SAHUARUS
Revista Electrónica de Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Vol. 2, No. 1, Abril, 2017, pp. 13–30.

Sistemas de Ermakov, Sistemas de Lie y Aplicaciones

Guadalupe Miguel Munguía Gámez

Universidad Tecnológica de Hermosillo
e-mail: gmunguia@uthermosillo.edu.mx

Resumen

En este trabajo, basados en un artículo de V. P. Ermakov (1845-1922), se introducen los llamados sistemas de Ermakov y su relación con los sistemas de Lie. Los sistemas de Ermakov involucran ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias y han sido estudiados ampliamente desde finales de la década de los 1970s por sus conexiones con problemas importantes de la física-matemática, como por ejemplo, el oscilador armónico dependiente del tiempo, tanto en el caso clásico como en el cuántico. Asimismo, varios casos de la ecuación de Schrödinger se pueden estudiar desde la óptica de estos sistemas. Se abordará, también, su relación con la ecuación de Riccati y la ecuación de Kummer-Schwarz.

1 Introducción

En 1880, el matemático ucraniano Vasily P. Ermakov, en un artículo publicado por la Universidad de Kiev (Ucrania) [1, 2], presentó un método para integrar ecuaciones del tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x} + A(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + B(x)y = 0, \tag{1}$$

suponiendo que se conoce una solución particular de esta ecuación diferencial. Como sabemos, las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes variables, como (1), son completamente integrables sólo en unos cuantos casos. Con ello queremos indicar que no existe un método general para obtener las soluciones de este tipo de ecuaciones, a diferencia, por ejemplo, del caso de una ecuación con coeficientes constantes

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = 0, \tag{2}$$

cuya la solución general es de la forma

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_1(x),$$

donde φ_1 y φ_2 son *soluciones independientes* de (2), con c_1, c_2 ciertas constantes [3].

Más aún, en el caso de una ecuación de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = f(x), \tag{3}$$

con $f = f(x)$ una función continua en un cierto intervalo, la solución general está dada por ([3]):

$$\psi = \psi_p + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_1,$$

donde ψ_p es una solución particular de (3) y φ_1 y φ_2 son soluciones independientes de la ecuación homogénea (2). Aquí es necesario aplicar el método de *variación de parámetros* para encontrar la solución particular ψ_p [3].

En el trabajo original de Ermakov se obtienen soluciones completas para ecuaciones de la forma (1) por medio de cambios de variables que las reducen a una cuadratura (calcular una integral) y se presentan varios ejemplos que han resultado ser muy importantes por sus múltiples aplicaciones físicas. Durante muchos años, el trabajo de Ermakov [1] fue prácticamente desconocido fuera de su entorno inmediato ya que fue publicado en ruso por la Universidad de Ucrania y pasó prácticamente desapercibido para la comunidad matemática de occidente. Es hasta finales de los 1970s que se dió a conocer ampliamente en Europa y América cuando James L. Reid llamó su atención en sus investigaciones doctorales y sus subsiguientes publicaciones, ver por ejemplo [5, 15, 16, 17].

En el citado trabajo de Ermakov [1, 2], también se muestra, con varios ejemplos, cómo algunos tipos de ecuaciones no-lineales de segundo orden se pueden reducir, mediante cambios de variables apropiados, al estudio de ecuaciones del tipo (1). Uno de los ejemplos más notables que presenta Ermakov en [1] es una ecuación, que mucho tiempo después, y de manera independiente, estudiaron W. E. Milne (1930) [13] y E. Pinney (1950) [14], la cual representa un modelo para un oscilador armónico, dependiente del tiempo, con un potencial cuadrado inverso y que se puede escribir como

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = \frac{1}{y^3}, \tag{4}$$

donde k es una constante distinta de cero. Aquí, la notación $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\ldots$, indica las derivadas de la función $x = x(t)$ con respecto al parámetro t, usualmente identificado con el *tiempo*. La ecuación (4), ahora llamada ecuación de Ermakov-Milne-Pinney, revivió el interés por el trabajo de Ermakov y contribuyó a que se reconociera una línea de investigación en la física-matemática, los llamados *sistemas de Ermakov*. En particular, Ermakov demuestra que la ecuación no-lineal (4) está estrechamente relacionada del oscilador armónico dependiente del tiempo en la frecuencia

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \tag{5}$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Más aún, Ermakov demostró que la función

$$I = \frac{1}{2}\left[(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = C, \tag{6}$$

donde C es una constante, es una *integral primera* de (4), lo cual se comprueba por medio de un cálculo directo: $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$. Además, si $x_1 = x_1(t)$ y $x_2 = x_2(t)$ son dos soluciones particulares de (5), entonces sustituyendo estas soluciones en (6) se obtienen dos soluciones para (4). Abordaremos esto con más detalle en la Sección 4. A la cantidad conservada I dada por (6) se le llama *invariante de Ermakov-Lewis* ya que también fue encontrado posteriormente por R. Lewis en 1967 [12], de forma independiente.

