SAHUARUS
Revista Electrónica de Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Vol. 2, No. 1, abril, 2017, pp. 77–88.

Aproximación analítica de integrales que contienen parámetros

Pastora Margarita Bautista Sanchez, Inna K. Shingareva

Departamento de Matemáticas
e-mail: pastorabautista21@gmail.com, inna@mat.uson.mx

Resumen

Frecuentemente es difícil o imposible evaluar integrales mediante métodos exactos en términos de funciones conocidas (no existe un enfoque sistemático confiable para la integración). Existen enfoques básicos para la evaluación de integrales: transformación de integrales (reducción a integrales que se pueden expresar en términos de funciones conocidas), métodos algorítmicos (que funcionan sólo para una clase de integrales, conocidas como integrales racionales), aproximación numérica de integrales, y aproximación analítica de integrales (evaluación de integrales en términos de funciones conocidas). En el presente trabajo seguimos éste último enfoque y consideramos dos diferentes métodos de aproximación analítica de integrales: aplicación del método de integración por partes y aplicación del Lema de Watson. En general, la aplicación directa de métodos aproximados puede producir errores en varios casos importantes. En este trabajo, se consideran integrales que contienen parámetros arbitrarios (integrales del tipo de Wallis, integrales del tipo de Laplace) y que no pueden ser evaluadas mediante métodos exactos. Se propusieron métodos analíticos aproximados más apropiados y se muestran comparaciones de resultados analíticos aproximados y sus correspondientes valores numéricos.

1 Introducción

Las leyes de la naturaleza se expresan mediante ecuaciones que con frecuencia involucran funciones y sus derivadas e integrales, y el análisis de estas ecuaciones se realiza mediante los conceptos y métodos del cálculo. El cálculo constituye una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad. La integración es un concepto fundamental del cálculo y del análisis matemático. Podemos contemplar que la integración se puede considerar como el límite de una suma o como el proceso inverso de la diferenciación. El Teorema Fundamental de Cálculo nos muestra la relación entre ambos conceptos.

La conexión entre integración y diferenciación es un poco desconcertante porque las reglas de derivación nos permiten tratar la diferenciación como un proceso algorítmico. En otras palabras, conocer las derivadas de un conjunto de funciones nos permite el cálculo de cualquier combinación finita de funciones.

Esto no ocurre en el caso de la integración, la cual se lleva a cabo utilizando una colección de estrategias y casos especiales, y en realidad éstos pueden usarse sólo en subconjuntos de funciones. Para combinaciones finitas de funciones (excepto de la adición) no hay reglas simples.

Por ejemplo, conocemos las integrales indefinidas de las funciones e^{-axt} y $(1+bt+ct^2)^{-1/2}$, que contienen parámetros a, b y c, pero no conocemos la integral indefinida de su producto.

Existen varios enfoques clásicos para evaluar integrales de diferentes clases (integrales indefinidas, definidas, impropias)[1] de manera exacta, por ejemplo, linealidad, cambio de variables, integración por partes, diferenciación bajo el signo de integral.

Integrales que surgen en la mayoría de problemas de ciencia e ingeniería, así como en muchas otras aplicaciones de matemáticas, no pueden ser evaluadas mediante métodos exactos o representan una parte de solución analítica de un problema complicado.

En estos casos se pueden considerar diferentes enfoques para una *aproximación analítica* de integrales. Hay varias razones para llevar a cabo la integración aproximada. La principal puede ser la imposibilidad de realizar la integración mediante métodos exactos. Es decir, integrales que requerirían de un gran conocimiento y manejo de matemática avanzada pueden ser resueltas de una manera más sencilla mediante métodos analíticos aproximados. Incluso existen funciones integrables pero cuya primitiva no puede ser calculada, siendo la integración aproximada de vital importancia. El error de la aproximación, que depende del método que se utilice y de qué tan fino sea, puede llegar a ser tan pequeño que es posible obtener un resultado muy cercano a la solución exacta.

