QRS tiene los componentes positivos y negativos casi iguales.*
> 2. *Identificar la derivación que está orientada perpendicularmente a la derivación de transición utilizando el sistema de referencia hexaxial (Figura 8).*
> 3. *Considerar la dirección predominante del complejo QRS en la derivación identificada en el paso 2. Si la dirección es positiva, el eje cardiaco es el mismo que el polo positivo de esa derivación. Si la dirección es negativa, el eje es el mismo que el polo negativo.* (Wagner y Strauss, 2014, p. 61)

Tomemos como ejemplo el ECG mostrados en la Figura 9: 1) observemos que el QRS con componentes positivos y negativos casi iguales se encuentra en la derivación aVL, 2) en el sistema hexaxial observemos que las derivaciones perpendiculares aVL serían II (60°) y en 120°; finalmente, 3) observemos en el ECG que en la derivación II el QRS es positivo por lo que el eje cardiaco es 60° (en caso de que en II el QRS hubiera sido negativo, entonces el eje cardiaco sería 120°).

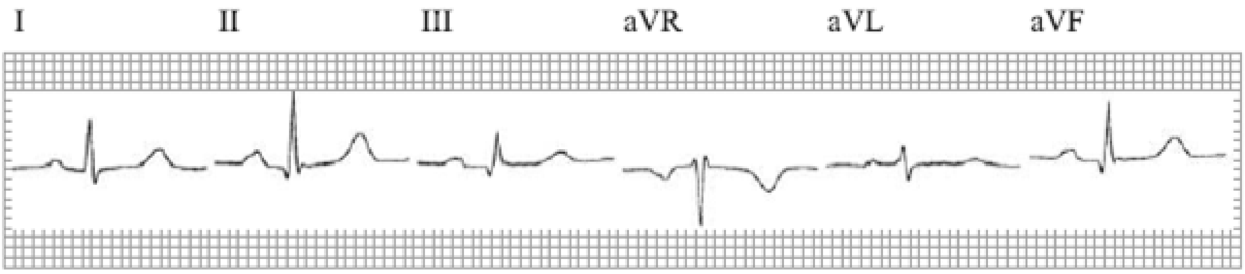


Figura 9. Electrocardiograma (Wagner y Strauss, 2014, p. 60)

Una primera observación es que para el cálculo del eje cardiaco se requiere de la coordinación del sistema hexaxial (similar al plano polar) y las gráficas del electrocardiograma (representado en un plano cartesiano), además, involucra constantemente la perpendicularidad. Ahora bien, sobre la angularidad para el diagnóstico consideremos que, en condiciones normales, el eje cardiaco se ubica en la región entre 0 grados y +90 grados del sistema hexaxial (Figura 10). Mientras que, algunos padecimientos hacen que el eje se desvíe a la izquierda (entre 0 grados y –90 grados) o a la derecha (entre +90 grados y 180 grados).

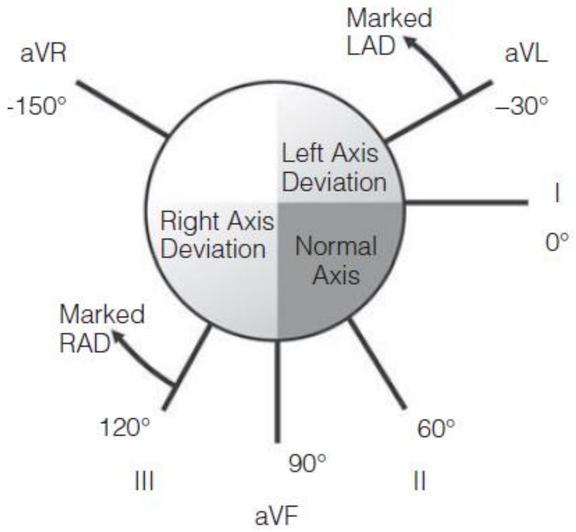


Figura 10. El sistema de referencia hexaxial para mostrar regiones de normalidad y desviación del eje cardiaco (Foster, 2007).
Nota: El intervalo puede variar según la referencia, en (Wagner y Strauss, 2014) lo normal es entre –30 grados y +90 grados.

A través de la identificación del ángulo en el cual se encuentra el eje cardiaco es posible diagnosticar diversos padecimientos, por ejemplo, el agrandamiento del ventrículo derecho puede producir una desviación del eje a la derecha y el agrandamiento del ventrículo izquierdo puede producir una desviación del eje izquierdo del complejo QRS (Wagner y Strauss, 2014). Al igual que el ejemplo anterior, el significado sobre el ángulo que se movilizan en la interpretación del gráfico refieren a una relación y su uso es dinámico.

Reflexiones finales

A partir de los ejemplos mostrados, identificamos a la comparación como una práctica principal en la interpretación de electrocardiogramas, ya que para el cálculo del eje cardiaco es necesario comparar la forma de los QRS en varias derivaciones. Otra práctica primordial es la práctica de medir, ya que en los hechos las características del electrocardiograma normal fungen como unidad de medida para valorar el electrocardiograma de los pacientes.

Una de las conclusiones de nuestro estudio sobre el uso de la variación en la interpretación de ECG es que el cardiólogo realiza conjunciones entre las acciones y las actividades sobre la gráfica desde las prácticas de –medir, comparar, ordenar– y las prácticas socialmente compartidas de –inferir, secuenciar– para el diagnóstico de enfermedades cardiacas. Lo cual también queda en evidencia en este estudio sobre el uso de la angularidad en la producción y la interpretación de electrocardiogramas.

Respecto a la caracterización propuesta por Rotaeche y Montiel (2017) sobre los significados del ángulo (cualidad, cantidad, relación), identificamos que en la práctica de referencia de la Cardiología se involucra el significado de tipo relación. Este resultado representa un elemento a considerar en futuros diseños de intervención didáctica para la Educación Básica o la Educación Media Superior pues evidencia el carácter funcional del conocimiento matemático; esto es, habitualmente la noción de ángulo es abordada desde contextos físicos (el cálculo de distancias inaccesibles) y en este estudio, hemos presentado a la Cardiología como otro marco de referencia potente.

Particularmente, los resultados aquí mostrados pueden retomarse en un proyecto interdisciplinario que articule la Biología, la Física y las Matemáticas, a saber, la interpretación de electrocardiogramas precisa del conocimiento de la anatomía del cuerpo humano o del sistema circulatorio (tópicos de las clases de Biología), también precisa de la noción de frecuencia, la conducción eléctrica y la representación en gráficas de voltaje–tiempo (que son parte de temáticas de los cursos de Física) y además, necesita del conocimiento matemático a través de la noción de ángulo y variación. Llevar a cabo este tipo de proyectos representa un aporte a las demandas que actualmente se hace sobre la enseñanza de las matemáticas, las cuales exigen de un acercamiento en el que diferentes disciplinas convivan estrechamente. Sobre ello, este artículo abre una invitación de colaboración.

Referencias

Álvarez, C. (2011). El interés de la etnografía escolar en la investigación educativa. *Estudios pedagógicos 37*(2), 267–279.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 19–48.

Bakker, A., Kent, P., Derry, J., Noss, R., & Hoyles, C. (2008). Statistical inference at work: Statistical process control as an example. *Statistics Education Research Journal 7*(2), 130–145.

Cantoral, R. (2016 2ª ed.). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes–Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática 8*, 9–28.

Cantoral, R., Moreno–Durazo, A., Caballero–Pérez, M. (2018). Socio–epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM International Journal on Mathematics Education 50*(1), 77–89.

Cantoral, R. Reyes–Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 7*(3), 91–116.

Castellano, C., Pérez, M. y Attie, F. (2004). Electrocardiograma normal. En Castellano, C., Pérez, M., Attie, F. (Eds). *Electrocardiografía clínica* (pp. 63-82). Madrid: Elsevier.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI editores.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble, France: La pensé Sauvage.

Cordero, F. Del Valle, T. y Morales, T. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 22* (2): 185 – 212.

Covián, O. y Romo–Vázquez, A. (2017). Matemáticas para la vida. Una propuesta para la profesionalización docente de profesores de matemáticas. *Innovación Educativa, 17* (73), 17–47.

Foster, D. (2007). *Twelve-Lead Electrocardiography*. London: Springer

Kent, P. y R. Noss (2002), The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios,* vol. 2. London: Institution of Engineering and Technology.

Mitchelmore, M. y White, P. (2000). Development of Angle Concepts by Progressive Abstractions and Generalization. *Educational Studies in Mathematics 41*, 209–238.

Moreno, G. (2018). *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas.* Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. CDMX: México.

Moreno–Durazo, A. (2018). Matemáticas, transversalidad y género. El pensamiento matemático en el diagnóstico de enfermedades cardiacas. De este lado, *Revista feminista de divulgación científica 3*, 9 – 16.

Noss, R., Pozzi, S. y Hoyles, C. (1999). Touching epistemologies: Meanings of average and variation in nursing practices. *Educational Studies in Mathematics 40*, 25–51.

Pozzi, S., Noss, R. y Hoyles, C. (1998). Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics 36*, 105–122.

Rodríguez–Gallegos, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-1), 191–210.

Rotaeche, R. y Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Revista Educación Matemática 29* (1), 171–199.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Excusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática 28*(59), 1525–1544.

Torres–Corrales, D. & Montiel, G. (2019). Characterization of uses of trigonometric notions in Mechatronics Engineering from Mathematics Education. *Journal-Spain. 6*(10), 9–21.

Wagner, G., Strauss, D. (2014). *Marriott´s Practical Electrocardiography*. Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins

Cómo citar este artículo: Moreno-Durazo, A. (2021). Cardiología, Matemáticas y Matemática Educativa: Una base de significados para la angularidad. *SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS.*, 5 (1), pp. 81-93.

Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp.94-111
SahuarUS

Reflexiones en torno al diseño de una propuesta formativa sobre variación lineal orientada a futuros profesores de secundaria

María Teresa Dávila Araiza[1] y Karina Jaquelin Herrera Garcia[2]
e-mail: [1]maria.davila@unison.mx, [2]jaquelin_herrera@hotmail.es
Universidad de Sonora

Resumen
La variación lineal es una noción central en la educación secundaria, que se construye sobre la base de las relaciones de proporcionalidad y abre el camino hacia el estudio de las funciones. Sin embargo, el currículo de secundaria descuida el tratamiento de sus propiedades esenciales, entre ellas las relacionadas con la variación. Este artículo trata sobre una propuesta didáctica realizada en una tesis de maestría en Matemática Educativa para atender la problemática de la enseñanza de la variación lineal en la escuela secundaria, mediante el diseño de actividades didácticas dirigidas a futuros profesores de secundaria para favorecer el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos sobre variación lineal. En este escrito, el énfasis se pondrá en describir el proceso de diseño de las actividades didácticas, resaltando el papel que jugó en ello la interacción entre la problemática identificada, las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) y el diseño de la primera actividad. Aunque el EOS permitió fundamentar el diseño, planificar su implementación y realizar una valoración de su pertinencia a partir de los datos emanados de su puesta en escena, únicamente será discutida la etapa de diseño de las actividades didácticas y su relación con las herramientas teóricas que lo fundamentan.
Palabras clave: Variación lineal, Futuros profesores de Matemáticas, Escuela Secundaria

Recibido 07 de enero de 2021
Aceptado 08 de abril de 2021

Introducción

En este escrito se describirá el proceso de diseño de la propuesta didáctica del trabajo de tesis de Herrera (2020), presentando algunas reflexiones en torno a la evolución que tuvo el diseño de las actividades, dada la interacción entre la problemática de interés, el referente teórico elegido y la primera actividad didáctica diseñada, hasta llegar al diseño final que se puso en escena con futuros profesores de matemáticas.

El trabajo de Herrera (2020) se orientó hacia la educación secundaria, y la problemática en la cual se enmarca tiene dos ejes principales: la enseñanza de la noción matemática de variación lineal y la formación inicial de profesores de matemáticas de este nivel educativo. En torno a estos dos elementos se diseñaron actividades didácticas cuyo objetivo fue, inicialmente, promover en futuros profesores de matemáticas el desarrollo de conocimientos matemáticos sobre variación lineal; sin embargo, éste se redirigió hacia el desarrollo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos en torno a esta noción matemática.

Parte de la problemática abordada en la tesis de Herrera tiene una profunda relación con la línea de trabajo de diversos autores, quienes han señalado que el estudio de la variación en los cursos de Cálculo universitarios se desvanece bajo un estudio estático de los números, las variables y las relaciones funcionales, y donde se esconde deliberadamente la relación de estas nociones con los procesos de cambio (Ímaz y Moreno, 2010; Moreno-Armella, 2014; Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila-Araiza y Romero, en prensa; Dávila-Araiza y Grijalva, 2020; Jiménez-Rodríguez, 2020). El estudio de la variación lineal en la secundaria

ISSN: 2448-5365
Universidad de Sonora

no escapa de esta perspectiva. Es por ello por lo que el trabajo de Herrera (2020) se enfocó en el desarrollo de un significado variacional de esta noción matemática con futuros profesores de matemáticas de secundaria. Poder clarificar cuál sería dicho significado variacional y cómo articularlo con las directrices curriculares de la escuela secundaria para proponer un diseño didáctico, fueron elementos que motivaron la elección del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) como fundamento teórico para el trabajo.

En un principio, en el trabajo de Herrera (2020) se pretendía diseñar actividades didácticas enfocadas solamente al desarrollo de conocimientos matemáticos; sin embargo, esta idea inicial evolucionó al conjugarse los siguientes elementos: la problemática en torno a la enseñanza de la variación lineal, la inquietud por incidir en el sistema educativo vía la intervención en la formación inicial de los profesores de secundaria, el acceso a herramientas teóricas orientadas al conocimiento y las competencias didáctico-matemáticos del profesor y el diseño de la primera actividad didáctica. Para dar cuenta de este proceso de interacción, a continuación, se esbozará la problemática en torno a la enseñanza de la variación lineal y la formación inicial del profesorado mexicano de educación secundaria. Posteriormente, se presentarán los elementos teóricos del EOS empleados para el diseño de la primera de las actividades. Después, se describirá la primera actividad didáctica con base en los elementos teóricos y se explicará cómo se ampliaron los propósitos de las actividades para considerar el desarrollo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos. Finalmente, se describirá la estructura final que se dio al diseño de las actividades y se presentarán algunas reflexiones finales.

2. La variación lineal y la formación inicial de profesores de secundaria

La variación lineal es una noción central en la educación secundaria y por demás compleja. En el currículo de la escuela secundaria su estudio inicia sobre la base de las relaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes, pero sin restringirse a ellas, y sienta las bases para iniciar el estudio de la noción función y sus diversas representaciones semióticas. Sin embargo, en este proceso, la noción de variación queda desatendida. El currículo y libros de texto favorecen el desarrollo de un significado limitado de la variación lineal, en el sentido de que éste está alejado de su esencia variacional.

Autores como Panorkou y Maloney (2016) afirman que el estudio de la función en la escuela secundaria pone el énfasis en definir relaciones entre dos magnitudes a través de una regla de correspondencia, expresada algebraicamente, para encontrar y a partir de un valor de x; sin embargo, no se promueve el estudio de relaciones de covariación entre dichas magnitudes. Una revisión del currículo mexicano de educación secundaria permite constatar que se presenta una situación similar con respecto al estudio de la variación lineal; no se favorece el estudio de la variación de cada magnitud, ni de su variación conjunta. Más aún, no se promueve explícitamente el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes (Bojórquez, Castillo y Jiménez, 2016), que es central para comprender adecuadamente los fenómenos de variación y cómo las nociones de función, derivada e integral permiten abordar su estudio en los cursos de Cálculo universitarios. Jiménez-Rodríguez (comunicación personal, 2018) plantea que en la escuela secundaria es donde debería darse el estudio de la variación, iniciando con el análisis del comportamiento variacional de una sola magnitud variable, previo al estudio de representaciones que requieren de la comprensión de la variación conjunta de dos variables, como las gráficas cartesianas. Además, considera que este estudio debe realizarse de manera integral con el tratamiento de números y cantidades en la recta numérica; sin embargo, el currículo no lo promueve explícitamente. Hacerlo de esta manera, permitiría reconocer que la variación lineal es una noción ligada a los procesos de cambio, en donde participan magnitudes variables, cada una de las cuales varía de manera uniforme con respecto al tiempo. Es importante mencionar que estas ideas fueron posteriormente publicadas Jiménez-Rodríguez (2020). Por otro lado, al elegir dos de estas magnitudes, se puede determinar que estas covarían de manera proporcional; es decir, al calcular la variación de una magnitud y compararla con la variación correspondiente de la otra, se puede establecer una relación de proporcionalidad entre las variaciones (Grijalva, comunicación personal, 2018).

Considerando que el currículo y libros de texto son los materiales principales de un profesor de matemáticas de secundaria, y si se toma en cuenta que en estos se plantea un estudio estático de la variación lineal que descuida sus propiedades esenciales, se pone de manifiesto la importancia de elaborar propuestas didácticas que provean a los profesores de matemáticas de una perspectiva más amplia sobre la enseñanza de la variación lineal, de manera que su práctica docente no se restrinja a presentar el enfoque limitado de los programas de estudio y libros de texto.

Es particularmente importante la formulación de propuestas didácticas que permitan intervenir en la etapa formativa de los profesores de matemáticas, de manera que favorezcan el desarrollo temprano de nuevos conocimientos y competencias para implementar y valorar procesos de instrucción más ricos y significativos para los estudiantes. Como lo expresan Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017): “la formación didáctica de los profesores es un campo de investigación científica y tecnológica que reclama atención por parte de la Didáctica de la Matemática, pues el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas básicas de los alumnos depende, de manera esencial, de dicha formación.” (p. 91).

Aunque uno de los focos de atención en la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha estado puesto en el profesor de matemáticas, es importante destacar que son pocas las investigaciones sobre el estudio que se hace de la variación en programas de formación de profesores, y más escasas son aún las propuestas formativas encaminadas a fortalecer los Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos de los futuros profesores sobre variación.

Por otro lado, aunque son pocas las investigaciones que reportan dificultades del profesorado en formación con respecto a la variación, hay investigaciones que reportan dificultades que profesores o futuros profesores de matemáticas presentan con relación a la proporcionalidad y la función, nociones estrechamente ligadas a la variación lineal. Por ejemplo, Wilhelmi, Godino y Lasa (2014) han reportado la existencia de conflictos que tienen futuros profesores entre el significado de función y de ecuación; Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) destacan las limitaciones de futuros profesores para identificar los elementos de la función y relacionarlos en uno o varios registros de representación, así como para realizar transformaciones a las representaciones de la función. Con respecto a la proporcionalidad, Balderas, Block y Guerra (2014) encontraron deficiencias conceptuales en profesores de matemáticas que les dificultaron identificar propiedades de las relaciones de proporcionalidad y resolver problemas de escalas sucesivas y de relación aditiva.

A partir de estos estudios, se puede considerar que es importante acompañar con diseños didácticos el estudio de la variación lineal en la formación inicial de los profesores de matemáticas, de manera que se pueda abonar al desarrollo de conocimientos más amplios o más profundos en torno a esta noción, como lo pretenden los nuevos Planes de Estudio para las Escuelas Normales en México, en particular el Plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje en Educación Secundaria (SEP, 2018).

Esta problemática, que se ha descrito a grandes rasgos, motivó el diseño de las actividades didácticas de Herrera (2020), que inició con la pretensión de promover un significado más rico sobre la variación lineal con profesores en formación inicial, pero que terminó ampliando sus propósitos para incluir el desarrollo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos sobre variación lineal.

Herramientas teóricas inicialmente consideradas para el diseño de las actividades

El Enfoque Ontosemiótico es una perspectiva teórica de la Didáctica de las Matemáticas desarrollada por Godino y otros investigadores (Godino, Batanero y Font, 2007) que integra de manera sistémica elementos importantes de diversas aproximaciones teóricas que han surgido en esta disciplina. A través de sus constructos teóricos, el EOS permite analizar y describir detalladamente diversos aspectos de los procesos de instrucción matemática, por ejemplo, la actividad matemática desarrollada por un estudiante, o bien los conocimientos y competencias que un profesor posee para la enseñanza de las matemáticas, y proponer acciones que lleven a su mejora progresiva.

En el EOS se toman como punto de partida dos elementos centrales: las situaciones problema y las prácticas matemáticas realizadas para resolverlas. A partir de estas dos nociones, se introducen las nociones de *significado* y *objeto matemático primario*. Se considera que una *práctica matemática* es toda acción o expresión realizada con la intención de resolver un problema, comunicar la solución a otros, validarla o generalizarla (Godino y Batanero, 1994).

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, más que prácticas aisladas, lo que interesa es el desarrollo de sistemas de prácticas que lleven a la solución de problemas de un mismo tipo y que favorezcan la emergencia de objetos matemáticos. Y son estos sistemas de prácticas los que conforman el *significado* de los objetos que emergen de ellos. El sistema de prácticas en torno a la resolución de situaciones problema puede ser realizado por un individuo, o bien puede ser compartido o promovido por sujetos en una institución (o grupo), por lo cual, se considera necesario distinguir el *significado personal* (sistema de prácticas realizadas por un individuo) del *significado institucional* (sistema de prácticas compartido en una institución) que se tiene de un objeto matemático (Godino y Batanero, 1994).

Particularmente, en el diseño de actividades didácticas dentro de un sistema educativo toma relevancia el significado institucional de un objeto matemático, pues los procesos de instrucción matemática pretenden que los significados personales se acerquen cada vez más a los significados que institucionalmente se consideran apropiados, según el nivel educativo. En el EOS se definen distintos tipos de significados institucionales: de referencia, pretendido, implementado y evaluado (Godino, et al., 2007). Dado que este escrito se enfoca en el diseño de actividades didácticas, no en su implementación ni en su valoración, se caracterizarán únicamente el *significado institucional pretendido* (que corresponde al sistema de prácticas matemáticas que será incluido en la planeación de un diseño de instrucción) y el *significado institucional de referencia* (el sistema de prácticas matemáticas que se toma como referencia para determinar el significado institucional pretendido).

Cuando se aborda la resolución de una situación problema, se ponen en juego una serie de entidades matemáticas básicas que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas realizadas, interactuando entre sí como una red de conocimiento. Estas entidades, denominadas *objetos matemáticos primarios*, permiten describir y analizar con detalle la actividad matemática llevada a cabo al intentar dar solución a la situación planteada. Se proponen en el EOS seis tipos de objetos matemáticos primarios (Godino, et al., 2007):

- *Situaciones problema*: aplicaciones extra matemáticas, ejercicios, tareas, problemas abiertos, etc.
- *Lenguajes*: términos, expresiones, notaciones, dibujos, gestos, expresados en diferentes registros (escrito, oral o gestual).
- *Conceptos-definiciones*: conceptos introducidos mediante definiciones o descripciones.
- *Proposiciones-propiedades*: enunciados sobre los conceptos.
- *Procedimientos*: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.
- *Argumentos*: enunciados para validar o explicar proposiciones y procedimientos.

Las nociones de práctica, significado institucional y objetos matemáticos primarios fueron las primeras herramientas teóricas del EOS que jugaron un papel en el diseño de las actividades didácticas de Herrera (2020), particularmente en la primera de ellas, que marcó la pauta para el diseño de las siguientes. Es por ello por lo que a continuación se describe cómo estas nociones teóricas dieron forma al significado pretendido de la variación lineal dentro del diseño, conjugando un enfoque variacional con el contenido propuesto en planes y programas de estudio y libros de texto. Posteriormente se presentará a detalle la Actividad 1 descrita con las herramientas teóricas del EOS.

Proceso de diseño de la primera actividad didáctica: Significados institucionales

La determinación de los significados institucionales, de referencia y pretendido, constituyeron el primer paso en el diseño de las actividades didácticas. Para ello, se realizó un análisis de prácticas matemáticas y objetos matemáticos primarios puestos de manifiesto en los planes y programas de estudio de secundaria. Se revisaron el Plan de estudios 2011 (SEP, 2011) y Aprendizajes Clave del Nuevo Modelo Educativo (SEP, 2017), así como libros de texto acordes a ellos (Figueras, Filloy, Ojeda, Rojano y Zubieta, 2013; Block, García y Balbuena, 2018).