Por otra parte, en 1950, Edmund Pinney presentó en [14] una solución para la ecuación

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = \frac{1}{x^3}, \tag{7}$$

en la forma

$$x(t) = (Au^2 + 2Buv + cv^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

donde $u = u(t)$ y $v = v(t)$ son soluciones particulares, linealmente independientes, de (7). Además, las constantes A, B y C están relacionadas por medio de la fórmula $B^2 - AC = 1/W$, donde W es el Wronskiano de las dos soluciones independientes u y v.

Precisamente, las dos ecuaciones (4), (5), junto con la integral primera (6), es lo que caracteriza a un sistema de Ermakov. Es decir, un sistema de Ermakov viene dado por dos ecuaciones acopladas ligadas por un invariante que nos permite encontrar soluciones de una ecuación, conociendo las soluciones de la otra.

Los sistemas de Ermakov forman un campo de investigación muy activo en la actualidad ya que son casos particulares de los llamados sistemas de Lie, los cuales obedecen ciertas leyes de superposición. De esta manera, es posible estudiar los sistemas de Ermakov desde el punto de vista geométrico, utilizando las herramientas de la Teoría de Lie, lo cual nos permite obtener sus simetrías [10, 16, 17] y así, caracterizar conjuntos completos de sus soluciones.

2 Sistemas de Ermakov

Para fijar notación y nomenclatura, diremos que un sistema de Ermakov es un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden, no-lineales, acopladas, de la forma:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = \frac{1}{yx^2} f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{9}$$

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = \frac{1}{xy^2} g\left(\frac{x}{y}\right) \tag{10}$$

donde f y g son funciones arbitrarias en sus argumentos y ω es la *función de frecuencia*, que usualmente depende del tiempo. Además, el sistema (9)-(10) siempre posee una constante de movimiento (invariante), que es de la forma

$$I = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \int^{y/x} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int^{x/y} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

Notemos que si $f(y/x) = 0$ y $g(x/y) = x/y$, entonces (9)-(10) nos dan las ecuaciones (5) y (4), respectivamente. Asimismo, mediante un cálculo directo, de (11) se tiene

$$I = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \int^{x/y} \tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2,$$

lo cual nos da (6). Aquí suponemos, que las funciones involucradas están bien definidas y son lo suficientemente derivables.

Si hacemos los cambios de variables $u = \dot{x}$ y $v = \dot{y}$, entonces el sistema de Ermakov (9)-(10) se escribe como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x} = u, \tag{12}$$

$$\dot{u} = \frac{1}{yx^2} f\left(\frac{y}{x}\right) - \omega^2(t)x, \tag{13}$$

$$\dot{y} = v, \tag{14}$$

$$\dot{v} = \frac{1}{xy^2} g\left(\frac{x}{y}\right) - \omega^2(t)y, \tag{15}$$

y el campo vectorial, dependiente del tiempo, que representa este sistema está dado por

$$X(t) = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{1}{yx^2} f(y/x) - \omega^2(t)x\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{1}{xy^2} g(x/y) - \omega^2(t)y\right)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{16}$$

Notemos que si definimos lo campos

$$Z_1 = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{yx^2} f(y/x)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{xy^2} g(x/y)\frac{\partial}{\partial v}, \qquad Z_3 = -x\frac{\partial}{\partial u} - y\frac{\partial}{\partial v},$$

entonces Z_1, Z_3 son campos que no dependen del tiempo t, pero se tiene

$$X(t) = Z_1 + \omega^2(t)Z_3.$$

Además, notemos que si

$$Z_2 = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

entonces se tienen las siguientes relaciones entre los corchetes de los campos Z_1, Z_2 y Z_3:

$$[Z_1, Z_3] = 2Z_2, \qquad [Z_1, Z_2] = Z_1, \qquad [Z_2, Z_3] = Z_3.$$

Esto nos permitirá reconocer los sistemas de Ermakov como sistemas de Lie, como se verá en la Sección 5.