Existen varios métodos de búsqueda de *aproximación analítica* para integrales: ninguno de ellos funciona para todas las integrales y existen muchas integrales para las que ningún método funciona. Los métodos conocidos se pueden aplicar para ciertas clases de integrales, por lo que para una integral dada la tarea es determinar cual método de aproximación es apropiado o, en su defecto, transformar la integral de manera que algún método conocido sea aplicable. Esto es en gran medida una cuestión de experiencia o práctica (con prueba y error) debido a que hay pocas reglas generales.

En este trabajo nos enfocaremos en la aplicación de dos métodos de *aproximación analítica* para evaluación de integrales: aplicación del método de integración por partes y aplicación del Lema de Watson.

El método de integración por partes se basa en la descomposición del integrando como un producto de dos funciones, aplicar el procedimiento repetitivamente (N veces), y obtener una relación más general, la cual se puede evaluar mediante *expansiones asintóticas* para algunas clases de integrales (por ejemplo, integrales del tipo de Laplace). También, existen casos en los que se pueden obtener expresiones exactas para integrales de diferentes clases (integrales indefinidas, definidas, impropias). Sin embargo, la aplicación directa de este método no funciona bien en muchos casos importantes, o si funciona, este proceso es bastante tedioso y puede opacar el comportamiento esencial del integrando y conducir a errores.

El método basado en la aplicación del Lema de Watson sirve para evaluar integrales del tipo de Laplace que cumplan las hipótesis del Lema. Este método es poderoso y se puede aplicar para generar expansiones asintóticas de varias funciones especiales (por ejemplo, la función hipergeométrica confluente de primera especie, la función beta de Euler) utilizando el conocimiento del comportamiento local del integrando en integrales del tipo de Laplace.

En este trabajo, consideramos integrales de diferentes clases que contienen parámetros arbitrarios y no pueden ser evaluadas mediante métodos exactos. Siguiendo el enfoque de

[1] Siempre y cuando todas las integrales existan.

aproximación analítica de integrales, determinamos los métodos más apropiados y mostramos contraste de resultados analíticos aproximados y sus correspondientes valores numéricos.

2 Aplicación del Método de Integración por Partes

Uno de los enfoques más importantes de evaluación de integrales es la aplicación del método de integración por partes, que se basa en descomponer el integrando en el producto de dos funciones, $f(x)$, $g(x)$, y en aplicar la relación

$$\int f(x)g(x)\,dx = g(x)\left[\int f(x)\,dx\right] - \int \frac{dg}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]\,dx. \tag{1}$$

Al repetir esta operación N veces, obtenemos una relación más general.

Teorema 2.1 *Sea $g(x)$ una función integrable y diferenciable N veces. Entonces la siguiente fórmula de integración N veces por partes es válida:*

$$I_N = \int f(x)g(x)\,dx = \sum_{r=0}^{N-1}(-1)^r f^{(-r-1)}(x)g^{(r)}(x) + (-1)^N \int f^{(-N)}(x)g^{(N)}(x)\,dx, \tag{2}$$

donde $g^{(k)}(x)$ es la k-ésima derivada de $g(x)$ si $k \geq 1$ y la k-ésima integral si $k \leq -1$, y $g^{(0)}(x) = g(x)$.

Prueba. Demostramos la fórmula (2) por inducción matemática. Si hacemos la primera integración por partes, obtenemos

$$I_1 = g(x)f^{-1}(x) - \int g^{(1)}(x)f^{(-1)}(x)\,dx. \tag{3}$$

Esta fórmula coincide con la fórmula (2) si $N = 1$.

Si integramos el resultado anterior N veces, obtenemos

$$\begin{aligned} I_N = &\sum_{r=0}^{N-1}(-1)^r f^{(-r-1)}(x)g^{(r)}(x) + (-1)^N f^{(-N-1)}(x)g^{(N)}(x) \\ &-(-1)^N \int f^{(-N-1)}(x)g^{(N+1)}(x)\,dx, \end{aligned} \tag{4}$$

y simplificando, tenemos

$$I_{N+1} = \sum_{r=0}^{(N+1)-1}(-1)^r f^{(-r-1)}(x)g^{(r)}(x) + (-1)^{(N+1)} \int f^{-(N+1)}(x)g^{(N+1)}(x)\,dx. \tag{5}$$

Si la fórmula (4) es válida para N, entonces la fórmula (5) es válida para $N+1$. Puesto que la fórmula (3) es válida para $N = 1$, entonces la fórmula (4) es válida para toda N. ∎

Consideramos algunas aplicaciones del método de integración por partes.

