

La ecuación KdV: análisis de las soluciones numérica y exacta del problema de la interacción de soluciones tipo solitón

Oscar Alberto Tanahara Romero
Martín Gildardo García Alvarado

Universidad de Sonora
e-mail: oscar.tanahara@unison.mx mggarcia@gauss.mat.uson.mx

Resumen

La ecuación KdV ha sido objeto de mucho interés en los últimos años. Existen diferentes esquemas numéricos para estudiar el problema de la interacción de soluciones tipo solitón de esta ecuación. También existen varias maneras de resolver de manera exacta el mismo problema de interacción. En este trabajo se expone de manera detallada el procedimiento para resolver la ecuación KdV usando transformaciones de Bäcklund y se utiliza la solución obtenida para analizar el nivel de precisión de algunos esquemas numéricos que se han publicado recientemente para estudiar el problema de interacción.

1 Introducción

La ecuación Korteweg-de Vries o KdV es una ecuación diferencial parcial no lineal que modela un tipo de ondas, llamadas *solitones* (nombre acuñado por Norman Zabusky y Martin Kruskal, en 1965, [1], [8]), que históricamente fueron observadas por vez primera sobre la superficie del agua en un canal de baja profundidad.

La historia de esta ecuación inicia en Agosto de 1834 ([6] pág 7–15, [2]), cuando el ingeniero naval escocés John S. Russell, realizaba experimentos en el *Union Canal* (en Herminston), para obtener un diseño más eficiente para los botes. En una ocasión observó que al detener repentinamente un bote que se trasladaba por el canal, se formó una elevación de agua delante de la proa, que siguió avanzando a lo largo de gran parte del canal sin aparente cambio de forma o disminución de velocidad, hasta que se destruyó debido a las irregularidades de la forma del canal.

Russell realizó numerosos experimentos sobre ondas en tanques y canales que el mismo diseñó. A las ondas observadas les llamó *ondas de traslación* y después *ondas solitarias*. A partir de sus observaciones reportó cuatro propiedades ([2]):

- (a) la onda en forma de un montículo (*heap*) de agua se propaga aparentemente sin cambiar su forma ni disminuir su velocidad;
- (b) una cantidad inicial suficientemente grande de agua puede producir dos o más ondas solitarias, que se separarán con el tiempo;
- (c) cuando dos ondas solitarias se cruzan, emergen de la interacción “sin cambio de ningún tipo”;

- (d) si h denota la profundidad del canal, una onda solitaria de amplitud η se traslada con una velocidad c dada por $c^2 = g(h + \eta)$, donde g denota la aceleración debida a la gravedad.

En [3] se expone el desarrollo histórico que transcurrió desde el descubrimiento de Russell de las ondas solitarias, hasta las investigaciones teóricas hechas por Boussinesq (Francia) y por Rayleigh (Inglaterra), publicadas en 1871 y 1877; y por Korteweg y de Vries (Holanda) en 1895, que culminaron en la formulación de lo que se conoce como ecuación KdV.

Una versión adimensional de la ecuación KdV es

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

donde t y x denotan el tiempo y la posición, respectivamente, y u denota la amplitud de la solución. Esta ecuación tiene aplicaciones en muchos campos, como mecánica de fluidos, acústica, óptica y biología molecular, entre otros. Son innumerables los reportes de aplicaciones de la KdV (1). En [4], por ejemplo, se estudian fenómenos de acústica no lineal, flujo de magma, la gran mancha roja de Júpiter, física de plasmas, líneas de transmisión eléctrica, entre otros, en los que aparece la ecuación KdV como modelo básico.

2 La solución exacta

En esta sección expondremos un procedimiento matemático sencillo para encontrar la solución tipo solitón de la ecuación (1) ([6] págs. 21–22, [8] págs. 3–5).