3 Algunos comentarios sobre el artículo de Ermakov

En esta parte haremos algunos comentarios sobre el artículo de Ermakov [1, 2]. Sin embargo, por restricciones de espacio sólo abordaremos algunos de los puntos principales de este trabajo.

Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + \alpha(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta(x)y = 0 \tag{17}$$

y supongamos que $u = u(x)$ es una solución particular de esta ecuación, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \alpha(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \beta(x)u = 0 \tag{18}$$

Si multiplicamos (17) por u y (18) por y, obtenemos dos expresiones que luego restamos para eliminar los términos con $\beta(x)$ y se obtiene

$$u\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - y\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \alpha\left(u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \tag{19}$$

Un cálculo sencillo nos muestra que el cambio de variable

$$w = u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

transforma la ecuación (19) en

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \alpha w = 0$$

la cual se puede integrar fácilmente y se obtiene la solución

$$w = c\exp\left(-\int \alpha\,\mathrm{d}x\right) \tag{20}$$

donde c es una constante.

Por otra parte, mediante un cambio de varible apropiado, la ecuación (17) puede transformarse en otra ecuación en la cual no esté presente el término de la primera derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. En efecto, si hacemos

$$y = z\exp\left(-\frac{1}{2}\int \alpha\,\mathrm{d}x\right)$$

entonces un cálculo directo nos muestra que con este cambio de la variable dependiente y, (17) se transforma en

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} - \beta\right)z \tag{21}$$

Precisamente esta forma de la ecuación (17) hace más fácil encontrar condiciones de integrabilidad, como lo muestra Ermakov en [1] para el caso en que la expresión entre paréntesis de la parte derecha de (21) es un cociente de ciertos polinomios. Más precisamente, Ermakov obtiene condiciones de integrabilidad para cualquier ecuación de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\eta x^2 + \xi x + \tau}{(px^3 + qx^2 + rx + s)^2}\,y \tag{22}$$

donde η, ξ, τ, p, q, r y s son constantes. De hecho, tales condiciones de integrabilidad dependen, esencialmente, de las raíces de la ecuación

$$px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \tag{23}$$

y Ermakov analiza los diferentes casos, proporcionando las soluciones para cada uno de ellos y donde la herramienta principal es utilizar el método de fracciones parciales para descomponer la función racional en el lado derecho de (22) y transformar la ecuación a una forma más manejable.

Por ejemplo, en el caso de que todas las raíces de (23) sean distintas se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\eta x^2 + \xi x + \tau}{(x+a)^2 (x+b)^2 (x+c)^2} y$$

la cual es completamente integrable (se pueden obtener todas sus soluciones) si se cumple que

$$\sqrt{1 + \frac{4\alpha}{(a-b)(a-c)}} \pm \sqrt{1 + \frac{4\beta}{(b-a)(b-c)}} \pm \sqrt{1 + \frac{4\gamma}{(c-a)(c-b)}}$$

es un entero impar para alguna elección de los signos que acompañan a las raíces. Aquí, α, β y γ son los términos de la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{\eta x^2 + \xi x + \tau}{(x+a)^2 (x+b)^2 (x+c)^2}.$$

Análogamente, cuando (23) tiene dos raíces iguales, la ecuación (22) se puede escribir como

$$(x+b)^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{\alpha}{(x+b)^2} + \frac{\beta}{(x+a)(x+b)} + \frac{\gamma}{(x+a)^2} \right) y,$$

la cual es completamente integrable en los siguientes tres casos:

1. Si
$$\sqrt{1 + \frac{4\gamma}{(a-b)^2}} \pm \frac{\beta}{(a-b)\sqrt{\alpha}},$$
es un entero impar para alguna elección de los signos que acompañan a las raíces.
2. Si $\alpha = 0$ y
$$\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{4\gamma}{(a-b)^2}},$$
es un entero impar.
3. Si $\alpha = \beta = 0$

Como mencionamos anteriormente, Ermakov analiza caso por caso, estableciendo condiciones de integrabilidad y proporcionando ejemplos que, en la mayoría de los casos, son ecuaciones diferenciales no-lineales de segundo orden que reduce, por medio de cambios de variable, a los casos integrables.