En términos generales, se encontró que los documentos analizados plantean el siguiente sistema de prácticas (*significado institucional* pretendido por el currículo) para el estudio de la variación lineal. Se inicia con situaciones de variación lineal de contextos extra matemáticos donde existe una relación de proporcionalidad entre las magnitudes involucradas, mayormente planteadas en un lenguaje numérico en formato de tabla de valores. A partir de los datos de la tabla, se establecen propiedades de proporcionalidad entre las magnitudes que se emplean para encontrar valores faltantes, mediante el reconocimiento de la constante de proporcionalidad o usando la regla de 3. Con base en los valores de la tabla se establece una relación de correspondencia entre los valores de las magnitudes, la cual se representa algebraicamente de la forma $y = kx$. Tomando los valores de las tablas numéricas, también se propone graficar puntos en el plano cartesiano para concluir que la gráfica de la relación de proporcionalidad es una línea recta que pasa por el origen. Posteriormente, a través de tablas numéricas se introducen situaciones problema más generales, también en contextos extra matemáticos, en las cuales ya no se tiene una relación de proporcionalidad entre las magnitudes involucradas. Sin embargo, en estas situaciones ya no se discute sobre relaciones de proporcionalidad, sino que el propósito es obtener una expresión algebraica de la forma $y = mx + b$ y la representación gráfica como línea recta, para luego establecer relaciones entre elementos característicos de ambas representaciones (ordenada al origen, pendiente, etc.).

Este sistema de prácticas propuesto para el estudio de la variación lineal en el currículo no explota la naturaleza variacional de las situaciones problema planteadas ni la relación que siempre existe entre las nociones de proporcionalidad y variación lineal. Es por ello por lo que en el trabajo de Herrera (2020) esos sistemas de prácticas se tomaron solamente como una parte del *significado institucional de referencia* para determinar el *significado institucional pretendido* por el diseño de las actividades didácticas. Con base en la literatura de investigación en matemática educativa, se optó por ampliar los sistemas de prácticas de referencia, considerando situaciones problema y objetos primarios propios de un tratamiento variacional, retomando los planteamientos de Panorkou y Malooney (2016) y de Jiménez (comunicación personal, 2018), en conjunción con las herramientas teóricas del EOS. Se inició la búsqueda de situaciones problema que favorecieran el desarrollo de sistemas de prácticas de los cuales emergiera la variación lineal como objeto matemático. El tipo de situaciones problema debía proveer un contexto de cambio, donde participaran magnitudes variables (de variación continua). De manera que, al elegir dos de estas magnitudes, se pudiera determinar si estas covarían o no de manera lineal, es decir, si las variaciones correspondientes de las magnitudes elegidas son directamente proporcionales.

Entonces, el significado institucional pretendido por el diseño, es decir, el sistema de prácticas a desarrollar en las actividades didácticas, para abordar las situaciones problema, debía partir de la identificación de las magnitudes variables involucradas en la situación planteada, el estudio de la manera como cada una de éstas varía y la búsqueda de relaciones de proporcionalidad entre las variaciones correspondientes de cada una de las magnitudes variables. El reconocimiento de esta propiedad da pie a su uso como argumento básico para decidir si se tiene o no un caso de variación lineal entre las magnitudes involucradas en la situación problema planteada. Además, se busca la caracterización gráfica y algebraica de la variación lineal, como una línea recta y una expresión de la forma $y = mx + b$, respectivamente.

De manera específica, se eligieron los siguientes objetos primarios como componentes del *significado de variación lineal pretendido por el diseño*:

- *Lenguajes*: Se seleccionaron los lenguajes planteados en el currículo de secundaria y libros de texto analizados. Por ello, se incluyeron representaciones numéricas/tabulares, gráficas cartesianas y expresiones algebraicas. Sin embargo, considerando las ideas de Jiménez (comunicación personal, 2018), se incluyó también la representación de magnitudes variables en rectas numéricas de una manera dinámica con la mediación de applets de GeoGebra. Se contempló el uso de términos y notaciones que indicaran la variación de las magnitudes, como: cambio, variación, constante, magnitud variable, incremento, flechas y otros símbolos para representar la variación, etc.

- *Conceptos-definición*: Dado que en el currículo y libros de texto analizados no se proporcionó una definición de la variación lineal, con el diseño se buscó favorecer la emergencia del siguiente concepto de *variación lineal*: *es un tipo de variación conjunta entre dos magnitudes que varían de manera uniforme, de manera que existe una relación de proporcionalidad entre las variaciones correspondientes de las magnitudes variables*. Esto involucró también al concepto de magnitud variable. Otros conceptos que se consideraron intervinientes en el diseño y por lo tanto no fueron definidos fueron el de variación, recta, pendiente, relación de proporcionalidad y constante de proporcionalidad.

- *Procedimientos*: Cálculo de las variaciones de magnitudes variables a partir de valores numéricos de ambas magnitudes, cálculos de valores faltantes de las variaciones de las magnitudes mediante regla de tres, comparación de las variaciones de una magnitud considerando variaciones uniformes de la otra magnitud, cálculo de la constante de proporcionalidad entre las variaciones de ambas magnitudes mediante un cociente, obtención de la expresión algebraica de la relación entre las magnitudes variables, graficación de puntos en el plano cartesiano con los valores correspondientes de las magnitudes variables y cálculo de la pendiente de la recta que pasa por dos puntos mediante la fórmula $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- *Proposiciones-propiedades*: si dos magnitudes varían de manera uniforme, su variación conjunta es variación lineal; las variaciones correspondientes de cada magnitud variable son directamente proporcionales; la variación lineal entre dos magnitudes variables se representa gráficamente como una línea recta y algebraicamente como una expresión de la forma $y = mx + b;$ la constante de proporcionalidad entre las variaciones de las magnitudes variables es el mismo valor que la pendiente de la recta y que la constante m de la expresión algebraica; en casos de variación lineal, si una magnitud aumenta la otra aumenta o disminuye de manera proporcional; en casos de variación lineal, no siempre hay una relación de proporcionalidad entre las magnitudes mismas, pero siempre la hay entre las variaciones correspondientes de cada una.
- *Argumentos*: se promueve el uso de las proposiciones-propiedades y procedimientos enlistados para argumentar si en la situación problema se tiene, o no, un caso de variación lineal entre dos magnitudes variables.

Diseño de la primera actividad didáctica

La Actividad 1, titulada "La edad canina", incluye todas las formas de lenguaje consideradas en el significado institucional pretendido por el diseño; sin embargo, se enfatiza el trabajo en las rectas numéricas, en lenguaje numérico y tabular. Parte de una situación problema planteada en lenguaje natural que favorece el tránsito hacia la representación de magnitudes variables en rectas numéricas para establecer una relación (de proporcionalidad) entre las variaciones de dichas magnitudes. Posteriormente, se traza una gráfica cartesiana. La propiedad de proporcionalidad entre las variaciones de las magnitudes se toma como base para llenar una tabla de valores faltantes. Finalmente, se obtiene una expresión algebraica para la relación entre las magnitudes, donde se puede asociar el coeficiente de la variable independiente con la constante de proporcionalidad entre las variaciones de las magnitudes. A continuación, se describe con detalle esta trayectoria.

Como punto de partida, se plantea en lengua natural el método propuesto por una veterinaria para calcular la edad biológica de los perros: *Un perro de 1 año tiene la edad biológica de un ser humano de 20 años, y a partir de ese momento la edad biológica del perro aumenta 4 años por cada año que transcurre*. Como se puede observar, el método establece una relación entre la variación de dos magnitudes variables (el tiempo y la edad biológica); ésta fue una característica que se consideró importante para elegirlo como base para la situación problema. A partir de este método, se formuló la situación problema de calcular la edad biológica de un perro correspondiente a cierta cantidad de años vividos, y viceversa, así como calcular cuánto varía una magnitud según la variación de la otra.

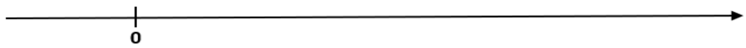
La resolución de esta situación problema, a lo largo de la actividad, está guiada por tareas y preguntas que buscan la emergencia de diversos objetos matemáticos. En la Tabla 1 se presentan las primeras preguntas y tareas planteadas en torno al método para calcular la edad biológica de un perro, las cuales promueven como prácticas matemáticas la identificación de magnitudes variables y su representación en una recta numérica, así como la descripción de la manera como éstas varían y la identificación de una relación de proporcionalidad entre tales variaciones. En el desarrollo de estas prácticas se busca favorecer la emergencia de objetos como *magnitud variable* y *variación*, términos para describir la manera como las magnitudes cambian, lenguaje gráfico y lengua natural, propiedades referentes a que cada magnitud varía de manera uniforme y a que existe una relación de proporcionalidad entre la variación de una magnitud con respecto a la otra.

Tabla 1. Extracto #1 de la Actividad Didáctica 1.

Los perros envejecen más rápido que los seres humanos, por ejemplo, un perro de seis años es considerado un perro adulto por la madurez y el envejecimiento (edad biológica) que ha alcanzado su cuerpo. Existen diferentes métodos para estimar la edad biológica de un perro, la veterinaria Mirtha Smith propone la siguiente técnica (adaptada de Smith, 2017):

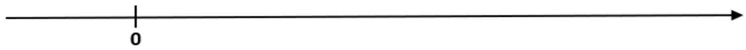
Un perro de 1 año tiene la edad biológica de un ser humano de 20 años, y a partir de ese momento la edad biológica del perro aumenta 4 años por cada año que transcurre

1. En la situación planteada, ¿qué magnitudes cambian conforme pasa el tiempo?
2. Representa en la siguiente recta numérica el cambio de la edad del perro conforme pasan los años.



a) Describe cómo es el cambio de la edad del perro conforme pasa el tiempo.

3. Representa en la siguiente recta numérica el cambio de la edad biológica del perro conforme pasan los años.



b) Describe cómo es el cambio de la edad biológica del perro conforme pasa el tiempo.

c) ¿Qué relaciones encuentras entre el cambio de ambas magnitudes (edad del perro y edad biológica)?

Posteriormente, se plantea el trabajo con rectas numéricas dinámicas (Figura 1), para lo cual se diseñó un applet (disponible en https://ggbm.at/ufgxxfxk) que presenta por separado cada magnitud variable como un segmento dirigido sobre la recta numérica, cuya magnitud aumenta de manera continua. Para facilitar la emergencia de la propiedad que tienen las magnitudes de variar de manera uniforme, y para representar de manera dinámica la relación establecida por el método de la veterinaria, se muestra un rastro uniforme de puntos correspondientes a valores de la magnitud, que ésta va dejando cada cierto periodo de tiempo. Se muestra primero la edad del perro (Figura 1a) variando uniformemente y dejando rastro por cada año transcurrido. Después, se muestra también edad biológica (Figura 1b) variando de manera uniforme, pero dejando rastro cada cuatro años, de manera que se pueda observar la variación conjunta de ambas y se puedan establecer relaciones entre ellas y entre sus variaciones.

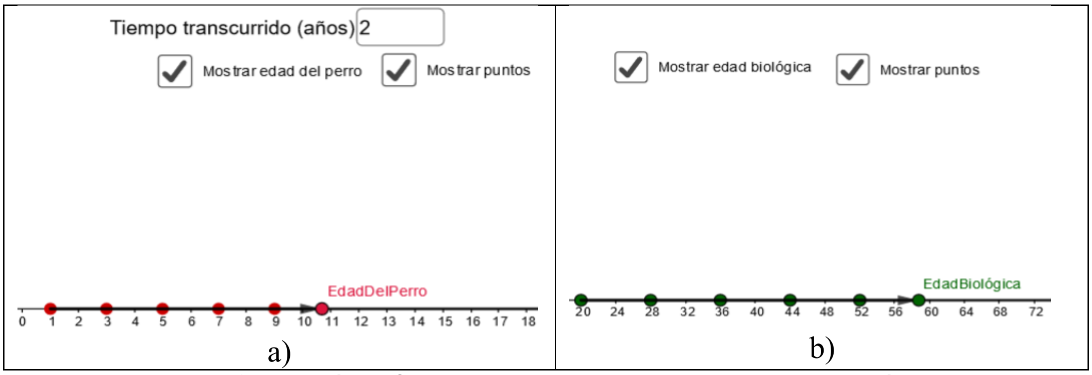


Figura 1. Variación uniforme de magnitudes variables en la recta numérica

El applet de la Figura 1 permite cambiar cada cuántos años se muestra el rastro de puntos correspondiente a la edad del perro, y observar que esto modifica el rastro de puntos correspondiente a la edad biológica. Con estas características del applet, y guiando su exploración, se pretende favorecer la emergencia de las siguientes propiedades: *las magnitudes varían de manera uniforme, constante* y, además, *se tiene una relación de proporcionalidad entre las variaciones de las magnitudes*, pues cada que la edad del perro varía cierta cantidad de años, la edad biológica varía cuatro veces dicha cantidad.
Después de la exploración del applet se plantea un conjunto de preguntas (Tabla 2) orientadas a reforzar la emergencia de las dos propiedades descritas arriba sobre las variaciones de las magnitudes.

Tabla 2. Extracto #2 de la Actividad 1.

1. Con el uso del applet, ¿observaste algo distinto sobre el cambio de cada magnitud con respecto a la representación gráfica que realizaste? Si es así, descríbelo. 2. ¿Qué relaciones encuentras entre la edad del perro y su edad biológica? 3. Crea una gráfica cartesiana donde representes la relación que encuentras entre ambas edades. 4. Según los datos proporcionados por la veterinaria: a) ¿cuánto aumenta la edad biológica cada dos años? b) ¿Cuánto aumenta la edad biológica cada tres años? c) ¿Cuánto aumenta la edad biológica cada seis años? 5. Con los datos proporcionados por la veterinaria ¿podrías decidir cuánto aumenta la edad biológica del perro cada 7 años? Si es así, describe el procedimiento que empleaste.

También, se solicita el trazado de una gráfica para empezar a favorecer la emergencia de la propiedad que tiene la variación lineal de ser representada por una línea recta (cuando las magnitudes varían de manera continua). Se promueve que los futuros profesores realicen cálculos aritméticos para obtener variaciones de la edad biológica según la variación de la edad del perro y con base en las variaciones visualizadas en el applet.

Posteriormente (Tabla 3), se solicita llenar una tabla de valores faltantes. Sabiendo el valor de una magnitud, se pide encontrar el valor de la otra, con base en el cálculo de la variación de cada magnitud y la relación de proporcionalidad entre dichas variaciones. En esta parte se espera que intervengan procedimientos como la regla de tres con valores de las variaciones o incrementos de las magnitudes. La columna central, está orientada a que los futuros profesores establezcan un procedimiento que relacione una magnitud con otra, con el propósito de favorecer la emergencia de una expresión algebraica que relacione ambas magnitudes variables.

Tabla 3. Extracto #3 de la Actividad 1.

En equipo llenen la siguiente tabla con la técnica propuesta por la veterinaria Mirtha Smith y encuentren una fórmula o expresión algebraica que les permita calcular la edad biológica del perro a partir de la edad que tiene

Incrementos edad del perro	Edad del perro	Regla/ Procedimiento	Edad biológica del perro	Incrementos edad biológica del perro
			20	
			24	
	3			
			36	
	7			
			64	
			84	
	17 y 6 meses			
	17 y 9 meses			
	18 años y 6 meses			
			92	
	19 años y 6 mes			
	20 años			

1. ¿Qué relación encuentras entre los incrementos de la edad del perro y los incrementos de su edad biológica?
2. ¿Encuentras relaciones de proporcionalidad en los datos de la tabla? Si es así, menciona en cuáles y cuál es la constante de proporcionalidad.
3. Explica los procedimientos que utilizaste para llenar las filas en donde la edad del perro está dada en años y meses.
4. ¿Encontraste una expresión algebraica que funcione para todos los datos de la edad del perro y su edad biológica? Sí es así, descríbela.

Finalmente, en la Actividad 1 se presenta un método distinto para calcular la edad biológica de perros de razas de distinto tamaño. Se solicita a los futuros profesores elaborar las expresiones algebraicas para calcular la edad biológica en cada raza. Se plantean preguntas para promover la emergencia de la propiedad de que *la constante de proporcionalidad entre las variaciones de las magnitudes en el método de cada raza corresponde a cierto coeficiente de las expresiones algebraicas*, las cuales tienen la forma $y = mx + b$, como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Extracto #4 de la Actividad 1.

1. Otros veterinarios como Stanley Coren (2018) menciona que existen diversos factores que deben ser tomados en cuenta para calcular la edad de nuestras mascotas, como su tamaño o raza. El especialista calcula la edad biológica de los perros de la siguiente manera:

En todos los perros el primer año de cachorro corresponde a los primeros 16 años de un ser humano. A partir de este momento por cada año que transcurre, las razas pequeñas envejecen 4 años, mientras que las razas medianas envejecen 6 y las razas grandes 7.
a) Determina una expresión algebraica que funcione para calcular la edad biológica de cada uno de los perros (raza pequeña, raza mediana y raza grande).
b) ¿De los datos dados por el veterinario cuáles aparecen directamente en la expresión algebraica que modela cada método? ¿Qué papel tienen en la expresión algebraica estos datos?

La Actividad 1 se diseñó como el primer paso a dar para la emergencia de diversos objetos matemáticos primarios involucrados en las prácticas que se busca que los futuros profesores adopten como su sistema de prácticas matemáticas al trabajar con todas las actividades de la propuesta. Sin embargo, se percibió la falta de elementos de reflexión, en la Actividad 1, que fueran de utilidad para la práctica docente de los futuros profesores, más allá del enriquecimiento de sus conocimientos matemáticos.

Volviendo a ver la problemática, se puso el foco de atención no sólo en la importancia y necesidad del desarrollo de un conocimiento matemático más rico en la formación inicial de profesores, sino también en el desarrollo de otro tipo de conocimientos y competencias necesarias para llevar a cabo una buena práctica docente en el aula. Según Llinares (2007), diversas investigaciones destacan que la formación inicial de los profesores de matemáticas debe tomar en consideración las 'tareas profesionales' que se espera que los futuros profesores realicen en el aula, es decir, formar al profesor a partir de la práctica de enseñar matemáticas. Esto derivó en la tarea de ampliar el diseño inicial de la Actividad 1 para integrar nuevos elementos de utilidad para la práctica docente de los futuros profesores, y el EOS tendría un papel muy importante en esta nueva tarea.

Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas

Dentro del grupo de investigación del EOS se han realizado distintos desarrollos teóricos centrados en el profesor de matemáticas, para atender la necesidad de contar con un modelo para evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor y desarrollar sus competencias didáctico-matemáticas, de manera que se pueda orientar la formación de profesores de matemáticas para su mejora.

El modelo de *Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas* (modelo CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017.) considera que los profesores de matemáticas deben poseer dos tipos de conocimiento, conocimiento matemático (común y ampliado) y conocimiento especializado en torno a la enseñanza de las matemáticas (Pino-Fan y Godino, 2015), es decir, *conocimiento didáctico-matemático*. Este segundo, se refiere al conocimiento de las distintas facetas que están presentes en todo proceso de instrucción matemática: Epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica (Godino et al., 2017):

- *Faceta epistémica:* Es el conocimiento especializado sobre el contenido matemático, sobre la diversidad de significados y sus conexiones, sobre la variedad de objetos matemáticos primarios puestos en juego en la actividad matemática relacionada a tal contenido (lenguajes, proposiciones, conceptos, argumentos, situaciones problema, procedimientos). Es decir, es la forma en que el profesor comprende y conoce las matemáticas.

- *Faceta cognitiva:* Corresponde al conocimiento de cómo los estudiantes aprenden matemáticas y cómo evoluciona su aprendizaje.
- *Faceta afectiva*: Conocimientos sobre aspectos afectivos del estudiante, sobre sus emociones, actitudes, motivaciones y creencias de los estudiantes con respecto a las matemáticas.
- *Faceta interaccional*: Referente al conocimiento sobre las interacciones que se pueden establecer en el aula.
- *Faceta mediacional*: Conocimiento de los recursos tecnológicos, materiales y temporales que son adecuados para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.
- *Faceta ecológica*: Conocimientos con relación a aspectos curriculares, sociales, contextuales, políticos y económicos que condicionan todo proceso de instrucción.

Por otro lado, en el CCDM se considera que el profesor de matemáticas, además de poseer una competencia matemática que le permita resolver problemas matemáticos, debe desarrollar una competencia más general para poder hacer frente a los problemas didácticos que se presenten en el aula de matemáticas. Es decir, el profesor de matemáticas debe desarrollar la *competencia de análisis e intervención didáctica*, que le permita diseñar e implementar actividades de aprendizaje, así como valorar su pertinencia mediante un análisis didáctico, de manera que pueda refinar su propuesta inicial e iniciar un nuevo ciclo de implementación y valoración que gradualmente lo lleve a la mejora de su práctica docente (Breda, Pino-Fan y Font, 2017).

La competencia de análisis e intervención didáctica se puede dividir en cinco subcompetencias (Godino et al., 2017),

- Competencia de análisis de significados globales (identificación de situaciones problema y sistemas de prácticas implicadas en su resolución);
- Competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas (identificación de objetos matemáticos primarios y procesos que juegan un papel en las prácticas realizadas);
- Competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas (identificación de la secuencia temporal de interacciones entre profesor, estudiante, contenido y recursos mediacionales);
- Competencia de análisis normativo (reconocimiento de normas y meta-normas que condicionan y soportan el proceso de instrucción);
- Competencia de análisis de la idoneidad didáctica (valoración del proceso de instrucción para formular posibles mejoras).

Dentro de esta perspectiva teórica ampliada que proporciona el CCDM al seno del EOS, en el trabajo de Herrera (2020) se retomó la *faceta epistémica* del conocimiento didáctico-matemático del profesor, al considerar que ésta tiene relación cercana con los planteamientos del diseño inicial de la Actividad 1, orientada al desarrollo de conocimientos matemáticos sobre variación lineal.

Con respecto a la competencia de análisis e intervención didáctica, de las cinco subcompetencias didáctico-matemáticas, el trabajo de Herrera (2020) eligió la *competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas*. Se tomó como supuesto que al analizar la actividad matemática realizada al resolver problemas (identificando los objetos matemáticos involucrados en ella) se podrían reforzar los significados desarrollados, al iniciar a los futuros profesores en un proceso de toma de consciencia y reflexión sobre qué conceptos, propiedades, etc., ponen en juego en sus propias prácticas matemáticas. Es decir, se consideró que este tipo de análisis podría despertar en los profesores una sensibilidad sobre la complejidad de las prácticas matemáticas y la diversidad de objetos matemáticos primarios implicados en ellas. Por otro lado, la consideración de esta subcompetencia llevó a retomar como elemento importante en el diseño a la *faceta cognitiva*, además de la epistémica, pues el análisis de prácticas matemáticas propias y objetos matemáticos primarios podría ser una herramienta útil para el análisis y retroalimentación de las prácticas de un estudiante.

Ampliación de la actividad 1 para incluir el desarrollo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos

Tomando como base el diseño inicial de la Actividad 1 que buscaba promover el desarrollo de un significado más rico sobre variación lineal (con lo cual se atiende parte de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático), se prosiguió con la formulación de tareas y preguntas de reflexión que atendieran la faceta cognitiva y favorecieran el desarrollo de aspectos de la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas.

Se decidió iniciar la reflexión considerando el desarrollo de la competencia elegida, para ello, siguiendo la propuesta de Giacomone (2018), se formularon preguntas orientadas a establecer qué son un concepto, una propiedad y un procedimiento matemáticos, como se muestra en la Tabla 5. A partir de la caracterización de esos tres objetos matemáticos primarios, se propusieron tareas de análisis de las prácticas realizadas al resolver las tareas matemáticas planteadas en la Actividad 1. Estas preguntas y tareas de análisis se debían contestar de dos formas, primero desde una postura personal y también después desde un consenso logrado mediante una discusión grupal.

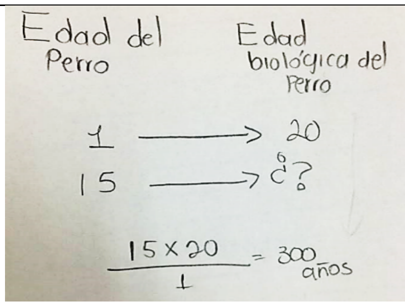
Tabla 5. Extracto #5 de la Actividad 1.

1. ¿Qué es para ti un concepto matemático? Enlista los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la actividad. 2. ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe los procedimientos matemáticos que te permitieron resolver la actividad. 3. ¿Qué es para ti una propiedad matemática? ¿Qué propiedades matemáticas identificas en la actividad que acabas de realizar?

Una vez realizado el análisis de las prácticas realizadas para identificar los objetos implicados en ellas, se plantearon tareas de análisis de la práctica matemática de un estudiante hipotético de secundaria, para atender la faceta cognitiva que trata sobre el conocimiento sobre el aprendizaje del estudiante. Para ello, se introdujo la respuesta de un estudiante a la situación problema planteada a los futuros profesores en la Actividad 1, en la cual el estudiante hacía uso de la regla de tres (Tabla 6). La tarea consistía en valorar la validez del procedimiento del estudiante y darle una retroalimentación. Con este tipo de tareas, se espera que el futuro profesor reflexione sobre su propia práctica matemática tomando como herramienta los tres objetos primarios elegidos, de manera que reflexione sobre qué conceptos, procedimientos y propiedades nuevos aprendió con lo realizado en la parte de trabajo matemático de la Actividad 1, cuáles de esos tres objetos primarios está poniendo en juego un estudiante al resolver un problema matemático y cómo puede orientarlo para mejorar su aprendizaje.