A partir de la observación experimental de que la solución de la KdV es una onda que se propaga sin cambiar de forma y con velocidad constante, buscamos una solución de (1) de la forma $u(x, t) = f(x - ct)$, con $c \in \mathbb{R}$ constante. Haciendo el cambio de variable $s = x - ct$, reescribimos (1) como

$$-cf' + 6ff' + f''' = 0. \quad (2)$$

Integrando una vez (2) obtenemos

$$-cf + 3f^2 + f'' = A, \quad (3)$$

donde A es una constante de integración. Multiplicando (3) por f' , integrando y despejando la derivada restante se obtiene

$$\frac{(f')^2}{2} = -f^3 + \frac{cf^2}{2} + Af + B, \quad (4)$$

donde B es otra constante de integración. Las condiciones a la frontera (sugeridas por la forma del solitón) $f, f', f'' \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \pm\infty$ implican que $A = B = 0$, y entonces (4) se puede escribir en la forma

$$(f')^2 = f^2(c - 2f). \quad (5)$$

Nótese que, como estamos interesados sólo en soluciones reales, la ecuación (5) implica que $c - 2f \geq 0$. Separando variables, escribimos (5) como

$$\int \frac{df}{f\sqrt{c-2f}} = \pm \int ds, \quad (6)$$

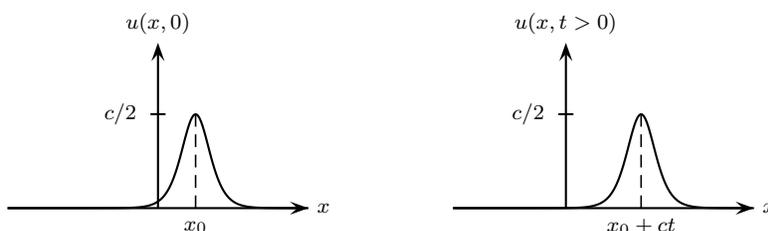
por lo que

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{\sqrt{c-2f} - \sqrt{c}}{\sqrt{c-2f} + \sqrt{c}} \right| = \pm(s - x_0),$$

con x_0 constante de integración. Para que las soluciones sean reales, debe cumplirse que $c > 0$. Al despejar f y recuperar las variables originales, obtenemos

$$f(x - ct) = u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right). \quad (7)$$

A la recta en el plano xt dada por $x - ct - x_0 = 0$ se le conoce como *línea característica*. El *frente* de la onda (es decir, el valor de x en el que se localiza la cresta para cada $t \geq 0$) se “desplaza” sobre esta recta; x_0 es el frente inicial.



La expresión dada en (7) es un ejemplo de lo que se conoce como *solitón*: una solución autosimilar (es decir, de la forma $u(x, t) = f(x - ct)$) de una ecuación diferencial parcial de evolución no lineal, tal que la solución y todas sus derivadas tienden a cero conforme $x \rightarrow \pm\infty$.

3 El problema de la superposición

Cuando se tiene una ecuación diferencial lineal, la combinación lineal de dos o más de sus soluciones también es solución de la ecuación. Más aún, el comportamiento gráfico de la combinación lineal es, estrictamente, la superposición de todas las gráficas de las soluciones involucradas. A esta propiedad se le conoce como *superposición lineal*.

Supongamos que tenemos dos funciones tipo solitón f_1 y f_2 , que son soluciones particulares de la misma ecuación diferencial parcial lineal y que sus gráficas son como las que se muestran en las figuras 1 y 2.

Ahora, sea $F = f_1 + f_2$. Por el principio de superposición lineal, F también es solución de la ecuación diferencial y su gráfica se vería como se muestra en la figura 3. Los frentes de f_1 y f_2 se desplazan a lo largo de sus líneas características respectivas. Al momento de la interacción, los frentes se combinan y la curva solución correspondería a la curva punteada. Después se separan, avanzando con las mismas propiedades (velocidad, amplitud, etcétera) que poseían antes de interactuar. Esto ocurre en un escenario de interacción lineal.