Por ejemplo, la ecuación no-lineal

$$\cos^2 x \, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c) y,$$

para a, b, c constantes, se transforma mediante el cambio de variables

$$\operatorname{sen} x = t, \qquad y = z(1 - t^2)^{-\frac{1}{4}},$$

en la ecuación

$$(t^2 - 1)^2 \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \left(\left(a - \frac{1}{4} \right) t^2 + bt + c - \frac{1}{2} \right) z, \tag{24}$$

la cual es completamente integrable si se cumple que la expresión

$$\sqrt{\frac{1}{4} + a - b + c} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a + b + c} \pm 2\sqrt{a} \tag{25}$$

es un entero impar para alguna elección de los signos. Para ilustrar esto, notemos que (24) se puede escribir como

$$(t+1)(t-1) \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\left(a - \frac{1}{4}\right) t^2 + bt + c - \frac{1}{2}}{(t+1)(t-1)} \right) z,$$

donde el coeficiente de z, en la parte derecha, lo descomponemos por medio de fracciones parciales en la forma

$$\left(\frac{\left(a - \frac{1}{4}\right) t^2 + bt + c - \frac{1}{2}}{(t+1)(t-1)} \right) = \left(\frac{\alpha}{t+1} + \frac{\beta}{t-1} + \gamma \right),$$

y se obtienen los siguientes valores para α, β y γ:

$$\alpha = b - \frac{b + c + a - \frac{3}{4}}{2}, \qquad \beta = \frac{b + c + a - \frac{3}{4}}{2}, \qquad \gamma = a - \frac{1}{4}.$$

En particular, para $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$, se tiene que (25) es igual a 5 y se satisface la condición de integrabilidad. Además, se tiene que

$$\alpha = -\frac{5}{8}, \qquad \beta = \frac{5}{8}, \qquad \gamma = \frac{3}{4},$$

y (24) toma la forma

$$(t+1)(t-1) \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\frac{3}{4} t^2 + \frac{1}{2}}{(t+1)(t-1)} \right) z, \tag{26}$$

cuya solución se puede expresar como

$$z = (t+1)^{\frac{5}{4}} (t-1)^{\frac{5}{4}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left((t+1)^{\frac{1}{2}} (t-1)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Haciendo los cálculos necesarios en esta última expresión se obtiene la solución de (26):

$$z = -\frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{4}} (t-1)^{\frac{1}{4}}}.$$

Otros ejemplos que menciona Ermakov en su artículo son los iguientes:

1. La ecuación de Riccati,
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + Ay + B, \tag{27}$$
se trasforma, al aplicarle la transformación
$$y = -\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$
en
$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} - A\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + Bz = 0, \tag{28}$$
la cual se obtiene después de derivar y con respecto a x y sustituir en (27). La solución de la ecuación (28) es examinada por Ermakov para los diferentes casos ya que tiene la forma de la ecuación (1).

2. La ecuación
$$y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + A\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + By\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Cy^2 = 0, \tag{29}$$
se transforma en una ecuación del tipo (27) bajo el cambio de variables
$$y = \exp\left(-\int z\mathrm{d}x\right) \tag{30}$$
ya que se obtiene
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (A+1)z^2 - Bz + C.$$
Si en la ecuación (29) se toma $A = -1$, entonces se tiene el siguiente caso particular
$$y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + By\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Cy^2 = 0,$$
la cual bajo, la transformación (30), se reduce a una ecuación lineal de primer orden,
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + Bz = C.$$

4 La ecuación de Ermakov-Milne-Pinney

Uno de los ejemplos más notables que presenta Ermakov en [1] es el que da lugar al estudio de los propiamente llamados sistemas de Ermakov. En efecto, Ermakov demuestra que si se conoce una integral de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = M(x)y, \tag{31}$$

entonces es posible obtener una solución para la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = M(x)z + \frac{\alpha}{z^3}, \tag{32}$$

con α una constante. Para mostrar esto, notemos que es posible eliminar M de (31) y (32) si sumamos lo que se obtiene al multiplicar estas ecuaciones por $-z$ y por y, respectivamente. Así, se llega a la ecuación

$$y\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} - z\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\alpha}{z^3}y, \tag{33}$$

la cual se puede escribir como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\alpha}{z^3}y \tag{34}$$

Ahora, si multiplicamos ambos lados de la ecuación (34) por $2(y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = -\frac{2\alpha y}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{z}\right), \tag{35}$$

la cual, después de integrar en ambos lados, resulta en

$$\left(y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = C - \frac{\alpha y^2}{z^2}, \tag{36}$$

donde C es una constante. Notemos que la ecuación (36) es precisamente el invariante de Ermakov-Lewis (6).