Tabla 6. Extracto #6 de la Actividad 1.

1. Un estudiante de secundaria calculó la edad biológica de un perro de 15 años utilizando el método de la veterinaria Mirtha Smith como se muestra en la imagen:



a) ¿Consideras que el resultado fue el correcto? Argumenta tu respuesta.

b) ¿Qué retroalimentación le darías al estudiante?

El diseño final de la actividad 1 concluyó al integrar estos dos tipos de tareas, enfocadas al análisis de las prácticas propias, y de las prácticas de un estudiante hipotético, para identificar tres de los seis objetos matemáticos primarios. Con ello, el diseño se reorientó hacia el desarrollo de aspectos importantes del conocimiento y competencias didáctico-matemáticos de los futuros profesores, y ya no solo de sus conocimientos matemáticos.

Diseño final de las actividades didácticas

El diseño final de la propuesta didáctica de Herrera (2020) incluyó cinco actividades, en las cuales se favorece el trabajo en diversas formas de lenguaje y el uso de applets de GeoGebra.

- Actividad 1, "La edad canina", que ya se describió a detalle.
- Actividad 2, "El peso y la estatura", en la cual se presenta un modelo lineal del peso ideal según la estatura y se contrasta con datos propuestos por el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS). Se enfatiza el trabajo con gráficas cartesianas, la noción de pendiente de una recta y la comparación de un caso de variación lineal con uno que no es de variación lineal.
- Actividad 3, "Llenado de recipientes cilíndricos". En esta actividad se presenta un applet que modela el llenado de un recipiente cilíndrico. Se busca diferenciar dos tipos de variación lineal de la forma $y = mx + b$, cuando $b = 0$ y cuando $b \neq 0$, para resaltar que la proporcionalidad entre las variaciones de las magnitudes es una propiedad inherente a la variación lineal, mientras que la proporcionalidad entre las magnitudes no.
- Actividad 4. "Vaciado de recipientes cilíndricos", en la cual se modela con un applet de GeoGebra el vaciado de un recipiente cilíndrico. En esta actividad se busca introducir la constante de proporcionalidad negativa, y distinguir la variación lineal de la variación inversamente proporcional, a la cual comúnmente se le asocia la frase "si una magnitud aumenta, la otra disminuye…".
- Actividad 5, "Una clase de matemáticas" trata sobre la confusión de una profesora entre la variación inversamente proporcional y variación lineal con constante negativa. Se busca reafirmar la caracterización de la variación lineal a partir del establecimiento de la proporcionalidad entre las variaciones correspondientes de las magnitudes variables involucradas.

Cada una de las cinco actividades se organizó en tres partes, para atender cada uno de los tres elementos que se pretende desarrollar en los profesores con respecto a la variación lineal: el conocimiento matemático, la competencia de identificación de objetos matemáticos primarios y el conocimiento didáctico-matemático. A continuación, se describe brevemente cada parte.

La *Parte I* de las actividades se destinó al *trabajo matemático*. Se incluyeron situaciones problema de variación lineal y situaciones que no eran de variación lineal. Se consideraron diversos contextos como: calcular la edad biológica de un perro con respecto a los años vividos; calcular el peso (kg) de una persona a partir de la estatura y comparar con los datos propuestos por el Instituto Mexicano de Seguro Social (IMSS); el llenado y vaciado de recipientes cilíndricos; y calcular las dimensiones de un rectángulo de área constante. Estas situaciones planteadas implicaban el uso de al menos dos formas de lenguaje: rectas numéricas dinámicas en GeoGebra, gráficas cartesianas, tablas de valores y expresiones algebraicas.

La *Parte II* de cada actividad didáctica se enfocó en la *identificación de objetos matemáticos primarios* en sus respuestas a la Parte I. En la primera actividad se buscó que los futuros profesores describieran lo que entienden por tres de los objetos matemáticos primarios, *conceptos, procedimientos y propiedades*, para posteriormente llegar a un consenso grupal. En las actividades posteriores, empleando la caracterización acordada grupalmente para los tres objetos primarios, se les solicitó a los futuros profesores que identificaran los objetos matemáticos primarios en sus propias prácticas matemáticas, que fueron desarrolladas en la Parte I de trabajo matemático.

Con respecto a la *Parte III*, orientada al *análisis de respuestas dadas por estudiantes hipotéticos de secundaria*, se presentó a los futuros profesores la respuesta de un supuesto estudiante de secundaria ante una tarea matemática relacionada con lo realizado en la Parte I, con el objetivo de que analizaran la actividad matemática manifestada en la respuesta del estudiante, usando los objetos matemáticos primarios identificados en la Parte II, y que con base en tal análisis crearan estrategias para retroalimentar al estudiante. Cabe mencionar que en cada una de estas tres partes se plantearon diferentes modalidades de trabajo: individual, en equipo de tres personas y discusión grupal, de manera que se favoreciera la emergencia de significados personales con el trabajo individual, su negociación durante las interacciones con los miembros del equipo, y consensos y su institucionalización tras discusiones grupales.

Reflexiones finales

En la literatura de Matemática Educativa es común encontrar artículos de investigación en los cuales los diseños, o materiales, elaborados para implementarse con los sujetos de estudio son una parte secundaria del contenido y, por ello, no son mostrados o no se describe a detalle su proceso de formulación. Por otro lado, en artículos de revista denominados comúnmente como "contribuciones a la docencia" o "experiencias de aula", aunque los materiales son más ampliamente descritos, su proceso de diseño también suele quedar oculto.

Considerando tal situación, en este escrito se decidió poner en el centro de discusión al proceso de diseño de las actividades didácticas de la tesis de maestría de Herrera (2020), y no su implementación, el análisis de los datos emanados del trabajo con los futuros profesores, ni la discusión de los resultados obtenidos. Otro aspecto que jugó un papel importante para esta decisión fue que la tesis de Herrera es producto de un programa de posgrado de orientación profesional, y no de investigación, por lo cual la parte central del trabajo de tesis fue la formulación de un diseño didáctico guiado por una perspectiva teórica de la Matemática Educativa para atender una problemática específica.

La pretensión de este artículo fue servir como base a estudiantes que inician su formación como matemáticos educativos, así como a profesores, para reflexionar sobre el proceso de diseño de materiales didácticos fundamentados teóricamente dentro de la Matemática Educativa, tomando como ejemplo el proceso seguido para formular las actividades didácticas de Herrera (2020). Es importante declarar que en este escrito no se está proponiendo una metodología de diseño didáctico. Más bien, se buscó resaltar que el proceso de diseño didáctico no es lineal ni sencillo, sino más bien un complejo ir y venir entre diferentes elementos que entran en juego: identificar una problemática educativa importante que pueda ser atendida, al menos en cierto grado, documentarse sobre la problemática con base en producción científica de Matemática Educativa, hacer un análisis crítico de planes y programas de estudio, seleccionar referentes teóricos que permitan identificar pautas y elementos centrales en la propuesta didáctica a diseñar, entre otros. Cada elemento va arrojando luz sobre los demás, favoreciendo su evolución conjunta.

Es importante destacar el papel central que tuvo el Enfoque Ontosemiótico. Por un lado, las nociones de sistema de prácticas y objetos matemáticos primarios permitieron realizar un análisis detallado de planes y programas de estudio, identificar prácticas y objetos que estaban ausentes y que valía la pena promover, según la literatura científica, así como determinar claramente el contenido matemático del diseño de las actividades, su organización y secuenciación. Por otro lado, el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos, permitió conectar el trabajo matemático de los futuros profesores con tareas de reflexión sobre su conocimiento matemático y el de los estudiantes, que pudiera sembrar la semilla de una práctica docente distinta a la tradicional.

Los productos del trabajo de Herrera no fueron únicamente las cinco actividades descritas, sino que, a partir del proceso de reflexión llevado a cabo al realizar el diseño de éstas, se encontró que el tipo de lenguaje elegido en las tareas de cada actividad ponía cierto matiz a las prácticas matemáticas realizadas y a los objetos matemáticos que intervenían y emergían de ellas. Herrera (2020) planteó, entonces, cuatro distintos significados de variación lineal para reorganizar la descripción del significado institucional pretendido por el diseño: como representación analítica de la forma $y = mx + b$, como representación gráfica en rectas numéricas, como línea recta en el plano cartesiano y como tabla de valores con variaciones directamente proporcionales. Este es un ejemplo de cómo el proceso de diseño guiado por una perspectiva teórica puede dar paso a la producción de nuevo conocimiento y contribuciones teóricas.

Por otro lado, la problemática abordada y el trabajo implicado en el diseño de las actividades motivaron a Herrera a explorar más a fondo la relación de la variación lineal con los significados pragmáticos de la proporcionalidad de Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos, y Giacomone, (2017) y los significados parciales de la función de Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro (2019), identificando prácticas matemáticas específicas relacionadas con estas dos nociones que se promovían en los significados pretendidos en su diseño, de manera que esbozó con ellas una reformulación del significado institucional de referencia sobre variación lineal en su trabajo, mostrando que el proceso de diseño no es lineal.

Agradecimientos

Se hace un reconocimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca 862619 y a la Universidad de Sonora por el apoyo brindado para el diseño y realización de la propuesta formativa discutida en este trabajo.

Referencias

Amaya, T., Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, *28*(3), 111-144.

Balderas, R., Block, D. y Guerra, M. (2014). Sé cómo se hace, pero no por qué". Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación Matemática, 26*(2), 7-32.

Block. D., García, S. y Balbuena, H. (2018). *Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más*. Ciudad de México: D.R.SM de Ediciones. (p. 58-65).

Bojórquez A., Castillo, J. M. y Jiménez, J. R. (2016). Development of the variational thought in secondary students. *Congreso Internacional en Tecnología y su Integración en la Educación Matemática (TIME)*. 29 de junio al 2 de julio de 2016. Austrian Center for Didactics of Computer Algebra (ACDCA) y Facultad de Ciencias de la UNAM. Ciudad de México. Disponible en: http://www.acdca.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/ACDCA/TIME2016/Garcia_ao.pdf

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflections and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918

Dávila-Araiza, T. y Grijalva, A. (2020). Hacia una distinción didáctica entre el Cálculo y el Análisis. El caso de la noción de variable. En A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of theInternational Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 1177-1181). Cinvestav /AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Figueras, O., Filloy, E., Ojeda, A., Rojano, M. y Zubieta, G. (2013). *Matemáticas 2.* Serie Aqua. Editorial Esfinge: México (p. 201-207).

Giacomone, B. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_Giacomone.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355

Herrera, K. J. (2020). *Propuesta formativa para el desarrollo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos de futuros profesores de secundaria sobre variación lineal* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Sonora, México.

Ímaz, C. y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor*. México: Trillas

Jiménez, J., Grijalva, A., Milner, F., Dávila-Araiza, M. T. y Romero, F. (en prensa). *Reconceptualización didáctica del Cálculo*.

Jiménez-Rodríguez, J. (2020). Level-zero covariational reasoning in secondary school mathematics. En A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 301-304). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*(4), 621-633. doi: 10.1007/s11858-014-0580-4

Panorkou, N. y Maloney, A. P. (2016). Early Algebra: Expressing Covariation and Correspondence, *Teaching Children Mathematics TCM*, *23*(2), 90-99. Recuperado de https://pubs.nctm.org/view/journals/tcm/23/2/article-p90.xml

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, *36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. y Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11(23),* 201-220. doi: 10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Secretaría de Educación Pública (2018). *Plan de estudios 2018. Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria*. Disponible en https://www.cevie-dgespe.com/index.php/planes-de-estudios-2018/120

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Ciudad de Méxic*o. SEP. Recuperado de: https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf

SEP. Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programa de estudios 2011 guía para el maestro, educación básica. Secundaria. Matemáticas*. México, D.F: SEP. Recuperado de: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/18394/Programa._Secundaria_tercer_grado_Matematicas_guia_para_maestros.pdf

Wilhelmi, M., Godino, J. D. y Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM

Cómo citar este artículo: Dávila Araiza, M. T. y Herrera Garcia, K. J. (2021). Reflexiones en torno al diseño de una propuesta formativa sobre variación lineal orientada a futuros profesores de secundaria. *SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365*, *5* (1), pp. 94-111.

Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp.112-126
SahuarUS

Intervención didáctica para el aprendizaje de números complejos en modalidad virtual

Daniela Romero Robles[1], Mario Alberto Quiñonez Ayala[2] y Ana Guadalupe del Castillo Bojorquez[3]
e-mail: [1]daniela.romero@unison.mx, [2]mario.quinonez@unison.mx, [3]ana.delcastillo@unison.mx
Universidad de Sonora

Resumen
El presente reporte de intervención didáctica expone los resultados de la adaptación e implementación de una secuencia de actividades didácticas sobre el tema de números complejos que se ajustó a necesidades de la modalidad virtual, y que había sido trabajada previamente en un modelo presencial. Las actividades se llevaron a cabo en un curso de Álgebra con dos grupos de estudiantes de primer semestre de ingeniería de la Universidad de Sonora. Los análisis y resultados presentados se fundamentan teóricamente en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, haciendo uso de las nociones de sistemas de prácticas, conflictos semióticos e idoneidad didáctica. Asimismo, se resaltan los beneficios y áreas de oportunidad sobre las implementaciones presencial y virtual, con la intención de brindar elementos que permitan incorporar adecuaciones a la propuesta, para un posible trabajo híbrido, en experiencias posteriores.

Palabras clave: números complejos, educación virtual, educación universitaria, intervención didáctica, actividades con GeoGebra, plataforma Moodle.

Recibido 30 de enero de 2021
Aceptado 18 de abril de 2021

Introducción

En este artículo se presentan algunos resultados de una experiencia de la adaptación a modalidad virtual de una secuencia didáctica para el estudio de los números complejos en educación superior que previamente fue implementada de manera presencial. Se comparten algunos antecedentes, así como las consideraciones generales para modificar y adecuar la secuencia. Como parte central del trabajo, se retoman algunos errores y dificultades manifestados en las implementaciones didácticas en forma presencial previas y se reconocen las nuevas áreas de oportunidad detectadas durante la puesta en escena en modalidad virtual, con dos grupos de ingeniería de la Universidad de Sonora.

En el primer apartado se presenta el planteamiento del problema, donde se precisan las condiciones del estudio de números complejos en los programas de ingeniería que ofrece la Universidad de Sonora y algunos antecedentes sobre las aportaciones de la Matemática Educativa en la misma temática. Para cerrar la sección, se presentan los objetivos del trabajo.

En el segundo apartado, se incluyen los elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, que fundamentan este trabajo, tales como práctica matemática, objetos, significados, conflicto semiótico e idoneidad didáctica. Se incluyen también algunos elementos de la educación virtual y del e-learning. Los componentes del marco teórico son utilizados para la descripción, análisis y valoración de la secuencia y su implementación en modalidad virtual.

En la tercera sección del escrito, se muestran los aspectos metodológicos considerados. Aquí se presenta la estructura de la secuencia didáctica adaptada a la modalidad virtual. Se describen las condiciones de la implementación de la secuencia original en formato presencial y los ajustes realizados para su adaptación al trabajo virtual. Como cierre de la sección y referencia para el análisis, se presenta un resumen de errores y dificultades reportados en la implementación presencial, así como la valoración del trabajo en tales condiciones.

En el siguiente apartado, se retoman los conflictos manifestados por los estudiantes durante el trabajo de la propuesta en forma presencial, los cuales se convierten en insumos para las modificaciones de la versión virtual. En la misma sección se profundiza sobre el efecto de las modificaciones incorporadas y se expone una nueva valoración de la propuesta didáctica.

En el último apartado, se comparten las conclusiones del trabajo y se realiza una valoración general de la experiencia. Como parte de la sección se incluyen consideraciones para una implementación posterior.

Planteamiento del Problema

El estudio de los números complejos, tema de este trabajo, se aborda en un curso de Álgebra del primer semestre, dirigido a estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora. El programa de la asignatura lo incluye como el contenido inicial, para el que se sugiere un tiempo de 10 horas (dos semanas) y se orienta a establecer el concepto de número y la naturaleza para el estudio de raíces de una ecuación de grado n en una incógnita (teorema fundamental del álgebra). Como objetivos específicos, se declara la relevancia de conocer el sistema de los números complejos y sus operaciones en un ambiente numérico y gráfico.

Diversos trabajos en el campo de la Matemática Educativa (Bagni, 2001; Pardo y Gómez, 2007; Sada, 2008) coinciden en el desafío que representa la introducción del estudio de los números complejos en el currículo escolar. Las dificultades que se han reportado involucran el uso del símbolo i como unidad imaginaria y características relacionadas con las operaciones, propiedades, representaciones y aplicaciones, que se diferencian de las que son asociadas por los estudiantes al conjunto de los números reales, lo que implica reconocer que el contenido compite con el entrenamiento que han recibido los alumnos sobre la imposibilidad de extraer raíces cuadradas de números negativos. Aunado a lo anterior, también se debe reconocer que el estudio de los números complejos en el primer semestre de educación superior complica la inserción de problemas de modelación, ya que las aplicaciones de las distintas áreas en las que pueden involucrarse los números complejos, y que pueden abordarse en esta etapa, son limitadas; sin embargo, su presentación desde una perspectiva estructural como sistema “ampliado” para resolver problemas intramatemático, es factible.

Con el fin de superar las dificultades señaladas y la resistencia que los estudiantes exhiben sobre este tema (Pardo y Gómez, 2007), se diseñó una secuencia de actividades didácticas para el estudio de este tema, en la que el estudiante opera y es capaz de identificar relaciones, diferencias y/o similitudes entre las propiedades de sus operaciones y las de los números reales (Romero y Del Castillo, 2011).

Las actividades diseñadas involucran diferentes formas de representación de los números complejos y sus operaciones, se utiliza el software GeoGebra para vincular las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas. Se materializa en una secuencia didáctica de 13 hojas de trabajo y 33 applets elaborados con el software GeoGebra, las cuales están disponibles en la dirección electrónica www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos. El diseño de las indicaciones y preguntas, asumen la participación activa del docente como facilitador del aprendizaje en un modelo presencial, siendo el responsable de orientar la actividad matemática y promoviendo discusiones entre los estudiantes para construir un significado personal más profundo de los números complejos y sus operaciones.

Sin embargo, el reconocimiento de las nuevas condiciones de intervención docente que emergen como respuesta a la contingencia sanitaria mundial, por la pandemia de Covid-19, ha obligado a incorporar nuevas estrategias de enseñanza y mecanismos para favorecer el aprendizaje, además de sensibilizarnos sobre la necesidad de reflexionar sobre la mejora continua. En el campo educativo, las investigaciones se han orientado a productos relacionados con el aprendizaje a distancia, por lo que conceptos como educación virtual y e-learning se han popularizado en tiempos actuales, además de la urgencia por precisar las condiciones que el docente debe considerar en el diseño de sus cursos. Martínez (2008) destaca algunos elementos diferenciadores entre los ambientes de aprendizajes presenciales y virtuales, tales como el reconocimiento del trabajo independiente, los medios de acceso, interacción y control de que dispone el alumno para regular su aprendizaje.

Objetivos

Las condiciones del trabajo a distancia y las aportaciones realizadas por la comunidad de Matemática Educativa, se convierten en el punto de partida para nuevas reflexiones sobre las modificaciones en intervenciones didácticas sobre contenidos matemáticos específicos, tales como el estudio de los números complejos. Reflexiones de esta naturaleza se vuelven más relevantes en programas académicos que no fueron diseñados para el trabajo a distancia, como es el caso de los programas de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

En el presente trabajo se presenta una adaptación de la referida secuencia didáctica para el estudio de números complejos (Romero y Del Castillo, 2011) considerando las condiciones de la educación virtual y las herramientas de las que dispone el docente en la Universidad de Sonora; además, se comparten algunos resultados con la finalidad de brindar elementos que permitan refinar la propuesta de intervención, en modalidad virtual.

Así, los objetivos que guían el presente trabajo son los siguientes:

- Describir la adaptación de la secuencia didáctica referida, a un formato de trabajo virtual.
- Analizar y valorar los resultados y desempeño de los estudiantes que trabajan la propuesta didáctica de forma virtual.

Marco Teórico

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

El diseño original de la secuencia didáctica, para modalidad presencial, se fundamentó en algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), desarrollado por Godino y colaboradores (2009). Particularmente, se consideraron los sistemas de prácticas, los objetos personales e institucionales, sus significados sistémicos, los elementos básicos del significado, las relaciones que se establecen entre ellos (funciones semióticas) y los conflictos semióticos. Estas herramientas permiten analizar con detalle la actividad matemática y los objetos que se ponen en juego durante la misma.

Asimismo, se utilizaron tres niveles de análisis didáctico: *Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas*, el cual se orienta a estudiar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado; *elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos*, el cual se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también que emergen de ellas y, por último, *valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio*, el cual constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

Tanto la secuencia original, como su adecuación a modalidad virtual, comparten los dos primeros niveles de análisis, es decir, no hay cambios profundos en los tipos de problemas, sistemas de prácticas, configuraciones de objetos y procesos. En general, la parte epistémica de la propuesta se preserva, pero, por cuestiones de espacio, no se hará una presentación aquí, por cuestiones de espacio.

Sin embargo, insertar la adaptación a modalidad virtual sí incide sobre la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio, esta parte se describirá con mayor detalle.

Particularmente, con respecto a la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio se consideran seis dimensiones, las cuales son:

- Idoneidad Epistémica: Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad Cognitiva: Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- Idoneidad Interaccional: Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado (conflictos semióticos) y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
- Idoneidad Mediacional: Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
- Idoneidad Emocional: Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.
- Idoneidad Ecológica: Grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares.

La noción de conflicto semiótico, que se da cuando ocurre una disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones), se utilizó para intentar impactar positivamente en las idoneidades cognitiva e interaccional.
Por otra parte, la adaptación a modalidad virtual hace necesaria la consideración de otros elementos adicionales, no considerados en la versión original.

Educación virtual y e-learning

Las nuevas prácticas académicas que se incorporan como parte de las estrategias para controlar la pandemia de Covid-19 a nivel mundial, han incidido en medidas de distanciamiento social e invitado a la comunidad docente a incorporar elementos de la educación virtual como parte de su desempeño habitual. Aunque la modalidad virtual reconoce modificaciones en la flexibilidad y disponibilidad de las actividades de aprendizaje, también asigna un protagonismo adicional a la tecnología, a través de métodos asincrónicos, sincrónicos y de autoformación.

Tintaya (2003) sugiere que la educación virtual se basa en la inteligencia-imaginación del ser humano para interrelacionarse con nuevas tecnologías, mediante la creación de redes de comunicación que no se ajustan a las dimensiones de lugar, tiempo y espacio que se promueven en la educación presencial, además de integrar tres dimensiones adicionales, tales como la interactividad, la tecnología y el control. En lo que respecta a la *interactividad*, se sacrifica la relación tradicional entre profesor y el alumno, sustituyéndola mediante la adición de elementos tecnológicos, haciendo posible el uso de herramientas mucho más sofisticadas que permiten que la interactividad sea síncrona o asíncrona. Sobre la dimensión de *tecnología*, se vincula con el uso de plataformas virtuales que permiten a los alumnos acceder una diversidad de materiales de aprendizaje, los cuales se adecuan a las habilidades, necesidades y disponibilidades de cada estudiante. En la dimensión de *control*, se asigna al alumno como el responsable de los tiempos de trabajo y la personalización del material al que accede.

En el mismo sentido, el *e-learning* es una forma o método de la educación a distancia que emplea Internet, plataformas virtuales, teléfono, entre otros, para su desarrollo. En esta forma de trabajo, el rol del profesor es de tutor *on-line*, además de la incorporación de instrumentos tecnológicos adecuados, que se ajusten a la infraestructura con la que se cuente.

Acciones metodológicas

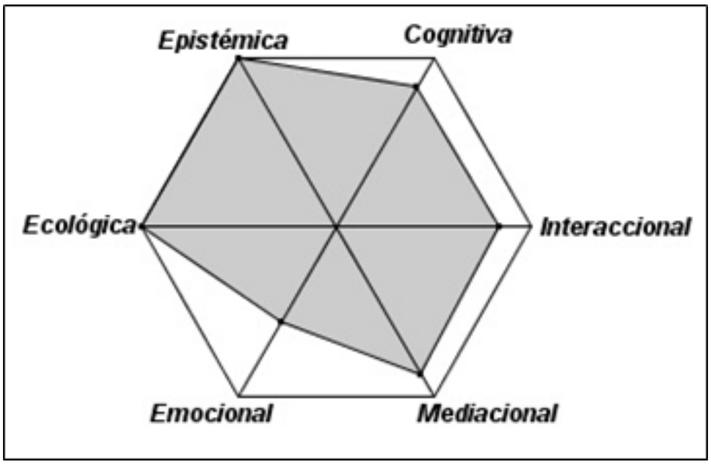
En esta sección se incluyen algunas acciones metodológicas que se llevaron a cabo para la adaptación de la secuencia de actividades referida y la descripción de las condiciones de la implementación durante la experiencia de trabajo virtual.