Para una ecuación diferencial no lineal, no se satisface el principio de superposición. Sin embargo, en el caso de la ecuación KdV se presenta un escenario muy parecido: si la condición inicial se toma como la superposición de dos solitones (con frentes suficientemente alejados),

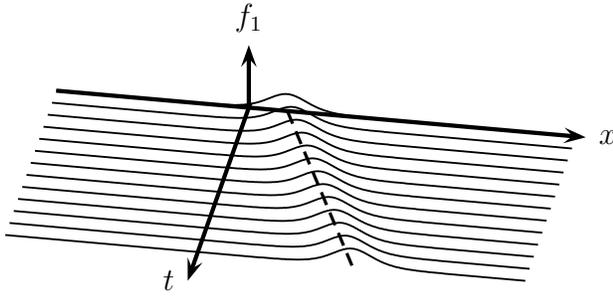


Figura 1: Gráfica de f_1 y de su línea característica.

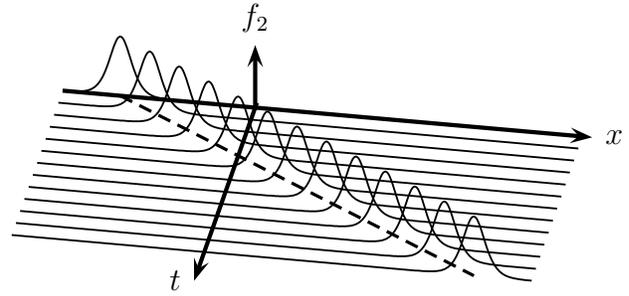


Figura 2: Gráfica de f_2 y de su línea característica.

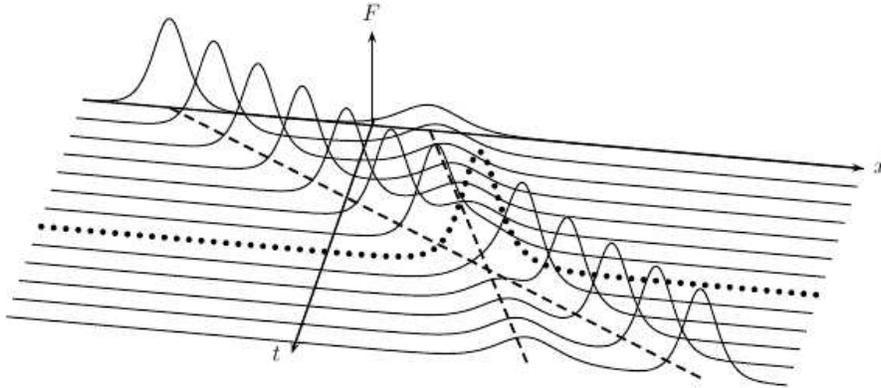


Figura 3: Gráfica de F , la superposición lineal de las soluciones f_1 y f_2 .

la solución tiene un comportamiento similar a la superposición lineal antes y después de la interacción, pero se presenta un desfase durante la interacción de estos solitones.

Para explicar esto, supongamos ahora que f_1 y f_2 satisfacen una ecuación diferencial parcial no lineal. Sea G solución de la misma ecuación diferencial, tal que las gráficas de G y de $f_1 + f_2$ coinciden en el tiempo inicial. La dinámica de G estaría dada por la figura 4.

En la figura 4, ambos solitones se desplazan inicialmente sobre sus líneas características respectivas. Al momento de la interacción ocurre un desfase, lo cual resulta en el solitón de mayor velocidad emergiendo con una fase ligeramente adelantada, pero propagándose a la misma velocidad. El solitón de menor velocidad, en cambio, emerge de la colisión con una fase ligeramente retrasada, aunque más notoria que la del solitón grande. Aunque no puede apreciarse del todo en la figura 4, en el instante en que inicia la interacción entre solitones, las líneas características (discontinuas) dejan de tener un comportamiento lineal. Al terminar la interacción, los solitones presentan nuevas líneas características (punteadas) paralelas a sus originales.