2.1. Casos simples. En los casos más simples la integral del lado derecho de la ecuación (2) puede ser evaluada directamente para algún valor de N, usualmente cuando $g(x)$ es un polinomio. Por ejemplo, si $g(x) = x^2$ y $f(x) = \cos(ax)$, entonces $g^{(2)}(x) = 2$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(ax)\,dx = \quad & gf^{(-1)} - g^{(1)}f^{(-2)} + g^{(2)} \int f^{(-2)}(x)\,dx \\ = \quad & \frac{x^2}{a}\operatorname{sen}(ax) + \frac{2x}{a^2}\cos(ax) - \frac{2}{a^3}\operatorname{sen}(ax).\end{aligned}$$

2.2. Relaciones de recurrencia. Otra aplicación simple se da cuando la integral en el lado derecho de la ecuación (2) es proporcional a la integral original del lado izquierdo de la ecuación, para algún valor de N, así podemos obtener una expresión exacta para la integral. Comunmente este tipo de integrales se componen de funciones trigonométricas y/o exponenciales.

Consideremos las *integrales del tipo de Wallis*:

$$S_{2n} = \int_0^{\pi/(2a)} \operatorname{sen}^{2n}(ax)\,dx, \quad C_{2n} = \int_0^{\pi/(2a)} \cos^{2n}(ax)\,dx,$$

donde a y n son parámetros ($a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$). Demostramos que las integrales S_{2n} y C_{2n} son:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \int_0^{\pi/(2a)} \operatorname{sen}^{2n}(ax)\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\left(\frac{\pi}{2a}\right), \\ C_{2n} &= \int_0^{\pi/(2a)} \cos^{2n}(at)\,dt = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\left(\frac{\pi}{2a}\right). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_0^{\pi/(2a)} \operatorname{sen}^{2n}(ax) = \int_0^{\pi/(2a)} \cos^{2n}(at),$$

donde $t = \dfrac{\pi}{2a} - x$. Calculemos la integral S_{2n}:

$$\begin{aligned} S_{2n} = \int_0^{\pi/(2a)} \operatorname{sen}^{2n}(ax)\,dx &= \int_0^{\pi/(2a)} \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}^{2n-1}(ax)\,dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\pi/(2a)} \cos^2(ax)\operatorname{sen}^{2n-2}(ax)\,dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\pi/(2a)} \big(1-\operatorname{sen}^2(ax)\big)\operatorname{sen}^{2n-2}(ax)\,dx \\ &= (2n-1)\left(\int_0^{\pi/(2a)} \operatorname{sen}^{2n-2}(ax)\,dx - \int_0^{\pi/(2a)} \operatorname{sen}^{2n}(ax)\,dx\right). \end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$S_{2n} = (2n-1)(S_{2n-2} - S_{2n}), \quad S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} S_{2n-2}.$$

Expandiendo la relación de recurrencia, obtenemos los resultados finales:

$$S_{2n} = C_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}\left(\frac{\pi}{2a}\right).$$

Aquí, los valores iniciales de las integrales son iguales a $S_0 = C_0 = \dfrac{\pi}{2a}$.

2.3. Integrales del tipo de Laplace. Integrales de la forma

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-axt}\, h(b,c;t)\, dt \tag{6}$$

son conocidas como *integrales del tipo de Laplace* que contienen parámetros reales a, b y c. Integrales del tipo de Laplace se producen como soluciones de alguna ecuación diferencial lineal, usualmente en problemas de valor inicial. La variable x puede ser compleja, pero normalmente se restringe a la región $\Re(x) \geq \lambda \geq 0$. Si $h(b,c;t)$ es integrable sobre algún intervalo $(0,T)$ y $h(b,c;t) = O(e^{\lambda t})$ para alguna constante λ, cuando $t \to \infty$, entonces la integral es absolutamente convergente y representa una función analítica de x en el semiplano $\Re(x) \geq \lambda$. A no ser que se indique lo contrario supondremos que x es real.