Para obtener soluciones explícitas de (31), Ermakov usa (36) para llegar a la expresión

$$\mathrm{d}x = \frac{y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y}{\sqrt{C - \frac{\alpha y^2}{z^2}}}, \tag{37}$$

de donde, al dividir en ambos lados por y^2 y simplificar, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^2} = \frac{y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y}{y^2\sqrt{C - \frac{\alpha y^2}{z^2}}} = \frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{z}{y}\right)}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{C - \frac{\alpha y^2}{z^2}}} = \frac{\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\mathrm{d}\left(\frac{z}{y}\right)}{\mathrm{d}x}}{\left(\frac{z}{y}\right)\sqrt{C\frac{z^2}{y^2} - \alpha}} = \frac{\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\mathrm{d}\left(\frac{z}{y}\right)}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{C\frac{z^2}{y^2} - \alpha}}.$$

Si ahora multiplicamos en ambos extremos de esto último por C e integramos, obtenemos

$$C\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}+C_0=\sqrt{C\frac{z^2}{y^2}-\alpha}, \tag{38}$$

donde C_0 es la constante de integración. La fórmula (38) representa, esencialmente, una solución de (32).

Por otro lado, como es suficiente con obtener soluciones particulares de (31), hacemos $C=0$ en (36) y se obtiene

$$y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\frac{y}{z}\sqrt{-\alpha},$$

la cual es una ecuación de variables separables, por lo que es posible escribirla en la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}\pm\frac{\mathrm{d}x\sqrt{-\alpha}}{z^2},$$

que al integrar, nos da

$$\log y=\log z\pm\sqrt{-\alpha}\int\frac{\mathrm{d}x}{z^2}.$$

Por lo tanto, una solución explícita para (31) viene dada por

$$y=z\,\exp\left(\pm\sqrt{-\alpha}\int\frac{\mathrm{d}x}{z^2}\right). \tag{39}$$

Notemos que cada elección de los signos en (39) una solución particular para (31), con lo cual es posible encontrar un conjunto completo de soluciones para (32).

Por otra parte, de la discusión anterior, es claro que cualquier solución particular de (32) nos permite encontrar soluciones de (31), lo que muestra la profunda interconexión entre estas dos ecuaciones.

Notemos que si hacemos $x=t$ y $M=\omega^2(t)$ de la ecuación (31), entonces se obtiene la ecuación del oscilador armónico dependiente del tiempo

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2(t)y=0, \tag{40}$$

y si hacemos $\alpha=1$ en (32), se obtiene la llamada ecuación de Ermakov-Milne-Pinney,

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\omega^2(t)z+\frac{1}{z^3} \tag{41}$$

La soluciones de (40) y (41), presentada por Pinney en [14], es interpretada como una integral primera de la ecuación de tercer orden

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+4\omega^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}x=0. \tag{42}$$

En fechas más recientes, Conte (citado en [5]) observa que el estudio de la ecuación (41), la llamada ecuación de Kummer-Schwarz,

$$2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} - 3\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^4 - 4\omega^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 0, \tag{43}$$

y la ecuación de Riccati

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x^2 + \omega^2 = 0, \tag{44}$$

son análogos ya que el análisis de una implica estudiar las otras dos ecuaciones [5].

Así, por ejemplo, es fácil verificar por medio de un cálculo directo que la ecuación de Kummer-Schwarz (43), con el cambio de variable

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = z^{-2}, \tag{45}$$

se transforma en la ecuación (41).

5 El álgebra de Lie de campos vectoriales en los sistemas de Ermakov

Los sistemas de Lie fueron estudiados originalmente por Lie [4] y posteriormente por Guldberg [8] y Vessiot [9], aunque sus trabajos estuvieron olvidados por más de un siglo. Un mayor interés por los sistemas de Lie se ha visto desde hace unos cuarenta años, los cuales son un campo de investigación actual por sus muchas conexiones con varias ecuaciones de la física-matemática, como los mencionados arriba.