4 Transformaciones de auto-Bäcklund

Las transformaciones de Bäcklund ([7] págs. 5–7), son un conjunto de relaciones entre ecuaciones diferenciales parciales y las soluciones de éstas. Consisten en un sistema de dos

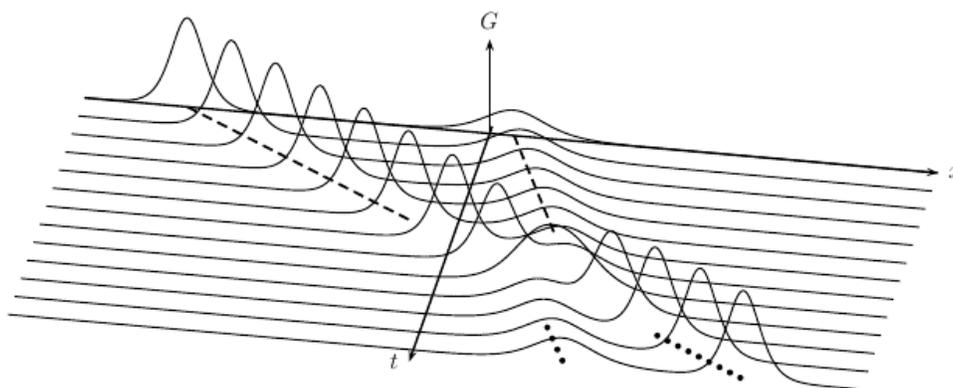


Figura 4: Gráfica de G , con las líneas características antes (discontinuas) y después de la interacción (punteadas).

ecuaciones diferenciales parciales de primer orden que relacionan a 2 funciones (a veces involucrando algún parámetro adicional), que satisfacen cada una a alguna ecuación diferencial parcial.

Para explicar esta idea, sean $P(u) = 0$ y $Q(v) = 0$ ecuaciones diferenciales parciales, con u, v funciones que dependen de x y t . Entonces, es posible encontrar una pareja de relaciones entre las funciones u y v :

$$\left. \begin{aligned} R_1(u, v, u_t, v_t, u_x, v_x, \dots; x, t) &= 0 \\ R_2(u, v, u_t, v_t, u_x, v_x, \dots; x, t) &= 0 \end{aligned} \right\}, \tag{8}$$

tales que

- Eliminando u , ambas relaciones son integrables y la función resultante v es solución de $Q(v) = 0$.
- Eliminando v , ambas relaciones son integrables y la función resultante u es solución de $P(u) = 0$.

Se dice que el par de relaciones (8) son las *transformaciones de Bäcklund* entre P y Q . Cuando las transformaciones de Bäcklund relacionan soluciones de la misma ecuación diferencial; es decir, $P = Q$, se dice entonces que la ecuación diferencial es *invariante ante transformaciones de Bäcklund* o que *posee transformaciones de auto-Bäcklund* (llamadas también autotransformaciones de Bäcklund).

La principal ventaja de que una EDP sea invariante ante estas transformaciones, es que a partir de una solución, pueden utilizarse las transformaciones de Bäcklund como proceso iterativo, para construir otras soluciones.

A continuación ilustramos el uso de la transformaciones de Bäcklund ([8] pág 6-9) para resolver la KdV (1).

Sea $u(x, t)$ una solución de la ecuación KdV (1). Sea $v(x, t)$ una función tal que $v_x = u$. Sustituyendo en (1) e integrando una vez respecto a x obtenemos

$$v_t + 3v_x^2 + v_{xxx} = h(t), \quad (9)$$

donde $h(t)$ es una función arbitraria. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $h(t) \equiv 0$, y entonces (9) es

$$v_t + 3v_x^2 + v_{xxx} = 0. \quad (10)$$

(De hecho, si hacemos el cambio de variable $v^*(x, t) = v(x, t) - \int^t h(s) ds$, vemos que $v_t^* = v_t - h(t)$, $v_x^* = v_x$, $v_{xxx}^* = v_{xxx}$. Entonces, al sustituir en (9), vemos que v^* satisface (10)).

Para (10), consideremos el par de relaciones (transformación de Bäcklund)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_\xi &= -v_x + \beta - \frac{1}{2}(v - \tilde{v})^2 \\ \tilde{v}_\tau &= -v_t + (v - \tilde{v})(v_{xx} - \tilde{v}_{\xi\xi}) - 2(v_x^2 + v_x\tilde{v}_\xi + \tilde{v}_\xi^2) \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

con $\xi = x$, $\tau = t$; β es conocido como *parámetro de Bäcklund*.