Si la integral existe y $h(b,c;t)$ es N veces continuamente diferenciable en una vecindad del origen, aplicando la ecuación (2) del método de integración por partes, podemos obtener la siguiente aproximación de la expresión analítica de la *integral del tipo de Laplace* $F(x)$:

$$F_{\mathrm{ap}}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{h^{(k)}(b,c;0)}{(ax)^{k+1}} + \frac{(-1)^{N+1}}{(ax)^{N+1}} \int_0^\infty e^{-axt}\, h^{(N+1)}(b,c;t)\, dt. \tag{7}$$

Siempre que todas las derivadas $h^{(k)}(b,c;0)$ existan, podemos sustituir la expresión anterior en los límites de la integración y obtener la siguiente expansión asintótica de $F_a(x)$:

$$F_a(x) = \int_0^\infty e^{-axt}\, h(b,c;t)\, dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(b,c;0)}{(ax)^{k+1}} \quad \text{cuando } x \to \infty. \tag{8}$$

En particular, consideremos la *integral del tipo de Laplace* con parámetros reales a, b y c:

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-axt}}{\sqrt{1+bt+ct^2}}\, dt. \tag{9}$$

Si seguimos el enfoque de integración por partes con $f(t)$ y $g(t)$, donde $f(t) = e^{-axt}$ y $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+bt+ct^2}}$, y sustituimos en los límites de la integración, obtenemos el siguiente resultado analítico aproximado:

$$
\begin{aligned}
F_a(x) = {} & \frac{1}{ax} - \frac{1}{2}\,\frac{b}{(ax)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{(3b^2-4c)}{(ax)^3} - \frac{3}{8}\,\frac{b(5b^2-12c)}{(ax)^4} + \frac{3}{16}\,\frac{35b^4-120b^2c+48c^2}{(ax)^5} \\
& -\frac{15}{32}\,\frac{b(63b^4-280b^2c+240c^2)}{(ax)^6} + \frac{45}{64}\,\frac{231b^6-1260b^4c+1680b^2c^2-320c^3}{(ax)^7} \\
& -\frac{315}{128}\,\frac{b(429b^6-2772b^4c+5040b^2c^2-2240c^3)}{(ax)^8} \\
& +\frac{315}{256}\,\frac{6435b^8-48048b^6c+110880b^4c^2-80640b^2c^3+8960c^4}{(ax)^9}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Ahora comparamos resultados analíticos aproximados, F_a, con resultados numéricos correspondientes, F_n, para algúnos valores de x, a, b y c ($x = 3, 8, \ldots, 43$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$) y presentamos los resultados en la Tabla 1.

x	F_n	F_a	$F_n - F_a$
3	$2.819682217 \times 10^{-1}$	$4.174346994 \times 10^{-2}$	$2.402247518 \times 10^{-1}$
8	$1.171439112 \times 10^{-1}$	$1.171090654 \times 10^{-1}$	$3.484580000 \times 10^{-5}$
13	$7.392412628 \times 10^{-2}$	$7.392374605 \times 10^{-2}$	$3.802300000 \times 10^{-7}$
18	$5.399077649 \times 10^{-2}$	$5.399075912 \times 10^{-2}$	$1.737000000 \times 10^{-8}$
23	$4.252081754 \times 10^{-2}$	$4.252081588 \times 10^{-2}$	$1.660000000 \times 10^{-9}$
28	$3.506900157 \times 10^{-2}$	$3.506900133 \times 10^{-2}$	$2.400000000 \times 10^{-10}$
33	$2.983896936 \times 10^{-2}$	$2.983896931 \times 10^{-2}$	$5.000000000 \times 10^{-11}$
38	$2.596614257 \times 10^{-2}$	$2.596614256 \times 10^{-2}$	$1.000000000 \times 10^{-11}$
43	$2.298297281 \times 10^{-2}$	$2.298297281 \times 10^{-2}$	0

Tabla 1: Comparación de la aproximación analítica de la integral (9), F_a, con la aproximación numérica, F_n, y su error correspondiente, $F_n - F_a$.