Adaptación de la propuesta

Como se mencionó previamente, el diseño original de la propuesta constó de 13 actividades y 33 applets elaborados con el software GeoGebra, las cuales están organizadas para favorecer el desarrollo de cuatro contenidos de interés; en el primero se presentan los *números reales* y consiste en el reconocimiento de los sistemas numéricos y sus operaciones, haciendo énfasis en la propiedad de cerradura como elemento de expansión de los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales e irracionales). En el segundo bloque, se presentan elementos gráficos de los números reales y su generalización para la construcción de la unidad imaginaria, el cual se denominó *números imaginarios*. Después de contar con un significado de la unidad imaginaria, además de las características del plano complejo, se procede al estudio de la representación de los *números complejos*, mediante sus formas polar y cartesiana. Posteriormente, se aborda el estudio de las *operaciones* (suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíces), incorporando el estudio de los conjugados como el apoyo para calcular cocientes en forma cartesiana.

En la presentación de las actividades, Romero (2013) también hace referencia a las idoneidades alcanzadas después de dos implementaciones, resaltando altos niveles en las dimensiones *epistémica* y *ecológica*, respaldados en la estructura y coherencia de la secuencia de actividades, además de la pertinencia de las temáticas y su relación con el programa de la asignatura. Sobre las dimensiones *cognitiva*, *interaccional* y *mediacional,* estas reciben una valoración media alta, por los prerrequisitos conceptuales de los estudiantes para trabajar en las actividades, la poca participación de algunos estudiantes durante las sesiones de institucionalización y la disponibilidad de centros de cómputo y equipos suficientes para el trabajo colaborativo, agregando que la implementación de la secuencia excedió el tiempo señalado en el programa. La dimensión emocional recibió una valoración media, atribuyéndose al interés cuestionable por el contexto intramatemático utilizado y la falta de aplicaciones en otros contextos. En la siguiente figura, se presenta un resumen de las idoneidades alcanzadas durante la puesta en escena en el formato presencial.

Figura 1. Valoración de la idoneidad didáctica en actividades presenciales.



Fuente: Romero (2013)

Con el antecedente de las experiencias presenciales, se procedió a incorporar las reflexiones a una propuesta que considere las condiciones de la educación virtual y las herramientas con las que se dispone en la Universidad de Sonora. Dado que las valoraciones epistémica y ecológica, se consideran altas, se conserva el significado institucional pretendido en la nueva propuesta. Sin embargo, se pone atención en las otras dimensiones, en las que el uso de ambientes virtuales seguramente tendrá mayor incidencia.

Se eligió la plataforma educativa AVAUS [Ambientes Virtuales de Aprendizaje], y la programación de sesiones virtuales sistemáticas y sincrónicas con el uso de una plataforma de trabajo colaborativo, estas últimas con la finalidad de institucionalizar las conclusiones obtenidas al trabajar con cada actividad de forma individualizada y con asignaciones extra-clase. Se restructuraron las actividades en un total de 18 lecciones y 6 evaluaciones para que el estudiante ponga a prueba lo aprendido o lo refuerce, previo a las sesiones de institucionalización correspondientes.

La evidencia del trabajo de los alumnos se concentró de forma predominante en AVAUS, plataforma para gestionar entornos de enseñanza virtual con un ambiente de Moodle. Las lecciones se configuraron con diapositivas interactivas que se ajustan a las respuestas de los alumnos, aportando retroalimentación automatizada a los estudiantes que manifiestan errores durante el desarrollo de cada lección. Se incluyeron actividades de evaluación, para que los alumnos tengan la oportunidad de validar su aprendizaje y la medida en que se ajusta a las expectativas del curso. Tanto para las lecciones como para las evaluaciones, se configuró la opción de múltiples intentos, permitiendo a los estudiantes repetir las lecciones hasta que obtuvieran resultados satisfactorios o repasos adicionales que favorecen a la institucionalización. De este modo, se pretende incidir favorablemente en las dimensiones interaccional, cognitiva, mediacional y emocional, de la idoneidad didáctica.

En la siguiente tabla se presenta la estructura de la secuencia por actividades, tanto en la versión original, como las adecuaciones para el trabajo virtual, organizadas por el contenido de interés que se pretende abordar (primera columna).

Tabla 1: Comparativa entre secuencia de actividades en versión presencial y virtual

Contenido de interés	Actividades presenciales	Actividades virtuales (AVAUS)
Números reales	• Representación gráfica de los números reales	• Números naturales • Números enteros • Números racionales • Conversión de fracciones a decimales • Números reales • *Evaluación. Números reales*
Números imaginarios	• Unidad imaginaria • Representación gráfica de los números imaginarios	• Módulos y argumentos • Leyes de los signos • Unidad imaginaria
Números complejos	• Forma polar • Forma cartesiana • Conversiones	• Forma polar • Forma cartesiana • Conversiones • *Evaluación. Gráfica de números complejos*
Operaciones	• Suma • Resta • Producto • Conjugados • División • Potencias • Raíces	• Suma • Resta • *Evaluación. Suma y resta de números complejos* • Producto • Conjugado • División • *Evaluación. Operaciones básicas de números complejos* • Potencias • Raíces • *Evaluación. Operaciones con números complejos* • *Evaluación global. Números complejos*

Características y contexto de la implementación

La secuencia de actividades en su modelo virtual se implementó con dos grupos de estudiantes de Ingeniería durante el ciclo 2020-2, con objeto de identificar errores y/o limitaciones en el diseño de las actividades, así

como nuevos conflictos semióticos. En total se inscribieron 68 estudiantes en la plataforma AVAUS y la información fue procesada de forma integrada, mientras que las sesiones de institucionalización se realizaron en grupos separados, el primero con 36 alumnos y el segundo con 32 alumnos.
La implementación total de la secuencia requirió de 12 sesiones de institucionalización, las cuales se organizaron en tres reuniones semanales y se apoyaron en las asignaciones extra clase para la resolución de las lecciones y evaluaciones.

Análisis y valoración de la implementación en modalidad virtual

Los conflictos semióticos reportados por Romero y Del Castillo (2011) durante la experiencia presencial, se utilizaron como referencia para incorporar estrategias para la modalidad virtual, con el fin de favorecer la idoneidad didáctica, en sus dimensiones cognitiva e interaccional. Por tal motivo, el análisis se organiza en torno a estos y, además, se señalan conflictos semióticos adicionales detectados. Se incluye también una valoración de la idoneidad didáctica de la implementación en modalidad virtual y un balance general de la actividad.
5.1 Conflictos semióticos y estrategias de intervención
Dentro de las prácticas matemáticas esperadas en la secuencia de actividades realizada por Romero (2013), se detectaron algunos conflictos semióticos relevantes, entre los cuales se encuentran: la confusión de la parte imaginaria de un número complejo utilizando la notación i, limitaciones en los procesos de generalización evidenciado por el uso de ejemplos particulares para responder a preguntas generales, la consideración de módulos negativos, la determinación errónea de argumentos debido al uso rutinario de la fórmula para calcularlos, así como dificultades para la representación de la unidad imaginaria considerando su módulo y argumento.
El primer conflicto semiótico al que se hace referencia se da en la representación algebraica de los números complejos, donde la componente imaginaria del número $a + bi$ se señala por algunos estudiantes como bi. Para prevenir la aparición de este conflicto semiótico, se incorporaron preguntas donde el alumno tuviera que elegir las componentes, real e imaginaria, de un conjunto de opciones que no contienen al número $\boldsymbol{i}$. Además, se incluyó retroalimentación automatizada en algunas actividades, para los estudiantes que manifiesten, en sus respuestas, dicho conflicto.
El siguiente conflicto reportado hace alusión al uso de ejemplos particulares para responder cuestiones que solicitan procesos de generalización, lo cual se aprecia en las preguntas donde los estudiantes llevan a cabo distintas operaciones de números complejos que surgen a partir de exploraciones concretas, y que después deben explicarse en términos de las relaciones entre las partes reales e imaginarias, o los módulos y argumentos. Para registrar la aparición del conflicto semiótico en la propuesta virtual, cada pregunta que invita a un proceso de generalización incluye una diapositiva posterior donde se comparten opciones fijas, las cuales se plantean en un lenguaje que deja evidencia del carácter genérico de la situación y se incluye retroalimentación automatizada para cada caso. En la Figura 2 se presentan las respuestas a la diapositiva de la lección 12, titulada "Suma de números complejos", la cual es posterior a un par de preguntas abiertas que solicitan la relación entre las partes reales e imaginarias de Z_1 y Z_2 con respecto al resultado de la suma $Z_1 + Z_2$.

Figura 2: Estrategia para atender el conflicto semiótico 2

Opción múltiple: Suma de números complejos 6	**Estadísticas de clase**
Pregunta: Si se considera a $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, donde los valores de a, b, c y d son cualquier número real. ¿Cuál de las siguientes expresiones describe algebraicamente como se efectúa la suma de números complejos dadas su parte real e imaginaria?	
Respuesta:	
☐ $Z_1 + Z_2 = (a+c) + (b+d)i$	100% Eligieron esta.
☐ $Z_1 + Z_2 = (a+b) + (c+d)i$	Nadie eligió esta.
☐ $Z_1 + Z_2 = (a+d) + (b+c)i$	Nadie eligió esta.
☐ $Z_1 + Z_2 = (b+c) + (a+d)i$	Nadie eligió esta.
☐ $Z_1 + Z_2 = (b+d) + (a+c)i$	Nadie eligió esta.
☐ $Z_1 + Z_2 = a+b+c+d$	Nadie eligió esta.

Sin embargo, previo a la pregunta de la Figura 2, en los espacios donde los alumnos tienen la oportunidad de generalizar argumentado sus respuestas, aparecen justificaciones con ejemplos particulares (las cuales fueron organizadas en la Tabla 2). No obstante, las respuestas que requieren la discriminación entre opciones que explican el cálculo de operaciones de números complejos se realizan de forma adecuada, tal como se expone en la Figura 2, donde todos los alumnos lograron elegir la respuesta correcta, inclusive cuando algunos no lograron expresar indicios de generalización en sus ensayos previos.

Tabla 2: Recopilación de respuestas que explican la operación suma y se basan en casos particulares o ejemplos

	Respuesta a la relación entre las partes reales de Z_1, Z_2 y la suma $Z_1 + Z_2$	Respuesta a la relación entre las partes imaginarias de Z_1, Z_2 y la suma $Z_1 + Z_2$
Estudiante 1	*Las partes reales de Z1 y Z2 se sumarán o restarán de acuerdo a los signos que se encuentren antes de su valor. Si la parte real de Z1 es: -6 y, la parte real de Z2 es: 3 (positivo).* *El resultado que se obtendrá entre la suma de Z1+Z2 en la parte real será... -6+3= -3 (Siendo el signo del número mayor quien se antepondrá al valor resultante, en este caso el negativo).*	*La relación entre las partes imaginarias es bastante parecida a la suma-resta entre las partes reales. Todo tendrá que ver con el signo "ganador" o el signo mayor del valor. Ej. En Z1 mi parte imaginaria es: +i. En Z2 mi parte imaginaria es: -2i.* *El resultado de Z1-Z2 en las partes imaginarias será de: +i-2i= -i Puesto que, al -2i le hemos quitado una i, al hacerse respetar la ley de los signos con respecto a la unión entre dos valores de distinto signo.*
Estudiante 2	*Se suman los números reales de Z1 y Z2, asimismo se suman los números*	

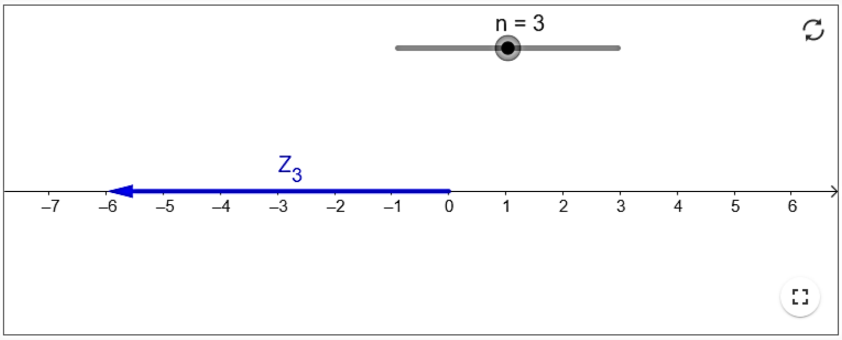
Estudiante 3	*imaginarios de Z1 y Z2, sin embargo, los signos definen si se suman o restan.* *Ejemplo: (2+2i) y (1+i)* *Números reales Z1: 2+1= 3* *La parte real de z1 se suma con la parte real de z2 sin tomar en cuenta la parte imaginaria, un ejemplo sería z1=2+21 + z2=1+i, en este caso solo nos enfocamos en 2+1 que es la parte real. Es igual para cualquier otro caso.*	*Ejemplo: (7-6i) (3-4i)* *Partes imaginarias: Z1= -6i y Z2= -4i* *Suma de números imaginarios:* *Z1+Z2= -6i-4i= -10i* *La parte imaginaria de z1 se suma con la parte imaginaria de z2 sin tomar en cuenta la parte real, un ejemplo sería z1=2+21 + z2=1+i, en este caso solo nos enfocamos en 2i+i que es la parte imaginaria y daría como resultado 3i, pasa lo mismo en otros casos, solo nos enfocamos en la parte imaginaria.*

Otro conflicto semiótico consiste en la asignación de valores negativos a los módulos, por lo que no se hace evidente la noción de longitud de los segmentos dirigidos o distancia. Como estrategia se diseñó la lección 6, cuya finalidad es el estudio de módulos y argumentos en la recta real, además de permitir la construcción de la unidad imaginaria y la convención sobre un argumento menor (90°) para definirla. En la lección se trabajan con números reales positivos y negativos, además de que las diapositivas incluyen comentarios de retroalimentación cuando la respuesta del estudiante manifiesta el conflicto, tal como se observa en la Figura 3.

Figura 3: Estrategia para atender el conflicto semiótico 3

Módulo y argumento 4.1

Utiliza la información del *applet*, manipulando el ***deslizador***, para indicar el *módulo* de $\mathbf{Z_3}$. Recuerda que **módulo** se define como la longitud del segmento dirigido.



Numérica

Respuesta 1:	6
Comentario 1:	
Puntuación:	1
Saltar:	Página siguiente
Respuesta 2:	-6
Comentario 2:	La definición de módulo indica que equivale a la longitud del segmento y no se consideran distancias negativas.
Puntuación:	0
Saltar:	Esta página

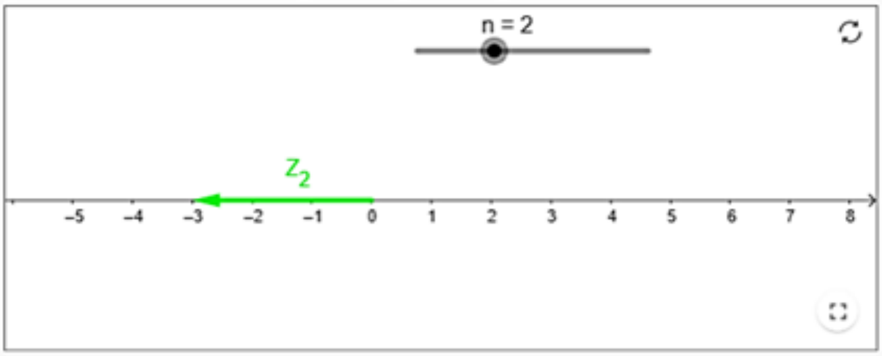
En cuanto a los resultados de la estrategia incorporada, las respuestas de los alumnos manifiestan pocos eventos con el conflicto. Por ejemplo, en la Figura 4 se presenta una solución con un módulo negativo. Cabe señalar que además se presentó un problema en la manipulación del applet, pues el alumno analizó el número Z_2 en lugar de identificar el módulo de Z_3, pero se puede observar que consideró un módulo negativo.

Figura 4: Resultados de la estrategia implementada para atender el conflicto semiótico 3

Numérica: Módulo y argumento 4.1	**Estadísticas de clase**

Pregunta:

Utiliza la información del *applet*, manipulando el ***deslizador***, para indicar el *módulo* de $\mathbf{Z_3}$. Recuerda que **módulo** se define como la longitud del segmento dirigido.



Respuesta:

6	97.7% introdujo esto.
3	1.15% introdujo esto.
-3	1.15% introdujo esto.

Para atender otro conflicto semiótico reportado en la experiencia presencial, el cual se expone como la interpretación incompleta de argumentos por el uso rutinario de las fórmulas de conversión, se optó por focalizar el objetivo de la lección 11 en la construcción de las fórmulas de conversión y utilizar la sesión de institucionalización para la resolución conjunta de problemas de transformación. Entre los reactivos se incluyeron dos tablas con información parcial, para generar un debate sobre las modificaciones y ajustes a las fórmulas de conversión (Figura 5).

Figura 5: Estrategia para atender el conflicto semiótico 4

Completa la siguiente tabla, rellenando los espacios con la información faltante:

MÓDULO	ARGUMENTO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
3	75°		
	°	2	-3
	15°		1
	45°	6	
	30°		1
	°	2	2
2	15°		

Considera que todos los valores están redondeados a una cifra significativa (después del punto decimal)

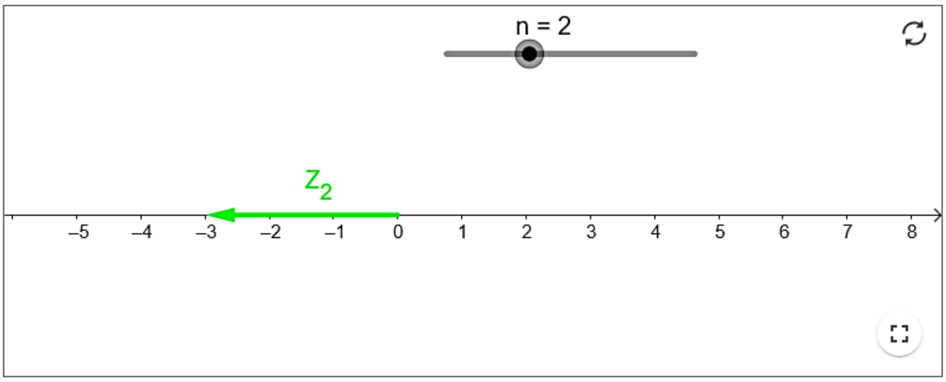
En cuanto a los nuevos conflictos identificados, se detectaron las respuestas de los estudiantes durante la lección de módulos y argumentos de números complejos, donde los alumnos confunden los significados de dichos objetos matemáticos entre sí, por lo que se recomienda un ajuste en las actividades que evite la presentación prematura de tales elementos (Figura 6). En el caso de la implementación se subsanó con la sesión de institucionalización de resultados.

Figura 6: Conflicto semiótico 5

Respuesta corta: Módulo y argumento 3.2 | **Estadísticas de clase**

Pregunta:

Utiliza la información del *applet*, manipulando el ***deslizador***, para indicar el *argumento* de **Z_2**. Recuerda que **argumento** representa el ángulo que forman los segmentos dirigidos con la parte positiva de la recta real.



Respuesta:

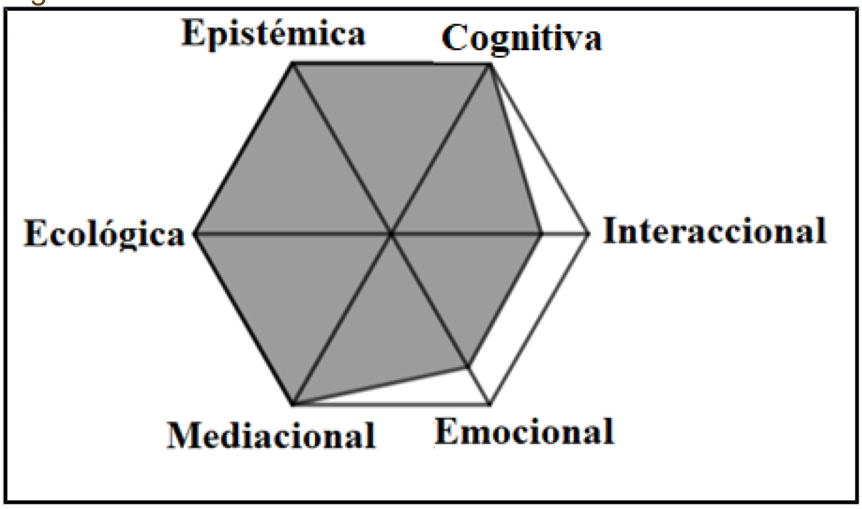
Respuesta	Estadísticas de clase
0	5.75% introdujo esto.
180	79.31% introdujo esto.
3	5.75% introdujo esto.
180°	3.45% introdujo esto.
-3	3.45% introdujo esto.
Cero grados	1.15% introdujo esto.
izquierda	1.15% introdujo esto.

Valoración de idoneidad didáctica

Como se mencionó anteriormente, se analizaron las idoneidades didácticas registradas durante la experiencia presencial para el ajuste de la secuencia a modalidad virtual. Como estrategia para incidir positivamente en la valoración de las dimensiones *emocional* e *interaccional*, el uso de la plataforma AVAUS y las evaluaciones adicionales, permiten un monitoreo en tiempo real del avance de cada estudiante y complementan el trabajo intramatemático con retroalimentación de los contenidos. Para la idoneidad *cognitiva,* se realizó una descomposición de las primeras tres actividades en ocho lecciones independientes, favoreciendo la autonomía en su resolución y homogeneizando los conceptos previos asociados a los conjuntos de números y su generalización hacia la presentación de la unidad imaginaria. Relacionado con la dimensión *mediacional*, se realizó una encuesta inicial con los dos grupos de ingeniería asignados para el curso de Álgebra durante el ciclo virtual 2020-2, en la que se exploraban las condiciones de conectividad y los dispositivos a los que recurrirían para realizar sus actividades académicas. Se recibió la respuesta de 64 estudiantes y se destaca que el 98.43 % dispone de smarthphone con acceso a internet para sus actividades, el 93.25 % indica que el acceso a internet es propio, además de que la conectividad la clasifican entre aceptable y excelente (92.18%). Como parte de las decisiones tomadas con estos resultados, se resalta que el ambiente de Moodle de la plataforma AVAUS es compatible con computadoras y smartphone (iOS y android).

Como balance general y como aportación del reporte de intervención, se considera que la experiencia reporta altos niveles en las idoneidades *epistémica*, *ecológica*, *cognitiva* y *mediacional,* al rescatar las fortalezas del diseño original para modalidad presencial e incorporar estrategias de autoaprendizaje, mediante la retroalimentación en tiempo real y con indicadores que permitan dar seguimiento en tiempo real al trabajo de los estudiantes; en esta dirección también se destaca la pertinencia de la plataforma y su flexibilidad para ser utilizada en distintos dispositivos. Como elemento adicional a la dimensión *cognitiva*, se puntualiza que los prerrequisitos conceptuales pueden monitorearse con mayor eficiencia, además de que la configuración de repetir lecciones fortalece las afirmaciones de los estudiantes y le permite al docente la toma de decisiones para dirigir las sesiones de institucionalización. En cuanto a la idoneidad *interaccional*, se sigue manifestando poca participación de algunos estudiantes durante las etapas de institucionalización. Como herramienta auxiliar y para favorecer esta dimensión interaccional, se recomienda la creación de foros cuyas temáticas centrales sean las respuestas de los mismos estudiantes donde se les brinde la oportunidad de generalizar procesos involucrados en las actividades, lo cuales se recomiendan sean previos a la sesión de institucionalización. Por otra parte, la asignación de un nivel medio alto a la idoneidad *emocional* se mantiene como un área de oportunidad, ya que la secuencia sigue considerando un contexto intramatemático, pero se valora que la plataforma y su monitoreo se convierten en un motivador adicional (Figura 7).

Figura 7: Valoración de idoneidad didáctica de actividades virtuales.



Conclusiones

En el planteamiento del problema se reconoce que el ajuste de la propuesta presencial a la modalidad virtual responde a las condiciones de trabajo que impone la contingencia sanitaria (Covid-19). Con ese antecedente, es importante reflexionar sobre los aspectos rescatables de ambas experiencias. En cuanto al trabajo virtual, el uso de la plataforma Moodle permite el monitoreo del avance de los estudiantes y le ayuda al docente preparar las sesiones de institucionalización con una estructura que considere los errores y dificultades manifestados por los alumnos. Una aportación adicional del uso de la plataforma es que permite personalizar la participación de los estudiantes, ya que el docente tiene la oportunidad de hacer referencia a respuestas específicas de alumnos, promoviendo su participación en las sesiones de institucionalización como generadores de debate o para respaldar afirmaciones.