El método de Bäcklund permite generar una solución no trivial v de (10) aplicando la solución trivial $\tilde{v} \equiv 0$, utilizando el sistema de relaciones (11). Sustituyendo $\tilde{v} = 0$ en (11) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \beta - \frac{1}{2}v^2 \\ v_t &= vv_{xx} - 2v_x^2 \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Resolviendo la primera ecuación diferencial de (12), obtenemos:

$$v_1 = \sqrt{2\beta} \tanh \left[\sqrt{2\beta} c_1(t) + \sqrt{\frac{\beta}{2}} x \right] \quad (13)$$

y

$$v_2 = \sqrt{2\beta} \coth \left[\sqrt{2\beta} c_2(t) + \sqrt{\frac{\beta}{2}} x \right], \quad (14)$$

donde $c_1(t)$ y $c_2(t)$ son funciones de integración.

Derivando con respecto a x la primera ecuación diferencial de (12), sustituyendo en la segunda ecuación diferencial y resolviendo, también se generan dos diferentes soluciones:

$$v_1 = -\sqrt{2\beta} \tanh \left[\sqrt{2\beta}^{3/2} t + \sqrt{2\beta} c_3(x) \right] \quad (15)$$

y

$$v_2 = -\sqrt{2\beta} \coth \left[\sqrt{2\beta}^{3/2} t + \sqrt{2\beta} c_4(x) \right], \quad (16)$$

donde $c_3(x)$ y $c_4(x)$ son funciones de integración.

Igualando las ecuaciones (13) y (15), al igual que (14) y (16), obtenemos que v_1 y v_2 están dadas por:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2\beta} \tanh \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \\ v_2 &= \sqrt{2\beta} \coth \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Derivando cada función de (17) respecto a x y renombrando las ecuaciones como $u = v_{1x}$ y $\bar{u} = v_{2x}$, obtenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= v_{1x} = \beta \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \\ \bar{u}(x, t) &= v_{2x} = -\beta \operatorname{csch}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x - 2\beta t) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Hemos obtenido en (18) una solución tipo solitón para la ecuación KdV (1), dada por $u(x, t)$ y cuyo frente de onda se encuentra sobre la recta $x = 2\beta t$. Pero además, hemos obtenido una solución irregular para la KdV, dada por $\bar{u}(x, t)$ la cual tiene el comportamiento de un solitón, excepto que posee una singularidad sobre la recta $x = 2\beta t$.

A continuación, mostraremos cómo utilizar las transformaciones de Bäcklund para estudiar la interacción de solitones ([8] págs. 10–12).

Sea v alguna solución de (10). Sean v_1 y v_2 soluciones obtenidas a partir de las transformaciones de auto-Bäcklund, dadas por el par de relaciones en (11), con parámetros β_1 y β_2 respectivamente.

La primera relación de (11) puede escribirse, para v_1 y v_2 , como

$$\left. \begin{aligned} v_{1x} &= -v_x + \beta_1 - \frac{1}{2}(v - v_1)^2 \\ v_{2x} &= -v_x + \beta_2 - \frac{1}{2}(v - v_2)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Sea v_{21} la solución obtenida al aplicar las transformaciones de auto-Bäcklund a v_1 con parámetro β_2 . Sea también v_{12} la solución obtenida al aplicar las transformaciones de auto-Bäcklund a v_2 con parámetro β_1 . Entonces, la primera relación de (11) puede escribirse, para v_{21} y v_{12} , como

$$\left. \begin{aligned} v_{21x} &= -v_{1x} + \beta_2 - \frac{1}{2}(v_1 - v_{21})^2 \\ v_{12x} &= -v_{2x} + \beta_1 - \frac{1}{2}(v_2 - v_{12})^2 \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Para proseguir, necesitamos recurrir a una de las herramientas más importantes en la teoría de transformaciones de Bäcklund: *el teorema de permutabilidad* de Bianchi ([10] págs. 304–306). Este teorema establece que, partiendo de una solución inicial (en este caso v) y

utilizando dos parámetros de Bäcklund distintos (β_1 y β_2), la composición de transformaciones de Bäcklund sobre la solución inicial bajo cada parámetro es permutativa. En otras palabras, tenemos que $v_{21} = v_{12} = \Psi$.