Nuestro principal interés es mostrar cómo los sistemas de Ermakov son casos particulares de sistemas de Lie y hacer un estudio unificado de varias de las ecuaciones que se han mencionado. Una de las principales herramientas que utilizaremos es el llamado Teorema de Lie, el cual nos caracterizará un sistema de Lie a través de álgebras de Lie de campos vectoriales.

Consideremos un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO) en $\mathbb{R}^n$, que podemos escribir como

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x),$$

o, en forma explícita como

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(t,x)\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= f_2(t,x)\\ &\vdots\\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= f_n(t,x)\end{aligned} \tag{46}$$

donde $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ y cada función $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. Aquí, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

El campo vectorial dependiente del tiempo, en $\mathbb{R}^n$, que define el sistema (46) está dado por

$$X(t,x) = f_1(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots + f_n(t,x)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

el cual es una campo vectorial suave.

Un resultado muy importante demostrado por Lie [4] en el que se basa la Teoría de los Sistemas de Lie es el siguiente.

Teorema 1 (de Lie) *Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en* $\mathbb{R}^n$ *de la forma* (46) *admite un principio de superposición*

$$\Phi : (\mathbb{R}^n)^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

si y sólo si el campo vectorial, dependiente del tiempo

$$X(t,x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{47}$$

se puede escribir localmente en la forma

$$X(t) = \sum_{j=1}^{r} a_j(t) X_j \tag{48}$$

donde $X_1, X_2, \cdots, X_r$ *son campos vectoriales que generan un álgebra de Lie real de dimensión* r, *de tal manera que*

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta}^{\gamma} X_\gamma$$

para constantes reales $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$, *con* $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, r$.

Es precisamente a través del Teorema de Lie que se definen los llamados sistemas de Lie:

Definición 1 *Un sistema (no–autonomo) de EDO en* $\mathbb{R}^n$ *se dice ser un* sistema de Lie *si satisface la condición del Teorema de Lie, esto es el campo que define el sistema* (47), *satisface la condición* (48).

Por ejemplo, consideremos el oscilador armónico dependiente del tiempo:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \tag{49}$$

Tomando el cambio de variable $v = \dot{x}$ esta ecuación se escribe como un sistema de ecuaciones direfenciales ordinarias de primer orden:

$$\dot{x} = v, \tag{50}$$
$$\dot{v} = -\omega^2(t)x, \tag{51}$$

cuyas soluciones son las curvas integrales del campo vectorial dependiente del tiempo

$$X(t) = v\frac{\partial}{\partial x} - \omega^2(t)x\frac{\partial}{\partial v} \tag{52}$$

Consideremos los campos

$$X_1 = v\frac{\partial}{\partial x}, \qquad\qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial v},$$

y calculemos su corchete $[X_1, X_3]$:

$$[X_1, X_3] = \left[v\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial v}\right] = v\frac{\partial}{\partial v} - x\frac{\partial}{\partial x}. \tag{53}$$

Vemos que (53) no es combinacion lineal de X_1 y X_e, por lo que agregamos el campo vectorial

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial v}\right), \tag{54}$$

y tenemos que el conjunto de campos $\{X_1, X_2, X_3\}$ satisface las relaciones

$$[X_1, X_3] = -2X_2, \qquad [X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_2, X_3] = X_3,$$

que son precisamente las relaciones que definen el álgebra de Lie 3-dimensional $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Más áun, se tiene que el campo $X(t)$ en (52) se expresa como combinación lineal de X_1, X_2, X_3:

$$X(t) = X_1 + 0 \cdot X_2 - \omega^2(t)X_3$$

De esta manera, de acuerdo con el Teorema de Lie, el sistema (50)-(51) es un sistema de Lie, y por lo tanto, lo mismo podemos decir de (49).

En el caso de la ecuación de Riccati,

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 \tag{55}$$

el campo vectorial, dependiente del tiempo, asociado a esta ecuación es

$$X(t) = [a(t) + b(t)x + c(t)x^2]\frac{\partial}{\partial x},$$

y si consideramos los campos vectoriales en $\mathbb{R}$,

$$X_1 = 1\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x},$$

entonces es fácil ver que

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_1, X_3] = 2X_2, \qquad [X_2, X_3] = X_3.$$

Por lo tanto, el campo vectorial que define la ecuación de Riccati se escribe como

$$X(t) = aX_1 + bX_2 + cX_3.$$

Así, los campos vectoriales $\{X_1, X_2, X_3\}$ generan un álgebra de Lie, que también en este caso, es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