De la experiencia presencial se reconocen las facilidades del uso de la página web durante las sesiones de institucionalización, permitiendo que las afirmaciones de los estudiantes sean más autónomas, por no estar influenciados por instrucciones que se organizaron para favorecer un autoaprendizaje.

Un elemento común, pendiente en ambas modalidades, es la administración del tiempo y las complicaciones de ajustarse a lo propuesto en los programas de estudios. Con esta consideración, es factible trabajar las lecciones en Moodle como actividades extra-clase, incorporando cambios en los applets para que no se trabajen las mismas situaciones de la página web de la secuencia original. La modificación sugerida permitiría hacer uso de la versión web como herramienta de institucionalización, sin obstaculizar las conclusiones generadas en las lecciones de plataforma.

Referencias

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (pp. 45-61).

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. Enseñanza de las Ciencias

Godino, J.D., Batanero, C., & Font, V. (2009). Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino J. D., Bencomo D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Martínez C (2008). La educación a distancia: sus características y necesidad en la educación actual [Revista]. Educación, Vol. 17 N° 33, pp. 7-27. Recuperado de: http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/educacion/article/view/1532/1477

Pardo, T., Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (pp. 3-15). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España.

Romero, D., Del Castillo, A.G. (2012). Actividades Didácticas en Línea con Geogebra para el Aprendizaje de Números Complejos. En Hitt, F., Cortés, C. (Eds.) Formation à la recherche en didactique des mathématiques (pp. 200-211) Canadá: Loze-Dion éditeur inc.

Romero D. (2013). Números Complejos: Actividades Didácticas con Representaciones Dinámicas. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora.

Sada, M. (2008). Números Complejos: representación gráfica. Ejemplos diversos de webs interactivas de Matemáticas. Recuperado el 23 de enero de 2011 de http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/

Tintaya, E. (2003). Desafíos y fundamentos de educación virtual. Material de enseñanza. Bolivia: Universidad Mayor San Andrés, Ciencias de la Educación.

Cómo citar este artículo: Romero Robles, D., del Castillo Bojorquez, A. G., & Quiñonez Ayala, M. A. Intervención didáctica para el aprendizaje de números complejos en modalidad virtual. *SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS*, *5* (1), pp. 112-126

Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp. 127-142
SahuarUS

Evaluación de conocimientos geométricos en futuros docentes de matemáticas. Estudio de caso de las generaciones 2018-2022 y 2019-2023

Mario Alberto Quiñonez Ayala
e-mail: mario.quinonez@unison.mx
Escuela Normal Superior, plantel Hermosillo

Resumen
En el presente trabajo se comparte un análisis comparativo de los conocimientos geométricos en las nuevas generaciones de docentes de matemáticas de secundaria, enfatizando que los sujetos de estudio son los alumnos formados en la Escuela Normal Superior plantel Hermosillo y representan a las primeras dos generaciones del plan de estudio 2018. El análisis propuesto se obtiene a partir de los contenidos tratados en el curso de razonamiento geométrico, específicamente en el contenido temático de rectas y puntos notables del triángulo. La información que se comparte se procesa a partir de la incorporación de la teoría de Van Hiele para el desarrollo del curso, además del diseño de instrumentos complementados por la Taxonomía de Bloom. En el contexto de la investigación, se resalta la importancia de incorporar estrategias metodológicas que permitan reflexionar sobre la reciente reestructuración de los planes de estudio y los resultados obtenidos en las primeras experiencias
Palabras clave: Escuela normal, conocimiento geométrico, educación universitaria.

Recibido 31 de enero de 2021
Aceptado 19 de abril de 2021

Introducción

El presente trabajo se organiza en cuatro apartados, en el primero se presenta el planteamiento del problema, donde se destaca el contexto de la investigación y la influencia de la reforma reciente en los planes y programas de estudio en la educación normalista, como conclusión del planteamiento se determina que la investigación se acota al estudio de puntos y rectas notables del triángulo, que son parte del curso de razonamiento geométrico de primer semestre del programa de licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En un segundo apartado, se presentan los referentes teóricos principales que fueron elegidos, tanto como metodología para el desarrollo del curso, como para la construcción de indicadores que fundamentan el trabajo. En el apartado se presenta la teoría de Van Hiele y sus componentes para dirigir la intervención docente, además de armonizar con el contenido temático del curso de razonamiento geométrico. En cuanto a la construcción de indicadores, se elige y presenta la taxonomía de Bloom como la directriz para el diseño de instrumentos y la presentación de conclusiones del trabajo.

En la tercera sección se describe la metodología, se incluye una reflexión sobre el tipo de investigación y se presentan los instrumentos para la recopilación de información, donde se destacan un examen de opción múltiple sobre conceptos clave del curso y una segunda herramienta sobre proposiciones que relacionan los conceptos anteriores. Esta sección concluye con la precisión de las características de los participantes y las condiciones generales de la investigación.

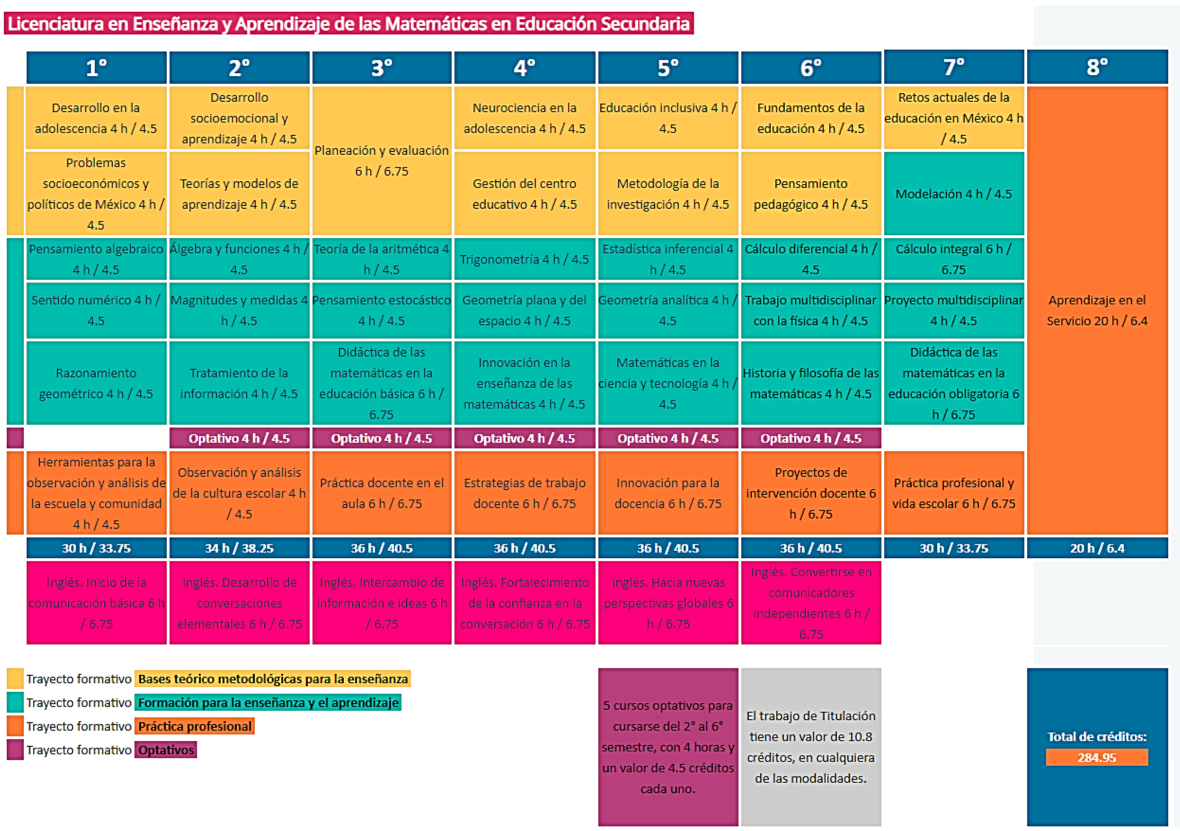
En un último apartado, titulado análisis de los resultados se profundiza sobre las respuestas de los sujetos de estudio y las consideraciones hechas para la generación de conclusiones. En este punto se destaca la principal aportación del trabajo, que consiste en una propuesta metodológica para la integración de los marcos teóricos sugeridos, así como su uso para explicar intervenciones didácticas en otras asignaturas.

Planeamiento del problema

Como parte de la estrategia de fortalecimiento y transformación de las escuelas normales, la DGESuM (Dirección General de Educación Superior para el Magisterio), implementó en 2018 una restructuración del plan de estudios para el desarrollo de los futuros docentes de educación básica en el país. La nueva propuesta académica ha sido ofrecida a las primeras tres nuevas generaciones de docentes, las cuales cursan actualmente el segundo, cuarto y sexto semestre de sus respectivos programas, por lo que es indispensable evaluar su impacto y su correspondencia con las nuevas expectativas de egreso. En este contexto se formaliza la necesidad de estudiar los efectos de las modificaciones curriculares, partiendo de la incidencia de las estrategias docentes en el aprendizaje de los alumnos en las escuelas normales, por lo que se reflexiona puntualmente en la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (LEAM).

Reconociendo la variedad de aspectos que se pueden considerar para evaluar las estrategias docentes, sumado con las responsabilidades propias asociadas al aprendizaje de los alumnos, es necesario dimensionar el alcance, por lo que se optó por seleccionar una de las principales novedades del nuevo plan de estudios, el trayecto formativo de enseñanza y aprendizaje (Figura 1), el cual representa el bloque de la malla curricular sobre aspectos que van desde el dominio conceptual e instrumental de la disciplina, hasta su pedagogía y didáctica específica para desarrollar una práctica docente de calidad (DEGESuM, 2018).

Figura 1. Plan de estudios 2018 del programa de LEAM



Fuente: DEGESuM (www.cevie-dgespe.com/index.php/planes-de-estudios-2018/120)

Se elige el curso de razonamiento geométrico y se aprovecha que ha sido una asignatura con la que se ha podido trabajar con las dos primeras generaciones de estudiantes del plan de estudios 2018, además de que contiene componentes disciplinares y didácticos como parte del curso, por lo que invita al estudiante a experimentar una clase de matemáticas, para posteriormente incorporar momentos de reflexión didáctica, donde se le acercan componentes teóricos que le permitan analizar lo sucedido durante la sesión, similar a un proceso cíclico de aprendizaje y metacognición. En un intento de armonizar la práctica docente y la posibilidad de evaluarla, se incorporaron a la planeación de la materia los elementos teóricos de metacognición propuestos en el programa de la misma, la teoría de Van Hiele, la cual se indica como un tema de la tercera unidad de aprendizaje (SEP, 2018).

Con el contexto previamente presentado, se anticipan momentos clave durante el desarrollo del curso para evaluar la forma de trabajo y su efecto, con la intención de incorporar mejoras en la práctica. En cuanto al desarrollo de la investigación, se realiza de forma paralela a la planeación didáctica y se culmina al completar el curso de razonamiento geométrico con la segunda generación del plan de estudios 2018.

Por la diversidad de aspectos que pueden ser considerados para el trabajo, se optó por restringir el análisis comparativo de los conocimientos geométricos, exclusivamente a la temática de puntos y rectas notables de triángulos, además de utilizar la información en modificaciones que se deben incorporar para un desarrollo más eficiente del curso (razonamiento geométrico). Por lo que los objetivos que se plantean como guía son los siguientes:

- Identificar los conocimientos geométricos sobre los puntos y rectas notables de triángulos que poseen los futuros docentes de matemáticas.
- Comparar los conocimientos geométricos, sobre puntos y rectas notables de triángulos, en distintas generaciones de docentes (generaciones 2018-2022 y 2019-2023).
- Evaluar la práctica docente a partir de las diferencias en la formación geométrica de los futuros docentes.

Marco Teórico

En el apartado se exponen referencias que aportan elementos de análisis y recomendaciones, además de que se considera que están en armonía con los componentes del plan de estudio 2018. Las corrientes teóricas que se destacan para organizar el trabajo de investigación son: la teoría de Van Hiele y la taxonomía de Bloom. Van Hiele (1957) presenta en su trabajo una descripción sobre distintos niveles de comprensión en geometría, a partir de habilidades medibles de los estudiantes. En la actualidad, la teoría de Van Hiele ha sido generalizada a otras ramas de la Matemática y enriquecida con diversos principios cognitivos de corrientes educativas modernas (Chacara, 2004; Gutiérrez, 1993 y Jaime, 1993). Bloom (1956) presenta, por su parte, un sistema de clasificación de los aspectos cognitivos que manifiesta el estudiante, el cual se compone de una estructura jerárquica que va de lo más simple a lo más complejo.

Teoría de Van Hiele

La teoría de Van Hiele aporta reflexiones sobre el por qué los alumnos tienen problemas para la comprensión de la geometría, sugerencias sobre el orden del contenido geométrico y las características de las actividades que los alumnos deben experimentar para favorecer su aprendizaje. Las aportaciones más significativas de la teoría son la distinción de cinco niveles de razonamiento por los que transita un estudiante durante el desarrollo de la comprensión geométrica y las fases de aprendizaje que permiten una apropiación de cada nivel.

Niveles de razonamiento de Van Hiele

Los alumnos que se ubican en el primer nivel de comprensión geométrico, llamado reconocimiento, reconocen objetos geométricos por su apariencia global, por lo que se clasifican con base a sus semejanzas y diferencias globales entre ellos, son incapaces de reconocer los componentes o propiedades de los objetos, además de clasificar los objetos mediante el uso de elementos no comunes o irrelevantes. El segundo nivel recibe el nombre de análisis, es donde el individuo incorpora terminología técnica y es capaz de identificar las propiedades de los objetos, aunque es capaz de utilizar la información para comparar objetos y deducir nuevas relaciones de manera informal y a partir de la experimentación, no se realizan clasificaciones lógicas ni se relacionan las propiedades entre sí. El nivel tres es denominado clasificación y es donde los alumnos ordenan de manera lógica las propiedades de los objetos, utilizando cadenas cortas de deducción y comprenden las relaciones entre propiedades y figuras, las incorporaciones del nivel le permiten reconocer el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta, incluso es capaz de transformar definiciones incompletas en definiciones completas o formular definiciones económicas y correctas para un objeto, además del uso explícito de la forma lógica "Si...entonces" en la formulación y tratamiento de conjeturas, así como el uso implícito de reglas lógicas sin ser capaz de realizar razonamientos lógicos formales o requerir su necesidad.

En el cuarto nivel, llamado deducción, los alumnos materializan el papel lógico y deductivo de las matemáticas, comprendiendo la estructura axiomática de la disciplina, por lo que son capaces de desarrollar secuencias largas de proposiciones y aceptar la posibilidad de definiciones equivalentes. En la descripción hecha por Van Hiele, se plantea la existencia de un quinto nivel (rigor), cuya principal característica es la capacidad para manejar, analizar y comparar distintos sistemas axiomáticos. La consideración del nivel 5 de Van Hiele fue descuidada por distintas investigaciones, ya que sólo era del alcance de profesionales en matemáticas y algunos estudiantes adelantados, lo restrictivo del público hizo poco práctica su incorporación en algunos trabajos.

Dentro de las consideraciones que deben tomarse en cuenta al utilizar la Teoría de Van Hiele como modelo metodológico, es necesario mencionar que el orden de avance de los alumnos es progresivo y jerarquizado; es decir, no se puede alcanzar un determinado nivel sin antes haber pasado por el anterior, además de que, para situarse en un determinado nivel de pensamiento superior, es necesario exteriorizar los elementos que se manejaban como internos en el nivel anterior. Aunque la intención de los niveles es clasificar a partir de características generales de las capacidades de los estudiantes, no quiere decir que si dos alumnos se sitúan en un mismo nivel tengan el mismo conocimiento, sino que son capaces de entenderse por la similar forma de razonar, lo cual se debe al lenguaje propio de cada nivel, tanto en símbolos lingüísticos como en el tipo de relaciones que conectan esos símbolos.

Fases de Aprendizaje

Como recomendación para los profesores, en cada nivel de Van Hiele se presentan cinco fases de aprendizaje que apoyan la concreción del nivel, además de promover un avance gradual al interior de cada uno de ellos. Las fases representan un esquema para organizar la enseñanza, con la intención de facilitar el alcance de un nivel de razonamiento de Van Hiele superior. La primera fase, de información, es la instancia donde el estudiante es notificado sobre el panorama general de las actividades a realizar, planteando los objetivos buscados en el tema, el campo de investigación y el tipo de problemas a resolver. En cuanto al profesor, esta fase es útil para indagar sobre los conocimientos previos con los que cuentan los alumnos (o su nivel de razonamiento), para reconocer su capacidad de desenvolvimiento ante determinadas tareas. La segunda fase es la de orientación dirigida, durante la cual se suministra material por el profesor y una serie de instrucciones definidas, donde se promueven diversas actividades para que el estudiante explore y descubra ciertos conceptos y propiedades fundamentales del área de estudio. Al concluir la exploración es necesario un espacio de explicitación, el cual representa la tercera fase de aprendizaje, permitiendo la socialización de lo descubierto en las etapas previas, además de homogeneizar sobre la variedad de símbolos y técnicas utilizadas, en esta instancia es necesario acordar la simbología permitida y fomentar la expresión precisa de los alumnos.

Para afianzar y completar las reflexiones hechas, durante la cuarta fase, es necesaria la elaboración de tareas que pongan en juego los conocimientos adquiridos, este tipo de problemas son más libres que los planteados en la fase dos y se denomina orientación libre, con la finalidad de que los estudiantes apliquen sus nuevos conocimientos, además de aprender propiedades (más complejas) y que logren relacionarlas con otras. La última fase se llama integración y se ejecuta con la finalidad de obtener una perspectiva global y uniforme en el salón de clases, el profesor debe solicitar un resumen de lo explorado (ya sea con discusiones, actividades o discursos propios) con la intención de lograr una integración completa de lo aprendido, la pretensión de la fase es la acumulación global de lo trabajado para tomarse como la primera fase del siguiente nivel (información).

Aunque las fases tienen un carácter cíclico; en otras palabras, son las mismas y siguen el mismo orden para cada uno de los niveles; existe una diferencia sustancial entre los contenidos, el lenguaje, los argumentos y los procedimientos de cada nivel (sugiriendo una metodología de trabajo, pero modificando el contenido involucrado en cada nivel).

Taxonomía de Bloom

Una vez descrita la teoría de Van Hiele, es necesario clasificar el desempeño dentro de cada nivel, por lo que se incorpora la taxonomía de Bloom sobre objetivos de aprendizaje cognitivos. La clasificación propuesta reconoce la existencia de seis niveles o fases diferenciadas que el alumno debe ser capaz de superar para asegurar el aprendizaje. El primer nivel de conocimiento se refiere a la capacidad de recordar hechos, estructuras, esquemas sin apoyo de ninguna especie, por lo que requiere que el alumno repita datos, teorías o principios en su forma original. El segundo nivel es de comprensión, esta etapa se refiere a la capacidad de abstracción, ya que el individuo puede traducir o parafrasear las versiones originales de la información, además de extrapolación de la misma, anticipando implicaciones o consecuencias. El nivel tres recibe el nombre de aplicación, donde aparecen los mismos principios del nivel previo y la diferencia radica en la incorporación de elementos innovadores y que el proceso de abstracción se asocia con situaciones particulares y concretas. El cuarto nivel se denomina análisis, donde se destaca la descomposición de la problemática en partes y el descubrimiento de las relaciones entre ellas, haciendo explícita la estructura y jerarquía de los componentes. El quinto nivel se llama síntesis y la característica común de las situaciones que se resuelven es que requieren la capacidad de trabajar con fragmentos o partes, los cuales son organizados, ordenados y combinados para producir un esquema o estructura que no estaba presente previamente. El último nivel es de evaluación, donde se requiere formular juicios sobre el valor de los materiales y métodos.

Metodología

La intención de este apartado se concentra en la determinación de las características de la investigación, la descripción general de los elementos utilizados para evaluar el pensamiento geométrico de los estudiantes, asignando con ello un nivel de razonamiento de Van Hiele y una categoría de la taxonomía de Bloom. Un foco de interés adicional se compone por las consideraciones para el diseño de los instrumentos y las condiciones de recopilación y procesamiento de la información.

Tipo de investigación

Al reconocer que la investigación surge de la necesidad de sistematizar la práctica docente e incidir positivamente en una comunidad se cataloga como IAP (investigación acción participativa), partiendo de que el investigador es un participante de la realidad social que se pretende modificar, además de la toma de decisiones asociadas a beneficiar al colectivo. El trabajo se cataloga con un enfoque mixto, pero predominantemente cuantitativo, ya que el diseño de instrumentos, su tratamiento y conclusiones se basan en información generalizable y procesada numéricamente.

Criterio de restricción del tema de estudio y contexto

Primeramente, el tema seleccionado para el estudio es el de rectas y puntos notables de triángulos, por lo que se diseñaron actividades acordes a las fases de aprendizaje y niveles de razonamiento de Van Hiele, las cuales son compatibles con las temáticas del curso de primer semestre de Razonamiento Geométrico, el cual es parte del plan de estudios 2018 y perteneciente al trayecto formativo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por la demanda académica, los sujetos de estudio son alumnos pertenecientes a la Escuela Normal Superior plantel Hermosillo y miembros de las generaciones 2018-2022 y 2019-2023 de la licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el primer grupo está compuesto por 24 participantes y el segundo por 35 estudiantes (profesores en formación). El profesor investigador fue el responsable del curso para ambas generaciones por lo que incorporó actividades similares para ambos grupos, con modificaciones menores asociadas a necesidades específicas.

Como parte del contenido de la asignatura se menciona la introducción a la teoría de Van Hiele durante la tercera unidad, por lo que se recurrió a la implementación de la metodología durante el desarrollo del curso para favorecer su análisis en la etapa final del curso. Enseguida se muestran las tablas 1 y 2, donde se presenta el desarrollo de los primeros dos niveles, en los cuales se desarrolla el tema de “Baricentro” y “Medianas” y fueron utilizadas como guía para el desarrollo de las primeras sesiones del tema “rectas y puntos notables de triángulos”.

Tabla 1. Ajustes metodológicos para el estudio de rectas y puntos notables con las fases de aprendizaje de la teoría de Van Hiele (Nivel uno)

TEMA: “Baricentro (Centro de gravedad)”	
Fase	Actividades
Fase 1 (Información)	El profesor introduce el concepto de *centro de gravedad*, mediante la solicitud de que los alumnos mantengan el equilibrio al sostenerse sobre un pie que hace contacto con una pared lateral del aula. Se coordina la integración de las nociones comunes relacionadas con una lluvia de ideas.

Fase 2 (Orientación dirigida)	A partir de figuras triangulares hechas en papel cascaron (cinco para cada alumno) y palos de madera, el profesor solicita a los alumnos que sostengan a la figura mediante el uso de los palos de madera, además de marcar los puntos donde es posible sostener la figura.
Fase 3 (Explicitación)	Los estudiantes intercambian las figuras y validan los puntos identificados por sus compañeros, posteriormente discuten sobre las estrategias para la ubicación de los puntos de interés y se resalta la "unicidad" de los puntos elegidos.
Fase 4 (Orientación Libre)	Utilizando los triángulos de los compañeros, los alumnos deben identificar las "líneas de equilibro", las cuales se definen como líneas rectas que también sostienen a la figura en equilibrio, se propone el uso de los palos de madera en forma horizontal o el uso del ancho de las reglas del juego geométrico. Asociado a la misma tarea, se solicita que se vuelvan a intercambiar las figuras para que sean validadas por otros miembros del grupo.
Fase 5 (Integración)	El profesor induce al estudiante a resumir lo observado, enfatizando: -La distribución homogénea del peso al utilizar el centro de gravedad. -La unicidad del centro de gravedad en cada figura (triángulo). -La existencia de una infinidad de líneas de equilibrio -El reconocimiento que "todas" las líneas de equilibrio pasan por el centro de gravedad.

Tabla 2. Ajustes metodológicos para el estudio de rectas y puntos notables de triángulos con las fases de aprendizaje de la teoría de Van Hiele (Nivel dos)

TEMA: "Medianas (Líneas de equilibrio)"	
Fase	Actividades
Fase 1 (Información)	A partir de una lluvia de ideas, el profesor enlista las características de los elementos intervinientes de la actividad previa (centro de gravedad, líneas de gravedad y el peso como elemento conector).
Fase 2 (Orientación dirigida)	Se proyectan triángulos con diferentes características (acutángulo, rectángulo, obtusángulo, isósceles, equilátero y escaleno) y se solicita a los estudiantes que anticipen el punto donde se encontrará el "centro de gravedad"
Fase 3 (Explicitación)	Los estudiantes socializan las propuestas de ubicación, posteriormente discuten sobre las características de los puntos elegidos para asegurar que representa la posición del centro de gravedad. Se incorpora la componente "peso" en el análisis y se dirige la discusión para que el alumno asocie área con peso, considerando que las figuras de papel cascarón son prismas "delgados", por lo que el ancho se puede despreciar al ser el mismo en todas las figuras utilizadas
Fase 4 (Orientación Libre)	A partir de la fase previa y con una nueva colección de triángulos con diferentes características, se solicita a los alumnos que identifiquen las líneas que dividen las figuras en regiones con la misma área.