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\beta_1} & v_1 \\ \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_2 \\ v_2 & \xrightarrow{\beta_1} & \Psi \end{array}$$

El Teorema de permutabilidad de Bianchi

Restando las dos ecuaciones en (19) obtenemos

$$v_{1x} - v_{2x} = \beta_1 - \beta_2 - \frac{1}{2}(v_1 - v_2)(v_1 + v_2 - 2v). \quad (21)$$

De igual manera, restando las dos ecuaciones en (20) se tiene la expresión

$$v_{21x} - v_{12x} = -v_{1x} + \beta_2 - \frac{1}{2}(v_1 - v_{21})^2 + v_{2x} - \beta_1 + \frac{1}{2}(v_2 - v_{12})^2,$$

que se puede reescribir como

$$v_{1x} - v_{2x} = \beta_2 - \beta_1 - \frac{1}{2}(v_1 - v_2)(v_1 - 2\Psi + v_2). \quad (22)$$

Igualando (21) y (22), para después despejar Ψ , ésta queda expresada como

$$\Psi = 2\frac{\beta_1 - \beta_2}{v_1 - v_2} + v. \quad (23)$$

Por lo tanto, la derivada parcial de (23) respecto a x , a la que denotaremos como $T(x, t)$,

$$T(x, t) := \Psi_x = -2\frac{(\beta_1 - \beta_2)(v_{1x} - v_{2x})}{(v_1 - v_2)^2} + v_x, \quad (24)$$

es la solución exacta de la ecuación KdV (1).

Es importante recalcar que, para que (24) sea una solución regular, v_{2x} debe ser una solución irregular de la KdV (1), mientras que v_{1x} debe ser una solución regular. Además, los parámetros de Bäcklund deben tomarse tal manera que $\beta_2 > \beta_1$. Esto asegura que el denominador en (24) no se anula.

5 Comparaciones gráficas

En esta sección, se realizará una comparación entre la solución exacta obtenida por la transformación de Bäcklund (24) y un esquema numérico, presentado en [9].

Sea $T_A(x, t)$ la función (24) que se obtiene con las funciones $v_1 = \sqrt{2} \tanh \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2t) \right]$, $v_2 = \sqrt{8} \coth \left[\sqrt{2}(x - 8t + 10) \right]$, y $T_B(x, t)$ la que se obtiene con $v_1 = \sqrt{2} \tanh \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2t) \right]$, $v_2 = \sqrt{7} \coth \left[\sqrt{2}(x - 7t + 10) \right]$, con $v = c$ para ambas funciones.

Las soluciones de Bäcklund están expresadas como

$$T_A(x, t) = 6 \frac{4\text{csch}^2 \left[\sqrt{2}(x - 8t + 10) \right] + \text{sech}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2t) \right]}{\left(\sqrt{8} \coth \left[\sqrt{2}(x - 8t + 10) \right] - \sqrt{2} \tanh \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2t) \right] \right)^2} \quad (25)$$

y

$$T_B(x, t) = 5 \frac{3.5\text{csch}^2 \left[\frac{\sqrt{7}}{2}(x - 7t + 10) \right] + \text{sech}^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2t) \right]}{\left(\sqrt{7} \coth \left[\frac{\sqrt{7}}{2}(x - 7t + 10) \right] - \sqrt{2} \tanh \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2t) \right] \right)^2}. \quad (26)$$

En (25) se genera un solitón de altura 4 y otro de altura 1, cuyos frentes iniciales se encuentran en $x_{2A} \approx -10.3885$ y $x_{1A} \approx 0.7768$, respectivamente; mientras que en (26) se genera un solitón de altura 3.5 y otro de altura 1, cuyos frentes iniciales se encuentran en $x_{2B} \approx -10.45075$ y $x_{1B} \approx 0.84375$, respectivamente.