La visualización de los resultados obtenidos (presentados en la Figura 1) nos indica que para $x > 6$ el error de aproximación es casi cero.

3 Aplicación del Lema de Watson

La aplicación del método de integración por partes a *integrales del tipo de Laplace* a menudo produce una expansión asintótica. Este proceso es bastante algorítmico y puede disfrazar el comportamiento esencial del integrando que conduce a la expansión asintótica (8). Por otra parte, la aplicación directa de este método no funciona en muchos casos importantes (la ecuación (14) mostrada más adelante es uno de esos casos).

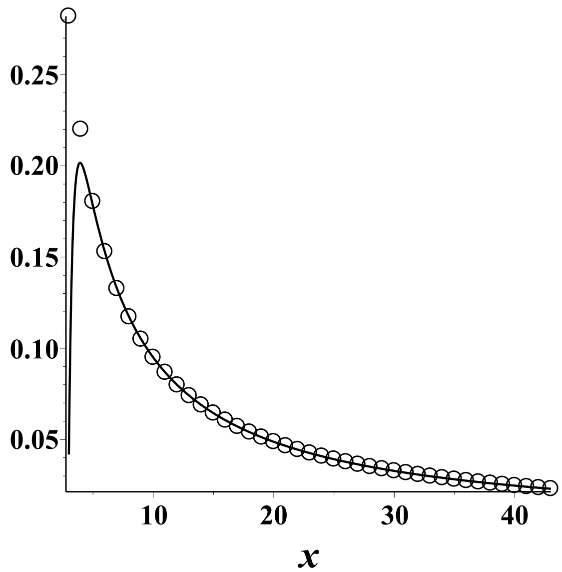

Figura 1: Resultados analíticos aproximados y numéricos, F_a (línea sólida) y F_n (para $x = 3, \ldots, 43$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$).

Considere la siguiente *integral del tipo de Laplace*:

$$F(x) = \int_0^A e^{-xt}\, h(t)\, dt, \qquad x > 0. \tag{11}$$

Si la función $h(t)$ no crece demasiado rápido y si A y x son suficientemente grandes, es claro que la contribución dominante proviene de la región alrededor de $t = 0$.

Lema 3.1 *(Lema de Watson) Si $h(t)$ tiene la expansión asintótica*

$$h(t) \sim t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\beta}, \quad \beta > 0, \quad \alpha > -1, \tag{12}$$

válida cuando $t \to 0$, entonces la integral de Laplace (11) tiene la expansión asintótica

$$F(x) = \int_0^A e^{-xt}\, h(t)\, dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(\alpha + k\beta + 1)}{x^{\alpha + k\beta + 1}}, \tag{13}$$

válida cuando $x \to \infty$.

La prueba de este resultado se puede encontrar en [1].

En esta sección vamos a aplicar diferentes métodos para obtener aproximaciones analíticas aproximadas de una integral, es decir, el método de integración por partes, el desarrollo en series de potencias alrededor del origen de la función al integrar (es decir, expansiones de

Taylor–Maclaurin para $t \to 0^+$), y la aplicación de la fórmula (13) del Lema 3.1 como una fórmula para derivar expansiones asintóticas de integrales que cumplan las hipótesis del Lema.

En particular, consideramos la siguiente *integral del tipo de Laplace*,

$$F(x) = \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\, e^{-xt}\, dt, \tag{14}$$

que no contiene parámetros arbitrarios para hacer la comparación de los tres resultados. En la siguiente sección consideramos algunas generalizaciones de la misma integral introduciendo parámetros arbitrarios.

3.1. Notemos que la aplicación del método de integración por partes (7) falla, porque ninguna de las derivadas de $h(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$ existe en $t = 0$.

Construimos expansiones asintóticas de $F(x)$ de dos maneras: expansiones de Taylor–Maclaurin para $t \to 0^+$ y la aplicación de la fórmula (13) del Lema 3.1.

Si en la fórmula (11) la función $h(t)$ no crece demasiado rápido y si A y x son suficientemente grandes, ya que e^{-xt} decrece rápidamente cuando t aumenta, la contribución dominante proviene de la región alrededor de $t = 0$. Esto sugiere que podemos evaluar la integral del tipo de Laplace reemplazando el integrando $h(t)$ por su expansión local para $t = 0$. Este procedimiento muestra cómo realizar la aproximación y nos puede ayudar para evaluación de integrales más complicadas.