Fase 5 (Integración)	El profesor induce al estudiante a resumir lo observado, enfatizando: -La propiedad de las líneas de equilibrio de partir la figura en “regiones” con la misma área. -Estrategias para asegurar que las líneas elegidas dividen a la figura en regiones con áreas iguales. -La construcción de líneas óptimas que parten a la figura en dos regiones con la misma área, que pasan por vértices y puntos medios de lados opuestos (mediana).

De manera similar, se construyen cuadros esquemáticos para los distintos temas y niveles de razonamiento, limitando el análisis a los primeros cuatro niveles de razonamiento. En las tablas se describen las fases de aprendizaje para cada nivel de razonamiento.

En cuanto a la estructura de las tablas, en todas se inicia con la etapa de presentación de la problemática, socializando los aspectos generales y la terminología de apertura (información), posteriormente se comparten las instrucciones puntuales para resolver la situación asignada (orientación dirigida). Al dedicar tiempo de trabajo y conseguir respuestas de los estudiantes, se continua con la exteriorización de lo obtenido y presentando los nuevos términos que describen la situación de interés (explicitación), cuando la nueva terminología y estrategias han sido compartidas entre los estudiantes, se procede a una segunda etapa de exploración (orientación libre); para finalizar se incorpora una etapa donde se resumen los elementos clave (integración).

Instrumentos de recolección de información

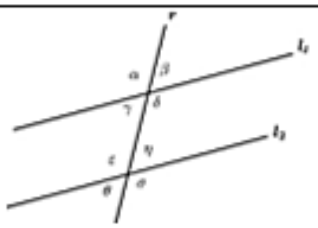
Aunque la observación participativa es una técnica recurrente en las distintas etapas de la investigación, se asigna mayor peso a dos exámenes de contenidos, los cuales son los instrumentos de apoyo para responder a dos de los objetivos de investigación. El primero es un examen de 10 preguntas de opción múltiple, el cual solicitaba la elección de la respuesta correcta sobre definiciones y construcciones utilizadas durante el curso (Figura 2). Con la finalidad de inhibir elecciones al azar de las respuestas, se dio la indicación de penalizar las respuestas incorrectas y agregar la opción “no sé”, la cual sumaba puntajes al desempeño y aporta confiabilidad al instrumento.

Figura 2. Primer instrumento de recopilación de información (preguntas de opción múltiple)

Nombre: ________________________________ **Calificación:** ☐

Para cada reactivo, utiliza el espacio de la izquierda y selecciona SÓLO una de las opciones de respuesta. Todas las preguntas tienen un valor de 10 puntos e incluyen la opción de respuesta **NO SÉ**, se recomienda utilizarla cuando se desconozca la respuesta y tendrá un valor de 2 puntos.

En la siguiente figura, se representa el caso en que dadas dos rectas paralelas (l_1 y l_2), y otra recta transversal a ellas (r), se forman ocho ángulos que pueden distinguirse mediante las letras griegas que los denotan.



☐ **C1**. A partir de la figura anterior, los $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\eta}$ son iguales y se llaman __________

a) ángulos alternos internos
b) ángulos alternos externos
c) ángulos correspondientes
d) ángulos suplementarios
e) No sé

☐ **C2**. A partir de la figura anterior, los $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\eta}$ son iguales y se llaman __________

a) ángulos alternos internos
b) ángulos alternos externos
c) ángulos correspondientes
d) ángulos suplementarios
e) No sé

☐ **C3**. A partir de la figura anterior, los $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\theta}$ son iguales y se llaman __________

a) ángulos alternos internos
b) ángulos alternos externos
c) ángulos correspondientes
d) ángulos suplementarios
e) No sé

☐ **C4**. ¿Cuál de los siguientes **NO** es un criterio de congruencia de triángulos?

a) ALA
b) LAL
c) LLA
d) LLL
e) No sé

☐ **C5**. En el caso de los triángulos ¿cuál es la recta notable que se forma al unir un vértice con el punto medio del lado opuesto?

a) Bisectriz
b) Mediana
c) Mediatriz
d) Altura
e) No sé

C6. En el caso de los triángulos ¿cuál es la recta notable que se forma al construir una perpendicular que pasa por el punto medio de un lado (segmento)?

a) Bisectriz
b) Mediana
c) Mediatriz
d) Altura
e) No sé

C7. En la imagen inferior se indica el proceso de construcción de una recta notable ¿cuál es el nombre que recibe el trazo final?

a) Bisectriz
b) Mediana
c) Mediatriz
d) Altura
e) No sé

C8. En el caso de los triángulos ¿cuál es el punto notable que se define como la intersección de las mediatrices de un triángulo?

a) Baricentro
b) Circuncentro
c) Incentro
d) Ortocentro
e) No sé

C9. En el caso de los triángulos ¿cuál es el punto notable que se define como la intersección de las medianas de un triángulo?

a) Baricentro
b) Circuncentro
c) Incentro
d) Ortocentro
e) No sé

C10. En el caso de los triángulos ¿cuál es el punto notable que se define como la intersección de las bisectrices de un triángulo?

a) Baricentro
b) Circuncentro
c) Incentro
d) Ortocentro
e) No sé

El segundo instrumento es un examen de 20 reactivos (Figura 3), donde en cada uno se solicita la elección de falso o verdadero sobre proposiciones que requieren la integración de los elementos del curso. De manera similar al examen previo, se notificó a los alumnos de una penalización por respuestas erróneas, por lo que varias de las proposiciones no fueron respondidas, aportando certidumbre a la información.

Figura 3. Segundo instrumento de recopilación de información (proposiciones de falso y verdadero)

Nombre: ______________________________

Para cada reactivo, utiliza el espacio de la izquierda para determinar si la proposición es Verdadera (V) o Falsa (F). Cada respuesta correcta tiene un valor de 5 puntos y las afirmaciones erróneas serán penalizadas con 2.5 puntos negativos, los recuadros vacíos no serán considerados como error ni acierto (0 puntos).

V o F		PROPOSICIÓN
	P1.	Todos los triángulos escalenos son obtusángulos.
	P2.	Todos los triángulos equiláteros son acutángulos.
	P3.	Los triángulos isósceles no son triángulos rectángulos.
	P4.	Los triángulos escalenos no son triángulos rectángulos.
	P5.	La bisectriz de un ángulo es el segmento que se encuentra a la misma distancia de los dos lados que lo forman.
	P6.	La mediana es la recta que se forma por los puntos que se encuentran a la misma distancia de dos puntos dados (extremos de un segmento).
	P7.	El circuncentro (intersección de mediatrices), es un punto notable que se encuentra dentro del triángulo si el triángulo es rectángulo.
	P8.	El circuncentro (intersección de mediatrices), es un punto notable que se encuentra fuera del triángulo si el triángulo obtusángulo.
	P9.	El ortocentro (intersección de alturas), es un punto notable que se encuentra en un vértice del triángulo si el triángulo es rectángulo.
	P10.	El baricentro (intersección de medianas), es un punto notable que se encuentra fuera del triángulo si el triángulo es obtusángulo.
	P11.	El baricentro (intersección de medianas), es un punto notable que se encuentra dentro del triángulo si el triángulo es rectángulo.
	P12.	El incentro (intersección de bisectrices), es un punto notable que puede ubicarse fuera del triángulo.
	P13.	El baricentro y circuncentro coinciden si el triángulo es isósceles.
	P14.	Los puntos notables (incentro, baricentro, circuncentro y ortocentro) coinciden si el triángulo es equilátero.
	P15.	Las diagonales de un rectángulo se cortan en los puntos medios.
	P16.	Las diagonales de un cuadrado dividen la figura en cuatro triángulos equiláteros.
	P17.	Se puede construir un triángulo congruente a otro a partir de conocer dos lados y el ángulo que forman entre ellos.
	P18.	Los triángulos que son congruentes también son semejantes.
	***P19.**	Un pentágono regular se divide en cinco triángulos equiláteros al unir cada vértice con el centro de la figura.
	***P20.**	Una versión equivalente del Teorema de Pitágoras es "*En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los lados que forman el ángulo recto*".

Para facilitar el procesamiento de la información contenida, a los reactivos del primer instrumento se les asignó la etiqueta C, por referirse a conceptos; mientras que los reactivos del examen de proposiciones tienen como asignación la letra P. Una precisión adicional, es que los instrumentos fueron diseñados como herramienta para evaluar el desempeño de los estudiantes durante el curso de razonamiento geométrico, por lo que se omiten los reactivos que no están asociados a la temática de puntos y rectas notables de triángulos, tal es el caso de C1, C4, P4, P16, P20, entre otros.

En la Tabla 3, se presentan los reactivos que fueron considerados para el presente trabajo, además de precisar el aspecto cognitivo y disciplinar que mide cada uno, asignando una categoría de la taxonomía de Bloom y un nivel de razonamiento de Van Hiele.

Tabla 3. Asignación de niveles de la taxonomía de Bloom y Van Hiele

<table>
<tr><th>Reactivo</th><th colspan="2">Objetivo de aprendizaje (Taxonomía de Bloom)</th><th>Nivel de razonamiento de Van Hiele</th></tr>
<tr><td>C8
C9
C10</td><td>Definir los puntos notables a partir de la intersección de las rectas notables.</td><td>Conocimiento</td><td rowspan="2">Nivel 2</td></tr>
<tr><td>C5
C6
P5
P6</td><td>Discriminar entre las rectas notables a partir de sus propiedades.</td><td rowspan="2">Comprensión</td></tr>
<tr><td>C7</td><td>Discriminar entre las rectas notables a partir de la secuencia de construcción.</td><td rowspan="2">Nivel 3</td></tr>
<tr><td>P7
P8
P9
P10
P11
P12</td><td>Obtener la ubicación de puntos notables en distintos tipos de triángulos.</td><td>Aplicación</td></tr>
<tr><td>P13
P14</td><td>Comparar la ubicación de puntos notables en distintos tipos de triángulos.</td><td>Análisis</td><td>Nivel 4</td></tr>
</table>

Para precisar la construcción de la tabla anterior, la pregunta C5 solicita al estudiante que reconozca la recta notable que se forma al unir un vértice con el punto medio del lado opuesto, en este punto se debe considerar que la presentación de la medianas no incorporó construcciones geométricas tradicionales (de regla y compás) y fueron introducidas al curso como “líneas de equilibrio”, por lo que el estudiante que responda correctamente debe ser capaz de abstraer o traducir las versiones originales de la información (comprensión) e identificar las propiedades de los objetos y deducir nuevas relaciones de manera informal (nivel de razonamiento dos, de análisis)

Un segundo ejemplo de la tipología es la pregunta P14, donde se solicita que el estudiante reconozca que los puntos notables coinciden en triángulos equiláteros; a este reactivo se le asignó la categoría de análisis de Bloom, por requerir la descomposición de la proposición en la ubicación independiente de los puntos notables y el descubrimiento de la coincidencia entre ellos. En cambio, la asignación del nivel de deducción (nivel 4) por la descomposición de la proposición en cuatro las proposiciones independientes, además del proceso de generalización que permite hablar de puntos notables equivalentes.

La definición de los distintos objetivos con la taxonomía de Bloom y las características de la teoría de Van Hiele, es lo que permite asignar un nivel de razonamiento y categoría cognitiva a cada alumno, por lo que será posible agruparlos y evaluar la incidencia de la práctica docente en cada uno de los subgrupos definidos.

Análisis de resultados

En el presente apartado serán descritos tres elementos: el contexto de la recopilación de la información, las consideraciones para la asignación de las categorías y una valoración global sobre la interpretación de la información.

Los instrumentos de exploración consistieron en dos cuestionarios, los cuales fueron presentados como exámenes para evaluación de la materia, por lo que fueron resueltos con la seriedad esperada. Cada grupo completó ambos instrumentos en una sesión de una hora y cuarenta minutos (como evaluación de bloque de su respectivo curso).

Una vez completada la aplicación, las respuestas de interés fueron organizadas en tablas para el procesamiento y la asignación a cada alumno. Como muestra de la totalidad de datos procesados se comparte la Figura 4, la cual contiene las respuestas de solo ocho estudiantes del primer grupo (de 24 alumnos), donde cada renglón representa un sujeto de estudio y las columnas contienen las respuestas ofrecidas por el alumno, el código 1 se asignó al acierto y el 0 para error en la respuesta.

Figura 4. Sección de tabla con respuestas de alumnos de primer grupo

	Conocimiento			Comprensión					Aplicación						Análisis	
	C8	C9	C10	C5	C6	C7	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14
A1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
A2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
A3	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
A4	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
A5	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
A6	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
A7	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
A8	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1

Como se mencionó previamente, se omitieron reactivos que no fueron asociados con la temática de rectas y puntos notables de triángulos, además se reorganizó la información para agruparla por niveles taxonómicos de Bloom, la nueva información se presenta en la Figura 5 e indica el total de reactivos de cada nivel que fueron respondidos de manera correcta.

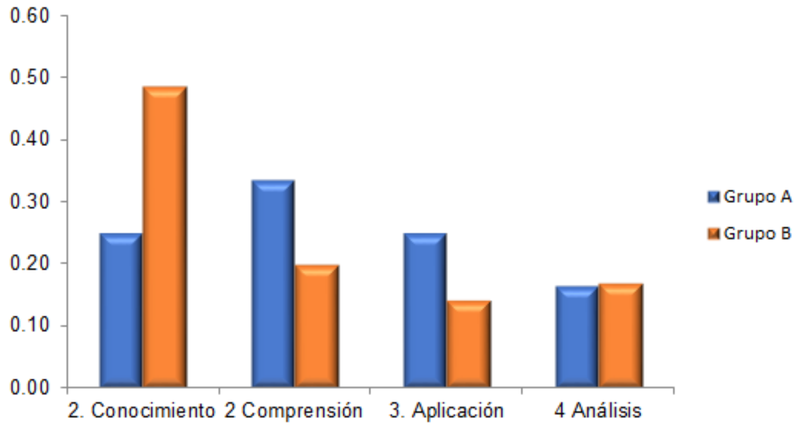
Figura 5. Sección de tabla con resumen de respuestas de alumnos

	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis
A1	3	4	4	1
A2	3	4	2	0
A3	3	5	4	1
A4	0	4	4	1
A5	1	2	3	1
A6	1	2	6	2
A7	1	4	2	1
A8	1	4	4	1

Para la asignación de una categoría de Bloom-Van Hiele a cada alumno, se consideró elegir el nivel máximo donde se manifieste un dominio de, al menos, el 80% de los reactivos asociados, esto quiere decir que es necesario responder correctamente a los dos reactivos de análisis para recibir tal categoría, pero es permitido un error en las cinco preguntas de comprensión para obtener tal asignación. Al realizar lo propio con todos los alumnos y procesar la información de manera independiente entre los grupos, las asignaciones finales se presentan en el gráfico de la Figura 6, donde los grupos de estudio se diferencian a partir del color y cada par de columnas contiguas se traduce a una de las categorías de interés, teniendo en cuenta que la cantidad de individuos es distinta en cada grupo, la información se tradujo a proporciones.

Figura 6. Asignaciones de nivel para los grupos de estudio

	Proporcion	
	A	B
2. Conocimiento	0.25	0.49
2 Comprensión	0.33	0.20
3. Aplicación	0.25	0.14
4 Análisis	0.17	0.17



A partir de la información, resulta evidente el empate de la categoría más alta, por lo que se interpreta que los estudiantes destacados representan la misma proporción en sus respectivos grupos. Las diferencias se aprecian en el resto de las categorías, siendo el nivel de conocimiento donde se presenta la mayor diferencia de proporciones, teniendo en cuenta que el grupo de color naranja es el formado por los 35 estudiantes de la segunda generación del programa, es factible suponer que la primera experiencia docente logró incidir de manera positiva en una proporción mayor de los alumnos. La suposición de que la categoría de conocimiento es más alta en el segundo grupo decidió afrontarse con una prueba de hipótesis para proporciones, con un nivel de significancia de 5%, considerando el estadístico de contraste de $Z_\alpha = 1.644$ se tienen suficientes elementos para considerar que el resultado no es fruto de la muestra y se debe reflexionar con mayor profundidad sobre las condiciones y características de la primera implementación, las cuales fueron más benéficas para el grupo involucrado.

Al confirmar una diferencia significativa en el primer nivel de la taxonomía (conocimiento), se explican los resultados en los niveles de comprensión y aplicación, ya que los alumnos faltantes del primer nivel lograron alcanzar una categoría superior en la primera generación de estudiantes.

Conclusiones

Desde la perspectiva cualitativa, la técnica de observación participativa aporta experiencias enriquecedoras para la valoración de la práctica docente, pero es necesario sistematizar tales observaciones para aportar conclusiones generalizables. Un elemento adicional es la valoración de la idoneidad de los instrumentos y la pertinencia de incorporar nuevas estrategias de recopilación de información.

Al margen de las áreas de oportunidad, la experiencia metodológica compartida representa un esfuerzo de integrar las competencias profesionales y disciplinares declaradas en el plan de estudios 2018, asociando la implementación de marcos teóricos y epistemológicos de las matemáticas con el conocimiento disciplinar, todo con la finalidad de conformar marcos explicativos y de intervención eficaces.

En cuanto a los objetivos de la investigación, se reconoce que los conocimientos geométricos sobre los puntos y rectas notables son bastante variados entre los futuros docentes, por lo que se genera y mantiene una expectativa de 17% de docentes egresados sobresalientes y altamente competentes en contenidos geométricos, además de dimensionar el efecto de resultados que muestran un retroceso en el desarrollo de los estudiantes entre generaciones. Lo anterior permite reflexionar sobre la práctica docente e incorporar modificaciones en las actividades que no generaron resultados positivos, además de mantener aquellas que si favorecen el aprendizaje de los alumnos.

En cuanto a la evaluación de la práctica docente, la metodología presentada en el trabajo se convierte en una aportación para la toma de decisiones a partir de información cuantitativa, brindando al docente diferentes herramientas estadísticas y generalizables a otros campos disciplinares.

Referencias

Bloom, B.S. and Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals*, by a committee of college and university examiners. Handbook I: Cognitive Domain. New York: Longman, Green.

Chacara, M. (2004). *Las nociones de isometría en el plano, estudiadas a través del Modelo de Van Hiele, enriquecido con principios constructivistas*. Tesis presentada para obtener el grado de maestría en la Universidad de Sonora. México.

DEGESuM (2018). *Planes 2018, Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Recuperado el 1 de febrero de 2021 de: www.cevie-dgespe.com/index.php/planes-de-estudios-2018/120

Gutierrez, A., Jaime, A., Fortuny, J. (1993). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education* 22 (3), 237-251.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral, Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Valencia.

SEP (2018). *Razonamiento geométrico*. Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación. México. Recuperado el 1 de febrero de 2021 de: www.cevie-dgespe.com/documentos/1405b.pdf

Quiñonez, M (2011). *Categorías de Demostración Enmarcadas en la Teoría de Van Hiele con Principios Constructivistas.* Tesis presentada para obtener el grado de maestría en la Universidad de Sonora. México.

Van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión: La conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría.* Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Matemáticas y Ciencias Naturales. Universidad Real de Ultrecht. Países Bajos.

Cómo citar este artículo: Quiñonez Ayala, M. A. (2021). Evaluación de conocimientos geométricos en futuros docentes de matemáticas. Estudio de casos de las generaciones 2018-2022 y 2019-2023. *SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS, (5) 1, pp. 127-142*

Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp. 143-159
SahuarUS

Un recorrido por nuestra experiencia en la inclusión de software dinámico en el diseño de materiales didácticos

José Luis Soto Munguía[1], César Fabián Romero Félix[2]
e-mail: [1]joseluis.soto@unison.com, [2]cesar.romero@unison.mx
Universidad de Sonora

Resumen
Se presentan aquí algunas de las experiencias en el uso de software de matemáticas dinámicas para el diseño de materiales y actividades didácticas. Partiendo del uso de Cabri fuera del aula, como las exploraciones gráficas de un profesor sobre temas avanzados para explorar los alcances del software, se generó toda una línea de trabajo en Matemática Educativa, pasando por la exploración novedosa de temas clásicos en matemáticas, al estudio de dificultades de aprendizaje y propuestas para su superación, culminando en una propuesta metodológica para el diseño de propuestas de enseñanza apoyadas en esta tecnología. Se ilustran algunos de los proyectos más representativos en esta línea de trabajo, así como algunas de las dificultades técnicas y didácticas que se han ido superando. A modo de conclusión, se presentan algunos ejemplos del proyecto que esta línea actualmente promueve.
Palabras clave: Software dinámico, Cabri, GeoGebra, diseño de materiales didácticos

Recibido 7 de febrero de 2021
Aceptado 14 de abril de 2021

1. Cabri, los retos técnicos

Desde que Cabri Geometry II apareció en el mercado a principios de los 90, provocó grandes expectativas sobre su impacto en la enseñanza de la Geometría, sobre todo en el nivel básico. Para muchos de quienes ejercemos la docencia en el nivel superior, representó una herramienta poderosa con la que podrían privilegiarse las representaciones gráficas dinámicas, que nos ofrecía la posibilidad de utilizar representaciones geométricas manipulables directamente en la pantalla de una computadora.

1.1. La potencia de Cabri a prueba

Para muchos profesores de matemáticas e investigadores en Matemática Educativa, interesados en esta nueva herramienta, el primer reto fue aprender a usarla. Surgieron así algunos grupos en el país, interesados en explorar la potencia de Cabri sin un propósito didáctico claro, pero que intentaban construir applets suficientemente sofisticados para mostrar el potencial del software. Estas construcciones no estaban enmarcadas en ningún proyecto particular y terminaban presentándose como “demos” en algún evento académico, pero permitieron especializar a una camada de usuarios de Cabri en el manejo de este software. De esos tiempos proviene la construcción que se muestra en la Figura 1, en la cual se simula una pecera con un pez que nadaba en su interior, mientras la pecera se vaciaba. Si se toma en cuenta que todavía no existía Cabri 3D, se entenderá que se trata de una construcción muy complicada.

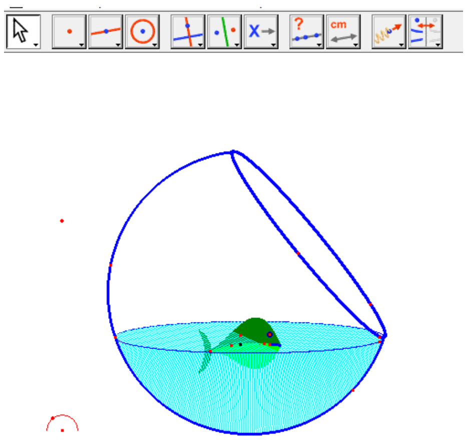


Figura 1. Una simulación tridimensional del vaciado de una pecera, con Cabri.

Mientras en otras partes del país se desarrollaban proyectos de largo alcance sobre el uso de tecnología en el aula como el caso de EMAT (Rojano, 2003) y se elaboraban tesis de posgrado sobre el tema, en la Universidad de Sonora (Unison) nos estábamos planteando la posibilidad de incorporar la tecnología en algunos temas de los cursos de matemáticas.

1.2. Las versiones gráfico dinámicas de algunos temas.

1.2.1. Números Complejos: una presentación gráfica

En algunos de estos trabajos, ya se contaba con versiones más orientadas hacia las representaciones gráficas, éste fue el caso del Módulo sobre números complejos (Soto, 2002), que se había escrito para el curso universitario de Álgebra, como una alternativa al acercamiento casi estrictamente algebraico que se usaba en estos cursos. Las ideas principales para escribir este módulo habían sido tomadas de (Markushévich, 1984), se incluye una discusión sobre las operaciones con números reales representados como "flechas" cuyos argumentos pueden ser de 0° o 180°, una discusión sobre la existencia del número i como la necesidad de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$, la representación de números complejos en el plano, las operaciones de suma y multiplicación y el cálculo de potencias y raíces de un número complejo. Todos los temas inician con una discusión gráfica asociada a la representación de números complejos como "flechas" en el plano, para pasar gradualmente a las representaciones algebraicas y establecer relaciones entre los elementos de ambas. Es así como el material se centra en proveer de situaciones en las que se pueden visualizar las propiedades algebraicas de los números reales y complejos, intentando hacer visible el origen de las propiedades de estos últimos.