De una manera similar podemos ver que la ecuación de Ermakov-Milne-Pinney

$$\ddot{x} = -\omega^2(t)x + \frac{k}{x^3}, \qquad (k \neq 0),$$

es un sistema de Lie ya que esta ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\omega^2(t)x + \frac{k}{x^3}, \end{aligned}$$

cuyo campo asociado es

$$Y(t) = v\frac{\partial}{\partial x} + \left(-\omega^2(t)x + \frac{k}{x^3}\right)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{56}$$

Por otro lado, si tomamos los campos

$$Y_1 = v\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{k}{x^3}\right)\frac{\partial}{\partial v}, \qquad Y_3 = -x\frac{\partial}{\partial v}$$

vemos que su corchete es,

$$[Y_1, Y_3] = -v\frac{\partial}{\partial v} + x\frac{\partial}{\partial x}$$

por lo que completamos con el campo

$$Y_2 = \frac{1}{2}\left[x\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial v}\right]$$

y el conjunto $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ satisface las relaciones

$$[Y_1, Y_3] = 2Y_2, \qquad [Y_1, Y_2] = Y_1, \qquad [Y_2, Y_3] = Y_3.$$

Notemos además, que

$$Y(t) = Y_1 + \omega^2(t)Y_3,$$

por lo que los campos vectoriales $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ generan un álgebra de Lie de dimensión 3, isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, por lo cual la ecuación de Ermakov-Milne-Pinney es un sistema de Lie.

En el caso de un sistema generalizado de Ermakov, de la forma:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{x^3} f\left(\frac{y}{x}\right) - \omega^2(t)x,\\ \ddot{y} &= \frac{1}{y^3} g\left(\frac{y}{x}\right) - \omega^2(t)y,\end{aligned}$$

donde f y g son funciones suaves, con $x \neq 0$, $y \neq 0$, se escribe como un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= u,\\ \ddot{u} &= \frac{1}{x^3} f\left(\frac{y}{x}\right) - \omega^2(t)x,\\ \ddot{y} &= v,\\ \ddot{v} &= \frac{1}{y^3} g\left(\frac{y}{x}\right) - \omega^2(t)y,\end{aligned}$$

y este define el campo vectorial

$$W(t) = u\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{x^3} f\left(\frac{y}{x}\right) - \omega^2(t)x\right)\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{1}{y^3} g\left(\frac{y}{x}\right) - \omega^2(t)y\right)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{57}$$

Si se definen los campos vectoriales

$$W_1 = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{x^3} f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{y^3} g\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial v}, \qquad W_3 = -x\frac{\partial}{\partial u} - y\frac{\partial}{\partial v},$$

se tiene que el campo (57) se puede escribir como combinación lineal de estos dos campos,

$$W(t) = W_1 + \omega^2(t)W_3.$$

Más aún, se tiene que

$$[W_1, W_3] = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}$$

el cual no es combinacion lineal de W_1 y W_3, por lo que definimos el campo,

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Así, se tienen las relaciones

$$[W_1, W_3] = 2W_2, \qquad [W_1, W_2] = W_1, \qquad [W_2, W_3] = W_3,$$

de donde se sigue que los campos vectoriales $\{W_1, W_2, W_3\}$ generan un álgebra de Lie de dimensión 3, isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, por lo que un sistema generalizado de Ermakov es un sistema de Lie.

En la Sección 4 se vió la relación entre la ecuación de Kummer-Schwarz con las ecuaciones de Ermakov-Milne-Pinney, Riccati y el oscilador armónico dependiente del tiempo vía el método de Ermakov. De nuevo se verá esta equivalencia pero ahora desde el enfoque de los sistemas de Lie. Ya se mostró que las ecuaciones de Ermakov-Milne-Pinney, Riccati y del oscilador armónico dependiente del tiempo inducen sistemas de campos vectoriales los cuales generan un álgebra de dimensión 3, isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Ahora haremos lo mismo para la ecuación de Kummer-Schwarz, dada por

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 - 2c_0(x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3 + 2b_1(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{58}$$

donde $c_0 = c_0(x)$ y $b_1 = b_1(t)$ son funciones arbitrarias. Esta ecuación la podemos escribir como un sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v, \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= a, \\ \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{3}{2}\frac{a^2}{v} - 2c_0(x)v^3 + 2b_1(t)v. \end{aligned}$$