3.2. Aproximamos $h(t)$ por su desarrollo en serie de potencias alrededor del origen,

$$t^{\frac{1}{2}} - t + t^{\frac{3}{2}} - t^2 + t^{\frac{5}{2}} - t^3 + t^{\frac{7}{2}} - t^4 + t^{\frac{9}{2}} - t^5 + t^{\frac{11}{2}} + \cdots,$$

y luego aproximamos el límite superior de la integral por infinito. Obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} F(x) \sim & \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-xt}\, dt + \int_0^\infty -t\, e^{-xt}\, dt + \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-xt}\, dt + \int_0^\infty -t^2 e^{-xt}\, dt \\ & + \int_0^\infty t^{\frac{5}{2}} e^{-xt}\, dt + \int_0^\infty -t^3 e^{-xt}\, dt + \int_0^\infty t^{\frac{7}{2}} e^{-xt}\, dt + \int_0^\infty -t^4 e^{-xt}\, dt \\ & + \int_0^\infty t^{\frac{9}{2}} e^{-xt}\, dt + \int_0^\infty -t^5 e^{-xt}\, dt + \int_0^\infty t^{\frac{11}{2}} e^{-xt}\, dt + \cdots . \end{aligned}$$

Simplificando en términos de la función Gamma, esto se convierte en

$$\begin{aligned} F_a(x) \sim & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{x^{5/2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{15}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{x^{7/2}} - \frac{6}{x^4} + \frac{105}{16}\frac{\sqrt{\pi}}{x^{9/2}} - \frac{24}{x^5} + \frac{945}{32}\frac{\sqrt{\pi}}{x^{11/2}} \\ & - \frac{120}{x^6} + \frac{10395}{64}\frac{\sqrt{\pi}}{x^{13/2}} + \cdots . \end{aligned} \tag{15}$$

En la Tabla 2 se muestra una comparación entre algunos valores de $F(x)$ que se obtienen por integración numérica, F_n, y las dadas por la serie anterior, F_a. También presentamos el error de aproximación correspondiente, $F_n - F_a$.

3.3. Construimos la expansión asintótica aplicando el Lema de Watson a la *integral del tipo de Laplace* (14). Demostramos que el siguiente resultado es válido:

$$F_{\mathrm{LW}}(x) = \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\, e^{-xt}\, dt \sim x^{-3/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k/2+3/2)}{x^{k/2}}. \tag{16}$$

Notemos que la integral (14) es el caso especial de la *integral del tipo de Laplace* (6), donde $h(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$. Determinamos la expansión asintótica de $h(t)$:

$$h(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} = \sqrt{t}\,(1+\sqrt{t})^{-1} = \sqrt{t}\,\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{k/2}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Lema de Watson (12), determinamos los parámetros: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $c_k = (-1)^k$. Entonces, obtenemos el resultado (16).

Notemos que los términos correspondientes de las expansiones asintóticas (16) y (15) para la *integral del tipo de Laplace* (14) son iguales.

Además se puede mostrar que la serie (16) produce la mejor aproximación cuando hacemos el truncamiento en $k \sim x$. En particular, podemos evaluar la expansión asintótica (16), F_{LW} (construida de acuerdo del Lema de Watson) para los valores x de la Tabla 2 (ver columna 4 de la Tabla 2). Se puede observar buena coincidencia de los resultados analíticos aproximados construidos (columnas 2 y 4), los valores numéricos y analíticos (columnas 1, 2 y 4).