A continuación, se presenta un conjunto de gráficas comparativas entre las soluciones exactas y sus respectivas aproximaciones numéricas para $-15 \leq x \leq 18$ y $0 \leq t \leq 3$. Cabe hacer notar que, aunque aparentemente se percibe sólo una gráfica, en realidad se trata de dos gráficas en cada caso: una correspondiente a la solución exacta y otra a la solución numérica.

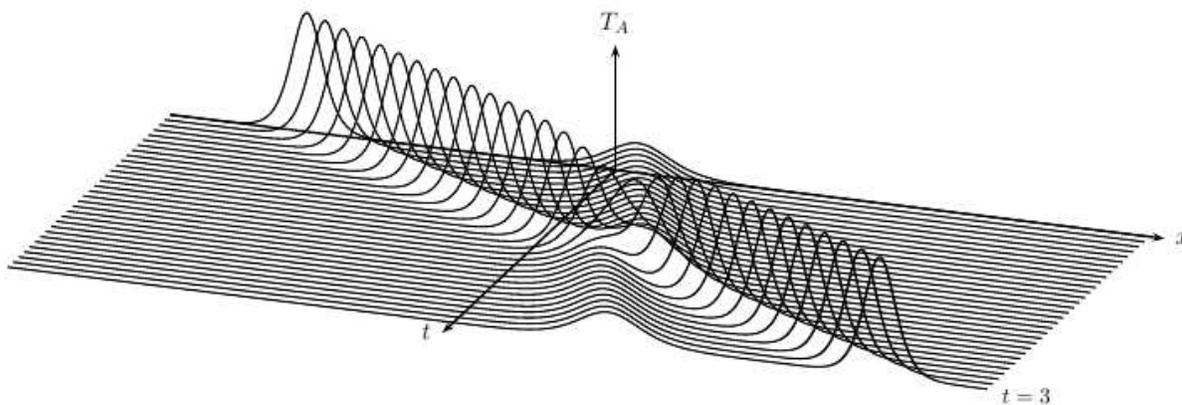


Figura 5: Dinámica de $T_A(x, t)$.

Como puede apreciarse en la figura 5, no existe una diferencia visible entre la gráfica de la aproximación numérica y la de la solución exacta, obtenida mediante la transformación de Bäcklund. Debido a la diferencia de velocidades entre los solitones, para el tiempo final $t = 3$ ya existe una separación completa entre ambos solitones. El cambio de fase para el solitón menor es notoriamente visible, en comparación al solitón grande.

En la figura 6 se muestran las gráficas de la solución exacta, T_B , obtenida mediante la transformación de Bäcklund y la solución numérica, en el caso en que la diferencia de velocidades entre los solitones es menor a la de la función T_A dada por (25). Nótese que las características de las soluciones (25) y (26) son similares; para el tiempo final $t = 3$, la separación total entre los solitones para el caso de la solución (26) es menor que para la solución (25).

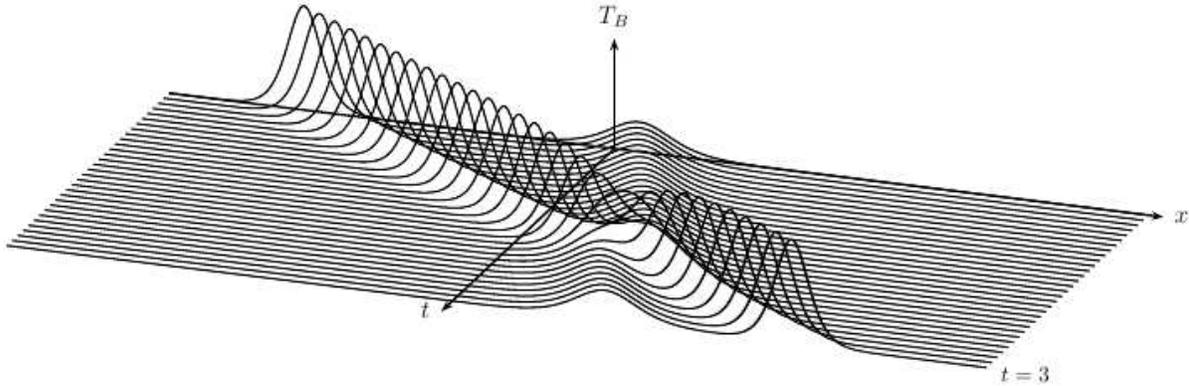


Figura 6: Dinámica de $T_B(x, t)$.