Si consideremos los campos vectoriales

$$N_1 = 2v\frac{\partial}{\partial a}, \qquad N_2 = v\frac{\partial}{\partial v} + 2a\frac{\partial}{\partial a}, \qquad N_3 = v\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial v} + \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{v} - 2c_0(x)v^3\right)\frac{\partial}{\partial a}$$

se tienen que sus corchetes están dados por

$$[N_1, N_3] = 2N_2, \qquad [N_1, N_2] = N_1, \qquad [N_2, N_3] = N_3.$$

De esta manera el conjunto $\{N_1, N_2, N_3\}$ genera una álgebra de Lie de dimensión 3, la cual es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Más aún,

$$X(t) = v\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial v} + \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{v} - 2c_0(x)v^3 + 2b_1(t)v\right)\frac{\partial}{\partial a} = N_3 + b_1(t)N_1.$$

Con esto se deja en claro la relación estrecha que hay entre la ecuación de Kummer-Schwarz, Ermakov-Milne-Pinney, Riccati y el oscilador armónico dependiente del tiempo y sus soluciones. La relevancia de estas relaciones radica en que pueden ser utilizadas para obtener una mejor interpretación de sistemas físicos que modelizan.

Agradecimientos: El autor desea agradecer al Dr. Guillermo Dávila Rascón por las discusiones y la ayuda recibida en la preparación de este artículo. También agradece a los revisores por las correcciones y sugerencias para mejorarlo.

Referencias

[1] V. P. Ermakov, Second order differential equations: Conditions of complete integrability, Universita Izvestia Kiev, Series III **9** (1880), 1-25 (en Ruso.)

[2] V. P. Ermakov, Second order differential equations: Conditions of complete integrability, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, **2** (2008), 123-145 (Traducido del ruso al inglés por A. O. Harin, bajo la redacción de P. G. L. Leach.)

[3] E. A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Inc., New York, 1961.

[4] S. Lie, G. Scheffers, Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, Edited and revised by G. Scheffers, Teubner, Leipzig, 1893.

[5] P. G. L. Leach, K. Andriopoulos, The Ermakov equation: A comentary, *Appl. Anal. Discrete Mathematics*, **2** (2008), 146-157.

[6] K. S Govinder and P. G. L. Leach, Integrability of generalized Ermakov systems, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27** (1994), 4153-4156.

[7] R. Goodall and P. G. L. Leach, *Generalised Symmetries and the Ermakov-Lewis* Invariant, Departament of Mathematics, Luleá University of Technology, 2013.

[8] A. Guldberg, Sur les équations différentielles ordinaires qui possédent un systéme fondamental díntégrales, C. R. Acad. Sci. Paris **116**,964-965, 1893.

[9] M. E. Vessiot, Sur une classes d équations différentielles, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10**, 53-64, 1893.

[10] J. de Lucas, *Lie systems and applications to quantum mechanics*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias, Departamento de Física Teórica, Universidad de Zaragoza, 2009.

[11] J. F. Cariñena, J. de Lucas, Lie systems: theory, generalizations, and applications, *Dissertationes Mathematicae*, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Varsovia, 2011.

[12] R. H. Lewis Jr., Classical and quantum systems with time dependent harmonic oscillator-type Hamiltonians, *Physical Review Letters*, 18 (1967)

[13] W. E. Milne, The numerical determination of characteristic numbers, *Phys. Rev.* **35** (1930), 863-867.

[14] E. Pinney, The nonlinear differential equation $y\prime\prime(x) + p(x)y + cy^{-3} = 0$, Proceedings of the American Mathematical Society, **1**, 1950, 681.

[15] J. R. Ray, J. L. Reid, More exact invariants for the time-dependent harmonic oscilator, *Physics Letters A*, **71** (1979), 317-318.

[16] J. R. Ray, J. L. Reid, Nonlinear superposition law for generalized Ermakov systems, *Physics Letters A*, **70** (1980), 4-6.

[17] J. R. Ray, J. L. Reid, Noether's theorem and Ermakov systems for nonlinear equations of motion, *Nuovo Cimento*, **59A** (1980), 134-140.

[18] J. de Lucas and C. Sardn *On Lie systems and Kummer-Schwarz equations*, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Cardinal Stefan Wyszsyński University, Wóycickiego 1/3, 01-938, Warsaw, Poland.

[19] F. Haas and J. Goedert *On the linearization of the generalized Ermakov systems*, Instituto de Física, UFRGS, 1998.