x	F_n	F_a	$F_n - F_a$	F_{LW}
3	$1.060942740 \times 10^{-1}$	$2.395314598 \times 10^{-1}$	$-1.334371858 \times 10^{-1}$	$7.064649180 \times 10^{-2}$
8	$2.839493341 \times 10^{-2}$	$2.857535259 \times 10^{-2}$	$-1.804191800 \times 10^{-4}$	$2.864484564 \times 10^{-2}$
13	$1.454328705 \times 10^{-2}$	$1.454999763 \times 10^{-2}$	$-6.710580000 \times 10^{-6}$	$1.454061574 \times 10^{-2}$
18	$9.237305357 \times 10^{-3}$	$9.238038478 \times 10^{-3}$	$-7.331210000 \times 10^{-7}$	$9.237337342 \times 10^{-3}$
23	$6.545244070 \times 10^{-3}$	$6.545381833 \times 10^{-3}$	$-1.377630000 \times 10^{-7}$	$6.545243665 \times 10^{-3}$
28	$4.956720594 \times 10^{-3}$	$4.956756520 \times 10^{-3}$	$-3.592600000 \times 10^{-8}$	$4.956720599 \times 10^{-3}$
33	$3.925788067 \times 10^{-3}$	$3.925799742 \times 10^{-3}$	$-1.167500000 \times 10^{-8}$	$3.925788068 \times 10^{-3}$
38	$3.211288305 \times 10^{-3}$	$3.211292747 \times 10^{-3}$	$-4.442000000 \times 10^{-9}$	$3.211288305 \times 10^{-3}$
43	$2.691651032 \times 10^{-3}$	$2.691652934 \times 10^{-3}$	$-1.902000000 \times 10^{-9}$	$2.691651032 \times 10^{-3}$

Tabla 2: Comparación de la expansión asintótica (15), F_a, la expansión asintótica (16), F_{LW} (construida de acuerdo del Lema de Watson), con la aproximación numérica, F_n, y su error correspondiente, $F_n - F_a$.

4 Algunas Generalizaciones del Lema de Watson

La integral (11) se puede escribir en la forma más general, por ejemplo:

$$F(x) = \int h(b,c;x,t)\, e^{xg(a;x,t)}\, dt, \tag{17}$$

donde a, b y c son parámetros reales, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$; las funciones $g(a;x,t)$ y $h(b,c;x,t)$ pueden ser funciones complejas. La variable t puede ser: 1) real ($t \in \mathbb{R}$) y en este caso la integral está definida sobre un intervalo; 2) compleja ($t \in \mathbb{C}$) y en este caso la integral está definida sobre un contorno en el t-plano complejo; 3) vector real ($t \in \mathbb{R}^n$) y en este caso la integral es multidimensional.

El objetivo general en la teoría de integrales exponenciales es construir aproximaciones asintóticas para la integral (17) cuando $x \to \infty$ y $x > 0$. El Lema de Watson considera integrales exponenciales en las que la integral no contiene parámetros arbitrarios, la función $g(a;x,t)$ tiene una forma simple, $g(a;x,t) = -t$, y los límites de integración son 0 y A.

En muchos problemas de aproximaciones asintóticas para integrales exponenciales, éstas últimas están definidas en forma apropiada para la aplicación del Lema de Watson (ver Sección 3). Existen problemas donde es necesario reducir la integral exponencial a la forma requerida para aplicación del Lema de Watson.

Existen varias generalizaciones del Lema de Watson. En este trabajo consideramos algunas generalizaciones con respecto a integrales aproximadas en secciones anteriores.

4.1. Consideramos la siguiente *integral del tipo de Laplace* (ver Sección 3):

$$F(x) = \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{1+b\sqrt{t}}\, e^{-axt}\, dt. \tag{18}$$

En este caso, tenemos las funciones $g(a;x,t)$ y $h(b,c;x,t)$ con parámetros reales a, b y $c = 0$.

Si construimos las expansiones asintóticas aplicando los dos enfoques anteriores (ver Sección 3), obtenemos las siguientes expresiónes. Para el primer enfoque tenemos:

$$\begin{aligned} F_a(x) \sim\ & \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{(ax)^{3/2}} - \frac{b}{(ax)^2} + \frac{3}{4}\frac{b^2\sqrt{\pi}}{(ax)^{5/2}} - \frac{2b^3}{(ax)^3} + \frac{15}{8}\frac{b^4\sqrt{\pi}}{(ax)^{7/2}} \\ & - \frac{6b^5}{(ax)^4} + \frac{105}{16}\frac{b^6\sqrt{\pi}}{(ax)^{9/2}} - \frac{24b^7}{(ax)^5} + \frac{945}{32}\frac{b^8\sqrt{\pi}}{(ax)^{11/2}} - \frac{120b^9}{(ax)^6} + \frac{10395}{64}\frac{b^{10}\sqrt{\pi}}{(ax)^{13/2}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Siguiendo el segundo enfoque (el Lema de Watson), hacemos el cambio de variable $t = \tau/a$ y obtenemos la integral

$$\frac{1}{a}\int_0^{3a} \frac{\tau}{b\tau + \sqrt{a\tau}}\, e^{-x\tau}\, d\tau.$$