Con una aproximación como la descrita, resultó natural la actualización del módulo usando Cabri para convertir las gráficas estáticas en dinámicas, simplemente introduciendo applets como el que se muestra en la Figura 2, con los que se planteaban actividades complementarias a los temas. El applet corresponde a las operaciones de suma y resta de complejos. La construcción de estos applets utilizaba las herramientas predefinidas en Cabri de vectores y puntos de coordenadas reales para representar los números complejos; agregando textos dinámicos que permitieran observar los valores numéricos de los números complejos representados. El módulo se sigue usando como material de enseñanza en la Unison, aunque algunos profesores han reconstruido los applets en GeoGebra.

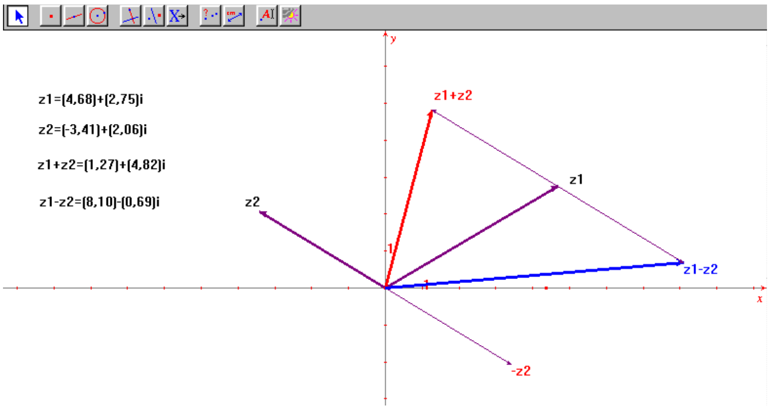


Figura 2. Suma y resta de números complejos, representadas con Cabri.

Se destaca que en esta etapa el material fue diseñado con base en la exploración de gráficas estáticas y la familiarización con el software permitió su extensión al uso de Cabri en el aula para su exploración con gráficas dinámicas. Así mismo, las construcciones eran suficientemente simples como para proponer que los estudiantes las replicaran en el aula como parte de la exploración gráfica. En el siguiente ejemplo, se parte de la experiencia con los temas elementales de números complejos para proponer el estudio de algunas funciones especiales en el curso de *Variable Compleja.*

1.2.2. Una exploración gráfica de las propiedades de las transformaciones de Möbius

Tras la experiencia en la representación y manipulación de números complejos en el plano, se propuso el estudio de un tipo de *transformaciones conformes,* dada su importancia en la resolución de problemas de la física y la matemática misma. Las transformaciones estudiadas se caracterizan por ser *fraccionales lineales*, de la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde a, b, c y d son números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.

Se eligieron las transformaciones de Möbius por sus propiedades geométricas principales:

i. Transforman círculos en círculos, incluyendo el caso de las rectas como circunferencias en el *plano complejo extendido* $\mathbb{C}_\infty$.

ii. Preservan ángulos, es decir, si dos curvas se intersecan en un ángulo α, sus imágenes se intersecan también formando un ángulo α.

Al representar $\mathbb{C}_\infty$ con el plano de Cabri y a los números complejos como vectores, se facilita la visualización de las propiedades descritas arriba, las cuales comúnmente son presentadas de forma verbal o con sólo un par de ejemplos estáticos. La posibilidad de manipular un número complejo restringido a una circunferencia cualquiera y generar así su imagen en el plano, permitió a los estudiantes observar la *universalidad* de esta propiedad y por lo tanto su trascendencia.

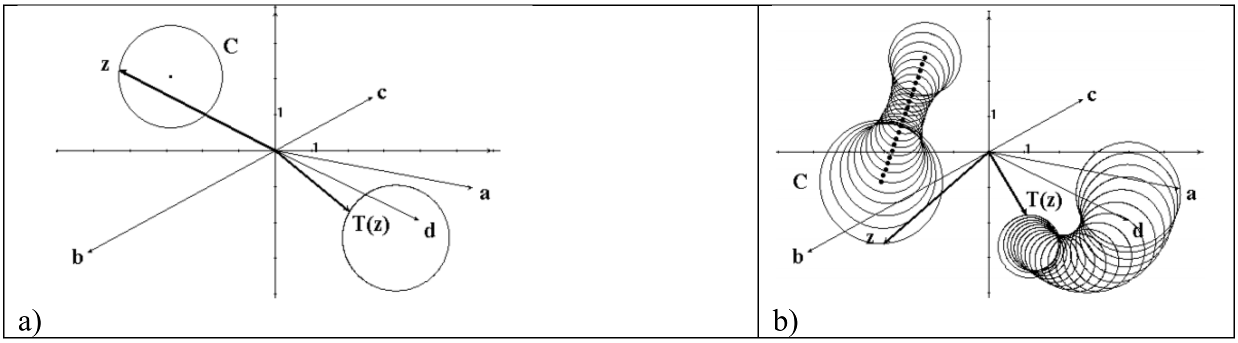


Figura 3. La imagen de una circunferencia y de una familia de circunferencias, bajo una transformación *de Möbius.*

En el apartado técnico, el desarrollo de las construcciones en Cabri requirió la implementación de las operaciones de suma, producto y cociente desarrolladas para el tema de complejos. Adicionalmente, se utilizaron vectores con extremos dentro de circunferencias para el complejo *z* (argumento de la transformación) y el uso del rastro con la herramienta *Traza* y el *lugar geométrico* generado en automático para resaltar la imagen de la circunferencia. Estos últimos elementos técnicos son los que permiten plantear a los estudiantes la observación de la generalidad de las propiedades geométricas, permitiendo primero el arrastre de *z* sobre la circunferencia (Figura 3a) y posteriormente el arrastre de la circunferencia misma para observar que la transformación conserva cualquier circunferencia (Figura 3b).

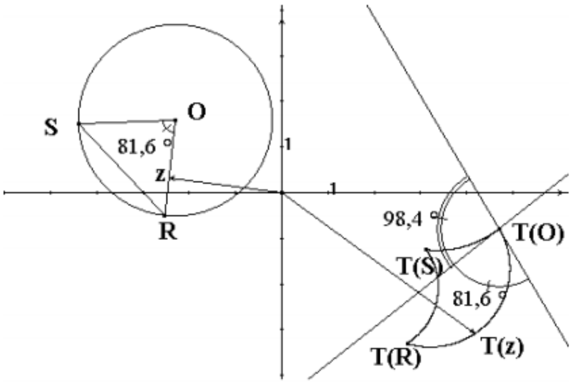


Figura 4. Una exploración sobre la conformidad de las transformaciones de Möbius.

El método utilizado para construir una transformación de Möbius permite también plantear a los estudiantes la manipulación de los parámetros a, b, c, y d, ya que cada uno es un vector en la pantalla. De tal manera, se explora también el efecto gráfico que tiene cada parámetro en la manera de *conservar las circunferencias.* Con las exploraciones planteadas, se espera que los estudiantes puedan predecir el efecto de una transformación, así como deducir las preimágenes de algunos casos particulares de circunferencias. La conservación de ángulos es estudiada en un ambiente de Cabri adicional, interpretados como sectores circulares, de los cuáles se puede conocer su imagen *fácilmente* aplicando los resultados de la sección anterior. Para medir los ángulos, se agregan tangentes a la construcción y se utiliza la herramienta de medición de Cabri (Figura 4).

Destacamos que, en esta propuesta las tareas planteadas son desde un inicio exploraciones dinámicas, incluyendo la construcción de varios elementos por parte de los estudiantes. Así mismo, que la propuesta de enseñanza parte de la construcción y observación de propiedades, explorando la extensión de éstas incluso en casos *extremos* como en el de las rectas como circunferencias que pasan por el punto al infinito. Se pretende aquí, que las exploraciones permitan a los estudiantes resolver problemas planteados en Cabri y también problemas *tradicionales* con lápiz y papel.

1.2.3. Un método gráfico para graficar un polinomio.

Este trabajo tiene una historia extraña. En el año de 1999, buscando las presentaciones que se hacían del tema de polinomios en libros de texto en desuso, en un viejo texto de Teoría de Ecuaciones (Turnbull, 1947 pp. 27-30) encontramos un método para evaluar polinomios en un número real arbitrario. El método resultó sorprendente, era gráfico y había sido diseñado por un Eduard Lill, matemático de quien no se había oído hablar en la región. En el texto mencionado lo recomendaban para aquellos casos en los que los coeficientes del polinomio eran decimales difíciles de manejar, pero solo se requiere una solución aproximada. El hallazgo nos entusiasmó porque si se podía traducir el método a Cabri, podría obtenerse a partir de un segmento de medida x_0, otro segmento de medida $p(\, x_0)$ lo cual permitiría construir un polinomio dinámico en pantalla, con los coeficientes directamente manipulables, simplemente arrastrando puntos en la construcción. Este logro pareciera trivial por las facilidades del software moderno, pero en Cabri no había manera directa de construir funciones, ni siquiera polinomios.

El problema técnico de la construcción resultó sencillo, se le dedicó más tiempo a conseguir las referencias sobre el método y su autor, porque en aquel tiempo se sabía realmente poco sobre ello. Se tuvo que escribir al foro *Historia Matemática*, actualmente fuera de funcionamiento, pero cuyos mensajes se conservan en la una página internet (González, 2000). Ahí nos informaron que existían dos artículos en los que Lill (1867, 1868) exponía su método. Aunque ahora estos artículos están en línea en varios sitios, los tuvimos que mandar pedir a Francia, porque la revista en la que se escribieron dejó de publicarse en 1927. En Soto (2002b) se ofrece una explicación del método, una demostración de que funciona para el caso particular de un polinomio de grado tres y las instrucciones detalladas de cómo construir la versión dinámica del método, con Cabri. En la construcción final (Figura 5) del trabajo se grafica el polinomio $p(x) = x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 1$

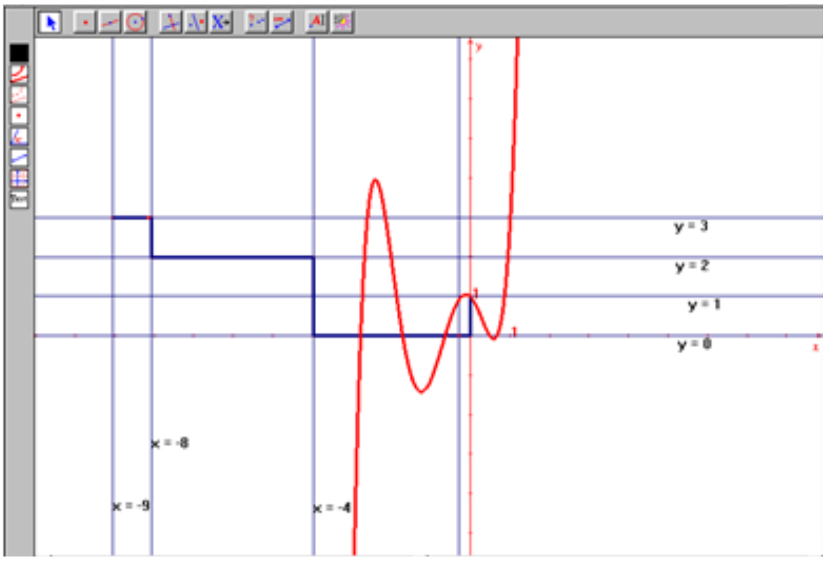


Figura 5. Gráfica dinámica de un polinomio de grado 5, construido con Cabri y usando el método de Lill.

Este trabajo tuvo dos finales, uno bueno y uno malo. El bueno fue que el trabajo fue premiado por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM) en el concurso “Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza”, en el año 2002 y la mala es que la SMM se quedó con los derechos de autor para publicarlo y nunca lo publicó.

Aunque el trabajo no fue publicado, excepto un resumen en las memorias del PME-NA XXII (Fernández, 2000, p. 268), el potencial de la construcción para representar polinomios dinámicos de manera gráfica y algebraica simultáneamente, en una época en la que todavía no existía software alguno que hiciera eso, fue aprovechada para diseñar otro fascículo para el curso universitario de Álgebra Superior, titulado: “Polinomios y raíces: una presentación gráfica”, pero de ese trabajo se hablará en el siguiente apartado.

1.2.4. Material Didáctico: Polinomios y raíces: una presentación gráfica

Siguiendo con el enfoque definido en el material sobre Transformaciones de Möbius, se plantea ahora el estudio de polinomios reales y sus raíces. Para ello, se presentan construcciones predefinidas en las que los estudiantes *no necesitan conocer Cabri,* ya que es suficiente la manipulación directa de parámetros algebraicos para la exploración de las construcciones gráficas y el establecimiento de relaciones entre ambas. En un segundo momento, por limitaciones técnicas del software dinámico se requiere el apoyo de software de representaciones estáticas para explorar algunas de las propiedades. Conforme a las limitaciones de la época, era necesario prevenir a los posibles usuarios sobre la necesidad de equipo de cómputo *para los estudiantes*, requiriendo comúnmente el uso de un *laboratorio de cómputo*.

Como se mencionó arriba, el método de Lill permite la representación gráfica de polinomios como el lugar geométrico de un punto que se obtiene a partir de las reflexiones sobre una poligonal. En esta propuesta, se *oculta* todo el procedimiento geométrico necesario para mostrar la gráfica del polinomio y se agregan segmentos cuyas longitudes representan a cada coeficiente del polinomio (de grado fijo); el estudiante no tendrá que reconstruir el método de Lill, sólo interactuar con los segmentos. Posteriormente (Figura 6), se presenta una construcción similar en la que se agrega la gráfica de la derivada del polinomio, con lo que se pueden explorar las relaciones entre las raíces de $p(x)$ y $p'(x)$, se estudian aquí los casos de raíces nulas ($r = 0$) y raíces múltiples.

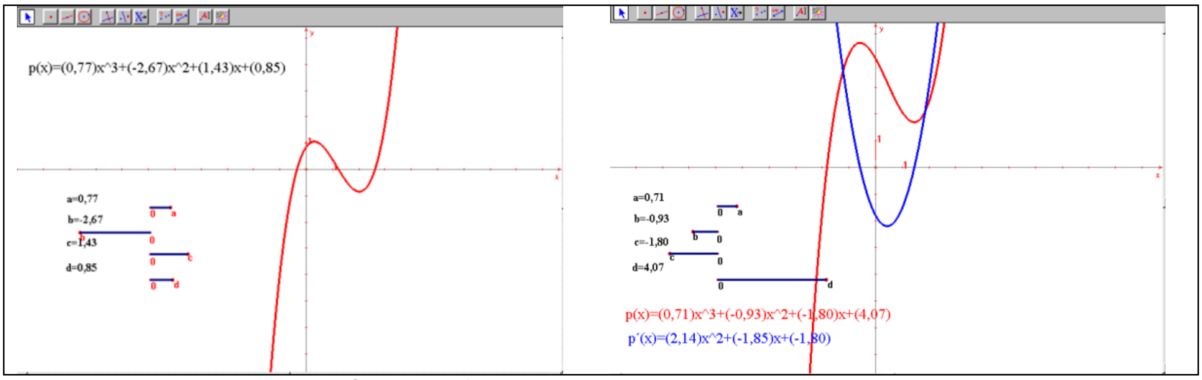


Figura 6. Comparación entre un polinomio de grado 3 y su derivada.

Para finalizar, se plantea el desarrollo de un método para aproximar las raíces reales y complejas de un polinomio, partiendo de una de las ideas geométricas en la demostración de Gauss para el Teorema Fundamental del Álgebra (Coxeter, 1977). El método parte de la separación de la parte compleja y la parte real del polinomio, evaluando $p(x + iy)$, desarrollando las operaciones y separando la ecuación en números complejos $p(z) = 0$ en el par de ecuaciones reales $q_1(x) = 0$ y $q_2(y) = 0$, basados en que la igualdad de un número complejo a cero implica que tanto la parte real como la parte imaginaria deben ser nulas.

Mientras que este método se puede aplicar de forma completamente algebraica, se plantea la exploración de cada paso en Maple V (ver Figura 7), para visualizar las características de las raíces reales y complejas. Es notable que el trabajo en Maple difiere bastante del trabajo en Cabri, ya que el primero está orientado a la resolución de problemas en matemáticas avanzadas, mientras que Cabri estaba orientado a la exploración gráfica y a las construcciones geométricas. De tal manera, la interacción con el software es ahora por medio de comandos y se pierde la manipulación directa de las gráficas, teniendo que dedicar un tiempo considerable a la familiarización con los comandos algebraicos de Maple.

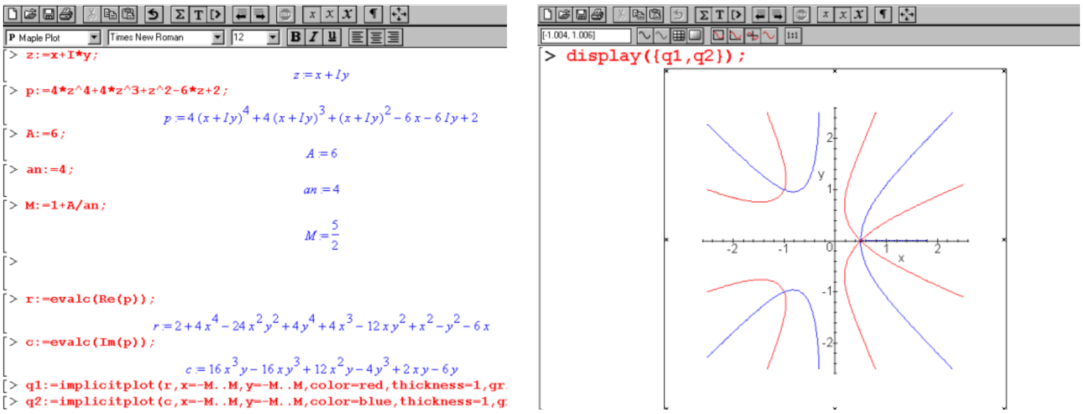


Figura 7. La representación gráfica de las raices reales y complejas exploradas con Maple.

La visualización de polinomios en el plano complejo permite ahora el planteamiento de problemas más generales que en las etapas anteriores, planteando a los alumnos la búsqueda de todas las raíces de polinomios de grado alto (mayor que cinco). El software permite a los estudiantes graficar los polinomios propuestos, se les plantea intentar predecir la cantidad de raíces utilizando el criterio de los signos y después que comprueben sus predicciones mostrando las gráficas de la parte real y parte imaginaria de los polinomios, asociando las raíces de $p(x)$ a las intersecciones de $q_1(x)$ y $q_2(y)$.

Es destacable que en esta propuesta continúa siendo el enfoque de *exploración gráfica* el que guía el diseño y la suficiente familiaridad con el software lo que hace posible la construcción de los ambientes prediseñados para los estudiantes, permitiendo cambiar el apoyo digital por otro, cuando no es posible generar las representaciones o manipulaciones deseadas. Las actividades propuestas incluyen ahora, la exploración gráfica, la manipulación directa e indirecta de las gráficas y finalmente el cálculo algebraico simbólico para la comprobación de resultados previstos. Por otro lado, la poca experiencia con el uso del software por parte de los estudiantes sigue influyendo en el tipo de tareas e interacciones que se plantean, limitándose a la manipulación de dos ambientes dinámicos prediseñados y, en el caso de Maple, al uso de programación con comandos específicos.

1.2.5. A propósito de un instrumento que grafica cónicas

A pesar de que estábamos convencidos del potencial didáctico de los Sistemas de Geometría Dinámica (conocidos como DGS por sus siglas en inglés) para el año 2000 seguíamos buscando formas sistemáticas de incorporar esta tecnología digital al trabajo docente. En esa búsqueda, nos encontramos un artículo de Santos (2000), en el cual reportaba el ejemplo que muestra la Figura 8. Se trata de una construcción en Cabri que fue presentada a los estudiantes de bachillerato y que consiste en un punto P sobre la recta k, un punto fijo C, un punto Q sobre la una circunferencia centrada en C, el punto R simétrico a C con respecto a k y el punto S que se obtiene al intersecar la recta PQ con la recta RC. El lugar geométrico del punto S, cuando el punto Q se arrastra sobre la circunferencia, es una cónica. Y haciendo variar P sobre la recta k, pueden obtenerse diferentes cónicas. El aparato virtual construido de esta manera resulta sorprendente y contrasta con la sencillez de su construcción en Cabri (ver Figura 8). En el artículo se reportaba que los estudiantes podían identificar las diferentes cónicas y algunos de sus elementos. El artículo era interesante e ilustraba el uso que podría darse a los applets construidos con Cabri, en el salón de clase. Pero a nosotros nos llamó la atención otra cosa, ¿cuáles eran las razones matemáticas por las cuales el punto S trazaba cónicas?

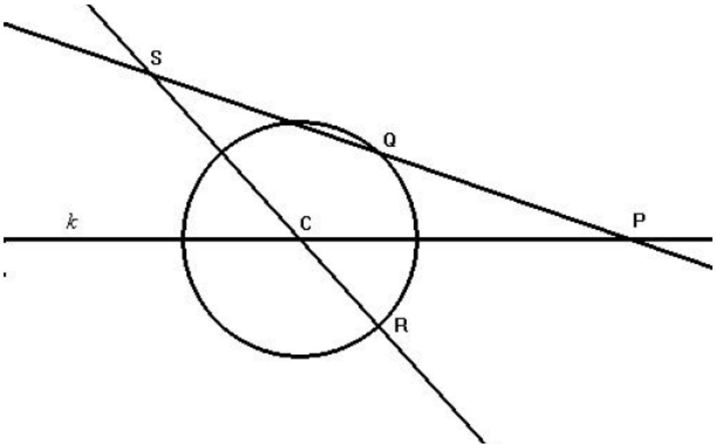


Figura 8. La construcción de un conicógrafo dinámico con Cabri

Para dar respuesta a esta pregunta, tomamos la definición general de cónica Lehmann (1972, p. 220):

> *"Definición. Dada una recta fija l y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama cónica al lugar geométrico de un punto S que se mueve en el plano de l y F de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre una constante positiva. La recta fija l se llama directriz, el punto fijo F, foco, y la constante positiva, a la que designaremos por e, excentricidad de la cónica."*

Aunque la definición aparece en un texto de Geometría Analítica, no exige el uso de las herramientas de esta Geometría y por ello decidimos ofrecer una prueba con las herramientas de la Geometría Sintética. La demostración de que los lugares geométricos trazados por el punto S son cónicas, no resultó un problema difícil, la dificultad principal estriba en proponer una recta l como directriz y un punto F como foco y aquí es en donde el software resultó imprescindible para conjeturar la localización de la recta l y el punto F (ver Figura 9). Por eso insistimos en el trabajo, que hemos usado el software para conjeturar sobre la existencia y ubicación de l y F, usando además el método de análisis para suponer que el problema de la posición de l y F estaba resuelto. La directriz l resultó coincidir con la mediatriz del segmento CP y el foco F al que alude la definición resultó coincidir con el punto C.

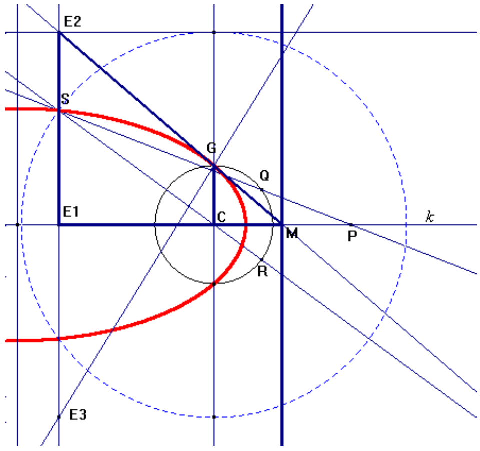


Figura 9 Exploración con Cabri para localizar la directriz y el punto $F = C$.

Encontrada una explicación matemática sobre la naturaleza de las curvas trazadas por lo que en el trabajo llamamos *conicógrafo*, surgió otra pregunta derivada también de la exploración con Cabri. Al explorar con detalle la manera como funcionaba el *conicógrafo*, encontramos varios elementos para pensar que el aparato funcionaba, porque podría tratarse de un *conicógrafo* espacial en donde el círculo con centro en C, representaba un corte sobre un cono y las cónicas generadas podrían representar los cortes al cono por un plano que dependería de P; es decir que podría tratarse de un aparato espacial que solo estaba mostrando la "vista aérea" (ver Figura 10).