Determinamos la expansión asintótica de $h(b,c;x,t)$:

$$h(b,c;x,\tau) = \frac{\tau}{b\tau + \sqrt{a\tau}} = \tau(b\tau + \sqrt{a\tau})^{-1} = \tau \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^k}{a^{(k+1)/2}} \tau^{(k-1)/2} = \tau^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^k}{a^{(k+1)/2}} \tau^{k/2}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Lema de Watson (12), los parámetros son: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $c_k = (-1)^k b^k / a^{(k+1)/2}$. Entonces, la expansión asintótica tiene la siguiente forma:

$$F_{\mathrm{LW}}(x) = \int_0^{3a} \frac{\tau}{b\tau + \sqrt{a\tau}}\, e^{-x\tau}\, d\tau \sim \frac{1}{x^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^k}{a^{(k+1)/2}} \frac{\Gamma(k/2+3/2)}{x^{k/2}}. \tag{20}$$

Notemos que los términos correspondientes de las expansiones asintóticas (19) y (20) para la *integral del tipo de Laplace* (18) son iguales. Además, si $a = 1$, $b = 1$, la integral (18) se reduce a la integral (14) y las expansiones asintóticas (19) y (20) se reducen a las expansiones asintóticas (15) y (16).

4.2. Consideremos la *integral del tipo de Laplace* (ver Sección 2):

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+bt+ct^2}}\, e^{-axt}\, dt. \tag{21}$$

En este caso, tenemos las funciones $g(a;x,t)$ y $h(b,c;x,t)$ con parámetros reales a, b, c, y el límite de integración $A = +\infty$.

Si construimos una expansión asintótica aplicando el primer enfoque (ver Sección 3), obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{a}}(x) = {} & \frac{1}{ax} - \frac{1}{2}\frac{b}{(ax)^2} + \frac{1}{4}\frac{(3b^2-4c)}{(ax)^3} - \frac{3}{8}\frac{b(5b^2-12c)}{(ax)^4} + \frac{3}{16}\frac{35b^4-120b^2c+48c^2}{(ax)^5} \\ & - \frac{15}{32}\frac{b(63b^4-280b^2c+240c^2)}{(ax)^6} + \cdots . \end{aligned} \tag{22}$$

Notemos que los términos correspondientes de la expansión asintótica (22) y la expansión asintótica (10) obtenida por el método de integración por partes para la *integral del tipo de Laplace* (21) son iguales.

5 Conclusiones

En el presente trabajo se consideraron dos enfoques diferentes de la aproximación analítica de integrales: la aplicación del método de integración por partes y la aplicación del Lema de Watson. La aplicación directa de métodos aproximados puede producir errores en varios casos importantes (estos enfoques sólo son apropiados para ciertas clases de integrales). Se hizo un estudio de integrales de diferentes clases que contienen parámetros arbitrarios y que no pueden ser evaluadas mediante métodos exactos. Se propusieron métodos analíticos aproximados más apropiados y de mejor aproximación. El análisis realizado en este trabajo muestra una buena coincidencia entre resultados analíticos aproximados (de diferentes enfoques) y sus valores numéricos correspondientes.

Referencias

[1] Copson, E. T. *Asymptotic Expansions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

[2] Burk, Frank E. *A Garden of Integrals*. Dolciani Mathematical Expositions No. 31, The Mathematical Association of America, United States of America, 2007

[3] Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd Edition, R. R. Donnelley & Sons Company, United States of America, 1976.

[4] Nahin, Paul J. *Inside Interesting Integrals*. 1st Edition, Springer, New York, 2015.