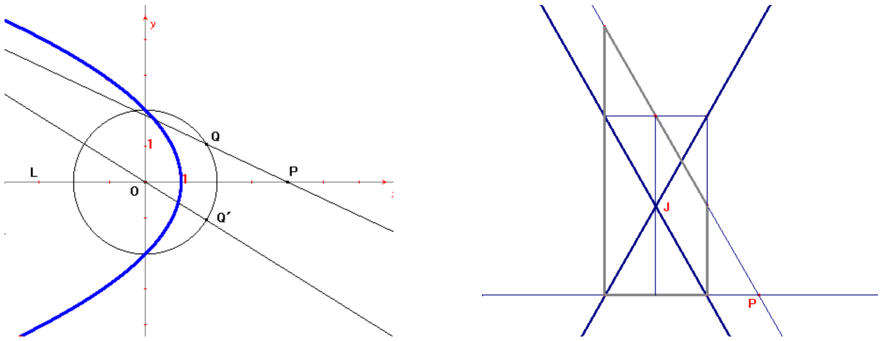


Figura 10. Una comparación entre el conicógrafo plano y el posible conicógrafo espacial.

De nueva cuenta, Cabri resultó imprescindible para conjeturar la posición del cono que supusimos y para demostrar sin métodos analíticos que efectivamente el *conicógrafo* tiene una versión tridimensional, con la que puede conectarse el concepto de cónica con los desarrollos de Apolonio de Perga. En virtud de que Cabri no contaba en esa época con una vista tridimensional, tuvimos que simular la versión tridimensional del conicógrafo, que al final quedó como muestra la Figura 11.

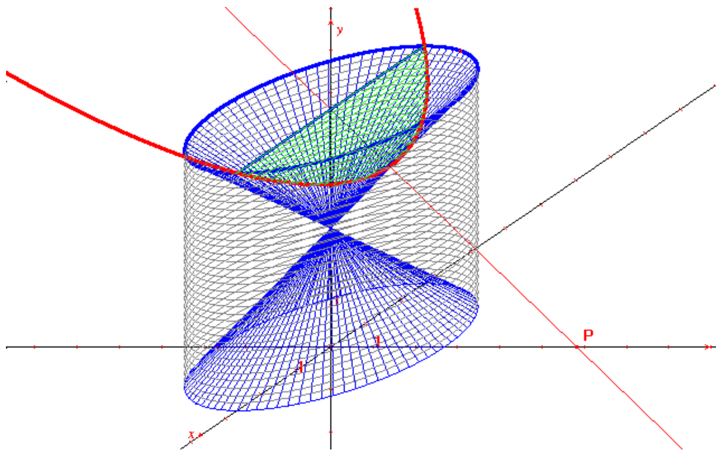


Figura 11. La interpretación espacial del conicógrafo, construida con Cabri.

El artículo en donde se describen los detalles de este trabajo (Soto, 2002), fue publicado en la revista del Departamento de Matemáticas de la Unison.

La principal enseñanza que nos ha dejado este trabajo es que el uso de Cabri para explorar y resolver problemas, es una herramienta que hace posible aprender matemáticas explorando, conjeturando y generando ideas sobre la solución de los problemas. Algunas reflexiones sobre este trabajo se presentaron en el IV Congreso IberoCabri que se llevó a cabo en Córdoba, Argentina en 2008. Fue el último evento sobre Cabri al que asistimos y aunque una de nuestras tesistas presentó los avances de su trabajo dos años después en el V Congreso de IberoCabri, era evidente que los tiempos de auge de este software ya habían pasado y que muchos de los que alguna vez lo utilizamos, estábamos emigrando a GeoGebra, que no solo es más potente y versátil, sino que además es gratuito.

2. La fundamentación didáctica para usar DGS

Todos los trabajos desarrollados hasta aquí provenían de la preocupación por mejorar nuestros materiales de enseñanza sin más fundamento que la intuición y el empirismo, siguiendo inicialmente los criterios o exploraciones gráficas conocidas para algunos temas avanzados. En todos los casos, se planteaba actividad para los estudiantes *esperando que fuera de utilidad*, principalmente por alejarse de lo tradicional y por favorecer una introducción intuitiva a temas abstractos. En la siguiente etapa, un acercamiento a la investigación en Matemática Educativa permitió el inicio de una fundamentación teórica para la actividad de diseño de actividades didácticas.

2.1. Sobre dificultades de aprendizaje en ambientes tecnológicos

Las experiencias empíricas descritas arriba sobre el diseño de materiales didácticos y el uso de software dinámico en cursos de matemáticas permitieron adentrarse en lo que la literatura especializada describía como *problemas y dificultades de aprendizaje.* Entre los distintos enfoques teóricos disponibles en esta época, se observó afinidad particularmente con el enfoque de visualización y de registros de representación semiótica de Duval (1999). Desde este enfoque teórico, se había argumentado ya la importancia de la conversión entre distintos registros, generando dificultades de aprendizaje en particular para el Álgebra Lineal (Pavlopoulou, 1993).

De manera conforme al tipo de investigación en Matemática Educativa de la época, la experiencia en las exploraciones gráficas con Cabri en temas que pueden ser interpretados vectorialmente, llevó a una investigación doctoral sobre *Las dificultades para la conversión gráfico-algebraica relacionadas con conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ (Soto, 2003). Siguiendo resultados de estudios exploratorios sobre el uso de software dinámico para atender dificultades de aprendizaje (Sierpinska, Dreyfus & Hillel, 1999), se plantea la posibilidad de que las dificultades detectadas puedan ser contrarrestadas en alguna medida y de verificar a la vez si el ambiente tecnológico propuesto no crea nuevas dificultades. De tal manera, se evaluó el desempeño de los estudiantes al resolver las diversas actividades sobre temas como: elementos neutros, elementos inversos, multiplicación por escalar, dependencia e independencia lineal, conjuntos y espacios generados, combinaciones lineales, transformaciones lineales y valores y vectores propios.

El marco teórico de Duval permitió analizar más detalladamente el desempeño de los estudiantes, identificando características de algunas representaciones que pueden facilitar u obstaculizar la construcción de significados, como se observa con el caso del vector cero (Soto, 2003, pp. 190-191). La representación gráfica del vector cero como la ausencia de una flecha se aprecia como un obstáculo para construir algunos de los significados pretendidos en las actividades, como la neutralidad aditiva “$u + 0 = u$ para todo vector u”. Al parecer ésta y otras propiedades no fueron construidas a partir de las tareas propuestas en las actividades, debido a confusiones generadas por las restricciones del registro al representar el vector cero (p. 188).

En lo que respecta a las representaciones dinámicas, se observó que las ventajas del software vienen acompañadas de sus propias complicaciones. Como ya se había reportado en situaciones similares (Sierpinska et al., 1999), la representación gráfica de vectores arbitrarios o de *cualquier vector del plano* se mostró conflictiva en la propuesta de enseñanza. Se esperaba que las herramientas del software permitieran interpretar flechas que se podían arrastrar por el plano como equivalentes a la letra “v” en la expresión “$v \in \mathbb{R}$”, sin embargo, en varias ocasiones se interpretaron tales flechas como un vector específico el cual podía cambiar, o como una *flecha que se estira.*

En general, se pudo observar una situación que se manifestó globalmente en la época: aunque el software dinámico permite plantear y realizar exploraciones gráficas de temas matemáticos abstractos y avanzados, su sola inclusión no elimina las dificultades de aprendizaje, más aún, suele generar nuevas dificultades. De tal manera, se regresó a la actividad de diseño de actividades didácticas, pero ahora con el panorama teórico y un énfasis en la atención a las dificultades de aprendizaje detalladas por resultados de investigación.

2.1.1. Propuesta de enseñanza basada en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra

Como una ramificación de algunos de los resultados y experiencias de enseñanza en álgebra lineal, se desarrolló *una propuesta de enseñanza que permitiera construir un significado gráfico para el concepto de transformación lineal* (Romero, 2010) para saber más sobre los efectos en el aprendizaje de los estudiantes, si el concepto se introduce a partir de representaciones gráficas. Para favorecer la construcción de un significado de las transformaciones lineales, y con la intención de reducir dificultades de aprendizaje, se diseñó una secuencia de actividades que se apoya en ambientes preconstruidos que utilizan representaciones dinámicas. Con este proyecto entramos a nueva etapa, en la que se enfocaron esfuerzos al diseño de actividades estructuradas y con fines específicos de aprendizaje, basados en los resultados de la investigación sobre dificultades de aprendizaje. Con este proyecto se consolida además la transición a GeoGebra como base para el desarrollo de ambientes dinámicos,

Se refinaron algunos de los criterios empíricos para el diseño de actividades, ahora en términos del marco de registros de representación, planteando que:

1. El registro de representación en el que se inicia el estudio de algún objeto matemático afecta el nivel de comprensión que se puede llegar a obtener de él.

2. El registro gráfico permite la creación de un ambiente enriquecedor, en el que se pueden caracterizar las transformaciones lineales por sus propiedades gráficas.

3. Los ambientes dinámicos diseñados con GeoGebra pueden facilitar a los estudiantes la observación y comprobación de las propiedades gráficas de una transformación lineal mediante la manipulación directa en pantalla, facilitando con ello la conversión gráfico-algebraica.

Estos supuestos teóricos guiaron posteriormente la etapa de diseño de actividades, combinados con las herramientas *novedosas* de GeoGebra para representar y manipular vectores. Principalmente se aprovechó que en GeoGebra se pueden definir tanto objetos geométricos como algebraicos, y que se cuenta de inicio con prácticamente la misma colección de herramientas geométricas que en Cabri, pero agregando una variedad de objetos y manipulaciones algebraicas. De tal manera, se pudieron construir materiales para la manipulación de vectores en el plano, que permitieran la exploración de las transformaciones lineales, observando las propiedades de linealidad de forma gráfica, así como sus interacciones y consecuencias.

Las construcciones en GeoGebra aprovechan la potencia del software para representar de manera separada el plano del dominio de la función, del plano del contra-dominio y permiten al estudiante diversos tipos de manipulaciones directas sobre la pantalla de la computadora (ver Figura 12).

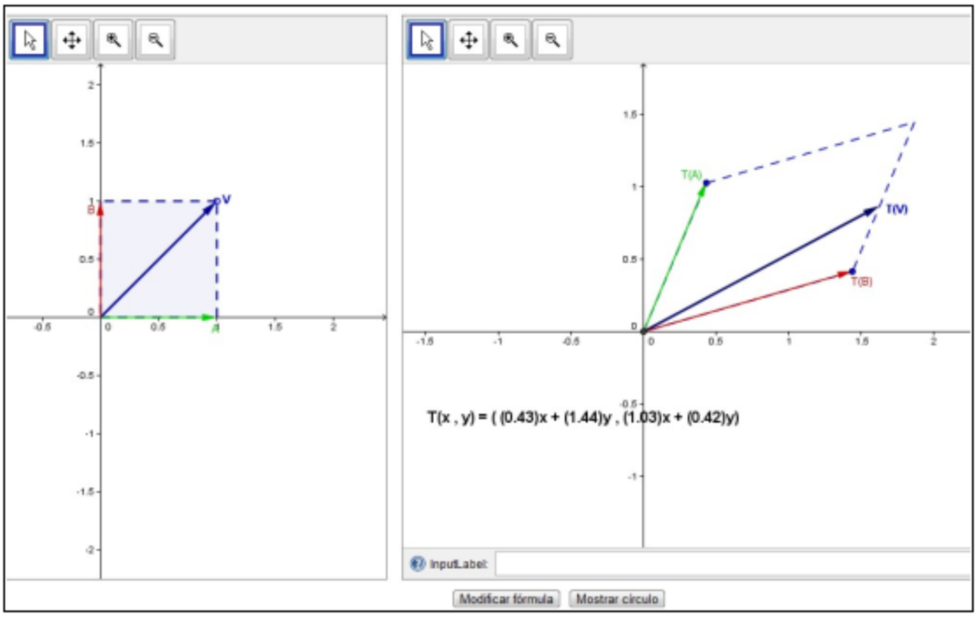


Figura 12. La discusión gráfica sobre las propiedades definitorias de una transformación lineal, en el ambiente de GeoGebra.

Se continuó la estrategia de distribuir ambientes preconstruidos, o *applets* como ahora se les conoce, evitando distraer a los estudiantes con los elementos del uso del software que no parecieran de provecho para el aprendizaje matemático buscado. En esta etapa se siguieron resolviendo problemas o limitaciones técnicas del software para generar el tipo de interacción buscada. De acuerdo con los principios del marco de registros de representaciones semióticas, resulta fundamental la identificación de las unidades figurales como *unidades de significado* y la búsqueda de correspondencias entre unidades figurales en representaciones de diferentes registros. En la versión de GeoGebra 2, se tenían disponibles las articulaciones entre representaciones gráficas y algebraicas, lo que facilitó mucho el diseño de las exploraciones y tareas y en general, sin embargo, para plantear la separación del *plano del dominio y del plano imagen* de una transformación líneal fue necesario complementar el uso de GeoGebra con programación en javascript (ver Soto, Romero & Ibarra, 2012); de manera similar a cuando se complementaba el uso de Cabri con el de Maple.

Otro elemento técnico que se introdujo en este proyecto fue la distribución de los materiales *en línea*, aprovechando de nuevo la compatibilidad entre GeoGebra y los lenguajes de *la red* (principalmente html y javascript).

El proyecto sobre el aprendizaje de transformaciones lineales continuó como una de varias ramificaciones de esta línea de trabajo, avanzando a la investigación sobre las construcciones mentales específicas que se pueden desarrollar con este tipo de propuestas, articulando ahora el enfoque de representaciones con el de *abstracción reflexiva* de la teoría APOE (Romero, 2016). Como una nueva iteración de los refinamientos de las propuestas de enseñanza, se planteó una propuesta de enseñanza más extensa, que combinara los logros parciales de todas las etapas anteriores: exploraciones gráficas intuitivas, applets preconstruidos distribuidos en línea, exploraciones guiadas para que los estudiantes desarrollaran construcciones simples y planteamiento de problemas dentro y fuera de los ambientes dinámicos, para evaluar los aprendizajes específicos buscados.

2.2. Actividades didácticas dirigidas a profesores de matemáticas de secundaria diseñadas con la metodología ACODESA.

Éste es el título del trabajo que presentó Rodríguez (2011), como tesis de maestría bajo nuestra dirección. El trabajo refleja un viraje en nuestras preocupaciones a la hora de usar tecnología digital para elaborar materiales de enseñanza.

Si bien es cierto, tanto en la tesis doctoral de Soto (2003) como en la tesis de Romero (2010) las actividades de enseñanza con tecnología digital contaban con el respaldo de la teoría de representaciones construida por Raymond Duval, también es cierto que ésta es una teoría muy general, que no profundiza en el diseño de actividades de enseñanza. Ambos trabajos descansaban entonces sobre el propósito de promover la articulación de representaciones gráficas y algebraicas, porque en la teoría se establece que ésta es una condición para la aprehensión de los objetos matemáticos, pero no se especifican las formas concretas de promover esta conversión.

La tesis de Rodríguez (2011) en cambio, está basada en una metodología para el diseño de actividades didácticas que había venido desarrollando Hitt (2009), esta metodología llamada ACODESA (cuyas siglas significan aprendizaje en colaboración, debate científico, y auto reflexión) prescribe una serie de lineamientos para el diseño de actividades, que incluyen el uso de tecnología y que resultó apropiada para diseñar actividades con las siguientes características: a) el planteamiento de una situación problemática como punto de partida, b) la integración de diversos conceptos, no necesariamente contemplados en el mismo eje temático, c) la priorización de la acción del estudiante como detonadora de los aprendizajes y d) la incorporación de nuevas tecnologías en su instrumentación y e) que apoyen las competencias que la reforma educativa pretendía promover en los estudiantes. Específicamente la tesis utiliza el software GeoGebra.

ACODESA recomienda el uso previo de materiales didácticos manipulables, antes de usar tecnología y distingue usos diferentes de la tecnología, dependiendo de la etapa del diseño en el que se inserten. En las cuatro actividades didácticas incluidas en esta tesis, nos ha quedado clara la importancia de empatar el nivel de interacción estudiante-software, con los propósitos didácticos del diseño. En algún momento el estudiante tendrá que construir con GeoGebra, mientras que en otros solamente manipula objetos en applets preconstruidos.

3.1.1. Libros de texto para el Colegio de Bachilleres de Sonora

En el año 2014 nos involucramos en la escritura de los libros de texto para el Colegio de Bachilleres de Sonora. El proyecto de escribir los seis libros de texto de Matemáticas resultaba ambicioso, pero contábamos con la experiencia que algunos colegas teníamos en el diseño de actividades didácticas desarrolladas junto con nuestros tesistas o bien en los cursos de formación de profesores que habíamos ofrecido en los últimos años. En la escritura de los textos participamos 15 profesores del Departamento de Matemáticas de la Unison.

Los seis textos quedaron integrados por secuencias didácticas, cada una de las cuales se desarrolla en tres etapas: *apertura*, *desarrollo* y *cierre*, y la mayor parte de las secuencias iban acompañadas de applets construidos en GeoGebra. En el diseño se tomaron en cuenta algunos planteamientos de ACODESA, pero la metodología no se tomó al pie de la letra. Aprendimos durante la elaboración, que los applets construidos con GeoGebra tenían características muy diferentes cuando se hacían para las diferentes etapas de las secuencias. En la etapa de *apertura*, los applets tendrían que orientarse a la comprensión de la situación planteada, en el *desarrollo* a la resolución de la situación y en el *cierre* hacia la integración y formalización de los conceptos matemáticos que han emergido durante las dos etapas anteriores.

2.3. Una propuesta metodológica para el diseño de secuencias didácticas para la matemática del nivel secundaria en un contexto tecnológico, utilizando GeoGebra

El título de esta sección es el mismo que lleva la tesis de maestría presentada por Alvarado (2019) y en la que se ha aplicado una metodología de diseño que hemos venido construyendo y experimentando localmente, producto de nuestras experiencias de diseño y de nuestras reflexiones sobre la sistematización del uso de la tecnología digital para la enseñanza. Esta tesis en particular propone esta metodología a docentes de matemáticas de nivel secundaria, el objetivo de dicha propuesta es brindarle al docente una herramienta para elaborar diseños de secuencias didácticas con el fin de llevarlos al aula de clase; estos diseños tienen la particularidad de incorporar tecnología digital para la elaboración de la secuencia y para su implementación. La metodología fue elaborada con base en la articulación de: la estructura didáctica de Díaz- Barriga (2013), el método de enseñanza ACODESA de Hitt y colaboradores (Hitt y Cortés, 2009; Hitt, Cortés y Saboya, 2017) los desarrollos curriculares de Taba (1962). La metodología se ha puesto a prueba con un grupo de 11 docentes en un curso-taller de 40 horas, los resultados obtenidos fueron tres secuencias didácticas elaboradas por tres equipos de docentes en un contexto tecnológico (usando GeoGebra), donde se percibe que es posible realizar diseños aplicando esta propuesta metodológica.

3. Trabajos en desarrollo y perspectivas.

La línea de trabajo aquí esbozada sigue generando proyectos de intervención y de investigación en matemática educativa, con un enfoque muy particular sobre el uso de tecnología en el aula.

Por un lado, orientados hacia la enseñanza del Álgebra Lineal derivados de los resultados de los trabajos originales sobre esta rama de la matemática (Soto, 2003), de algunos resultados adicionales sobre vectores propios (Soto & García, 2003) y de la enseñanza de transformaciones lineales (Romero, 2010, 2016), enfocándose ahora en el aprendizaje de temas más especializados como el de espacios propios y espacios invariantes (Antelo-Lopez & Romero, 2020).

Por otro lado, orientados hacia el aprovechamiento de los principios geométricos intuitivos para el desarrollo de propuestas de enseñanza, en particular esta orientación se ha materializado en un proyecto sobre las dificultades para justificar proposiciones geométricas al resolver problemas de lugares geométricos con GeoGebra (Soto, Urrea & Romero, 2020). Este proyecto de investigación actualmente incluye el desarrollo de tres tesis de maestría sobre propuestas de enseñanza de las cónicas como lugares geométricos, recurriendo al uso de mecanismos articulados físicos y digitales, recuperando algunos elementos de la Geometría Analítica de Descartes.

Actualmente estamos trabajando en el rediseño del curso de Geometría Analítica que se ofrece a las carreras de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Sonora. En el nuevo curso se incorpora el uso de GeoGebra como herramienta de exploración, pero hay un mayor involucramiento de los estudiantes en las construcciones dinámicas.

A manera de conclusión, diremos que en este artículo hemos trazado a grandes pasos el camino que hemos seguido para incorporar la tecnología digital en la enseñanza de la matemática. Esta experiencia nos ha mostrado que la incorporación empírica que puede hacerse desde nuestra práctica docente es apenas una condición necesaria para incursionar en este tema. Rebasar el empirismo exige la profundización en las teorías de lo didáctico, no solo para entender las dificultades que plantea en estudiantes y profesores la enseñanza con tecnología, sino además para tratar de entender las dificultades que entraña el diseño mismo de las secuencias de enseñanza, que tampoco puede encasillarse en una actividad estrictamente práctica.

Referencias

Alvarado, J., (2019). *Una propuesta metodológica para el diseño de secuencias didácticas para la matemática del nivel secundaria en un contexto tecnológico, utilizando GeoGebra*. Tesis de Maestría sin publicar.

Antelo-Lopez, I. & Romero, C. F. (2020). Construcciones mentales sobre subespacio invariante desarrolladas en una propuesta de enseñanza desde la teoría APOE. En: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA.

Coxeter, H. S. M. (1977). Gauss as a geometer. *Historia Mathematica*, *4*(4), 379-396.

Díaz-Barriga, Á. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 17(3)*, 11-33. Disponible en: https://recyt.fecyt.es/index.php/docenteado/article/view/41685/23758.

González, J. (2000, julio 26). Re: [HM] Metodo grafico de Lill. [Foro en línea]. Disponible en http://archives.math.utk.edu/hypermail/historia/jul00/0141.html.

Laborde, J.-M., and Bellemain, F. (1992). Cabri Geometry II computer software. LSD2-IMAG Grenoble and Texas Instruments.

Lill, M. E. (1867). Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque une inconnue. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, ser. 2, 6: 359–362.

Lill, M. E. (1868). Résolution graphique des e quartions algébriques qui ont déracinés imaginaires. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, ser. 2, 7: 363–367.

Markushévich, A. I. (1984). *Curvas maravillosas. Números complejos y representaciones conformes. Funciones maravillosas*. (2ª ed.). Moscú: MIR.

Hitt, F. y Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso-taller sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet, 10(1)*, 1-30. Disponible en: http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977

Hitt, F., Saboya, M., and Cortés, C. (2017). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, y U. Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology* (pp. 13–30). Cham, Switzerland: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51380-5

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra-a software system for dynamic geometry and algebra in the plane*. (Unpublished master's thesis), University of Salzburg, Austria.

Turnbull, H. (1947). *Theory of Equations*. Oliver and Boyd, Edinburgh; InterScience, New York

Polya, G. & Latta, G. (1976). *Variable compleja*, Limusa, México.

Rodríguez, M-A. (2012). *Actividades didácticas dirigidas a profesores de matemáticas de secundaria diseñadas con la metodología ACODESA*. (Tesis de Maestría sin publicar). Universidad de Sonora. México.

Romero, C. F. (2010). *Una Introducción Gráfica al Concepto de Transformación Lineal Usando GeoGebra*. (Tesis de Maestría sin publicar). Universidad de Sonora, México.

Romero, C. F. (2016). *Aprendizaje de Transformaciones Lineales Mediante la Coordinación de Representaciones Estáticas y Dinámicas.* (Tesis de Doctorado sin publicar). Cinvestav. México.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transformations, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 7-41.

Soto, J. L. & San Martín Sicre, O. (2000). Constructing Meaning For Polynomials: Exploring Duval's RcpresentationsConversions With Cabri Geomctrc II. En M. Fernández (Ed), *Proceedings of the 22nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Soto, J. L. (2002). *Números Complejos: una presentación gráfica. Material didáctico No. 1*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. México

Soto, J-L. (2002b). A propósito de un aparato que grafica cónicas. *Arenario 2*(2), pp. 113-138.

Soto, J. L. (2003). *Polinomios y raíces: una presentación gráfica. Material didáctico No. 1*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. México

Soto, J. L. (2003). *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en R^2 y R^3*. (Tesis de Doctorado sin publicar). Cinvestav, México.

Soto, J. L. & García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in $\mathbb{R}2$ and $\mathbb{R}3$. En I. Vakalis (Ed.) *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level.* Creta, Greece, John Wiley & Sons

Soto, J. L., Romero, C. F. & Ibarra S. E. (2012). El concepto de transformación lineal: una aproximación basad en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds). *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Quebec, Canada, Loze-Dion éditeu.

Soto, J. L., Urrea, M. A. & Romero, C. F. (2020). Dificultades para justificar proposiciones geométricas al resolver problemas de lugares geométricos con GeoGebra. En: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA.

Taba, H. (1962). *La elaboración del currículum*. Buenos Aires: Troquel.

Cómo citar este artículo: Soto Munguía, J. L., & Romero Félix, C. F. Un recorrido por nuestra experiencia en la inclusión de software dinámico en el diseño de materiales didácticos. *SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS,* (5) 1, pp. 127-159.