Ambas gráficas resultan satisfactorias, al ser prácticamente idénticas la solución exacta (obtenida por la transformación de Bäcklund) y la solución numérica. Sin embargo, como todo esquema numérico, existe un error asociado incrementándose conforme avanza el tiempo. Para analizar la propagación de este error, se obtuvo la diferencia entre las soluciones para cada incremento del tiempo. Las gráficas con los errores máximos absolutos son las siguientes:

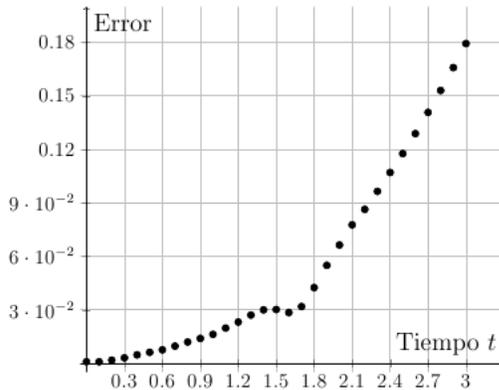


Figura 7: Tabla de errores para $T_A(x, t)$.

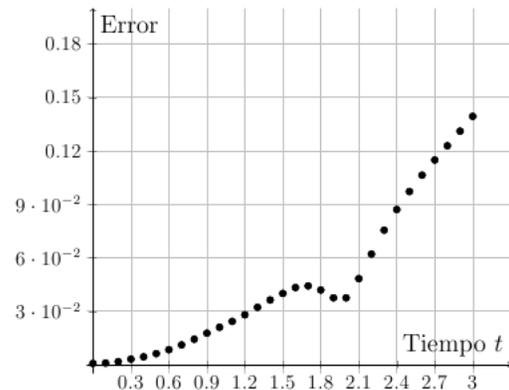


Figura 8: Tabla de errores para $T_B(x, t)$.

Los errores obtenidos para cada valor de t marcan una ligera, pero creciente pérdida de precisión del esquema numérico ante la solución exacta obtenida mediante Bäcklund, con un error inicial menor a una milésima. Esta pérdida se ralentiza y disminuye durante la interacción, para después acentuarse más al separarse los solitones, luego del cambio de fase.

6 Conclusiones

Métodos como el de soluciones asintóticas débiles (entre otros), en conjunto con los diferentes esquemas numéricos existentes, se utilizan para generar aproximaciones numéricas a las soluciones de la KdV consistentes de dos o más solitones interactuando entre sí. El principal problema que presentan, es que se requiere de un gran costo computacional y/o el uso de una gran variedad de herramientas matemáticas que no son sencillas de utilizar.

Las transformaciones de auto-Bäcklund y el IST son, entre otros, métodos conocidos para generar soluciones analíticas exactas de la ecuación KdV. En el caso de Bäcklund, la principal desventaja de este método es que no existe un control exacto de la condición inicial: no hay expresión matemática que determine específicamente donde se encuentran los frentes de onda, en el caso de dos o más solitones, para un tiempo inicial.

Sin embargo, a partir de soluciones exactas obtenidas con el método de Bäcklund, es posible analizar la propagación del error en los esquemas numéricos. Así, disponemos de un excelente marco de referencia para analizar las soluciones numéricas que puedan construirse, a fin de aproximar soluciones de dos o más solitones, para la ecuación KdV y sus variantes.

Referencias

- [1] N. J. Zabusky y M. D. Kruskal, *Interaction of "soliton" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*. Physical Review Letters, Vol. 15, No. 6 (1965).
- [2] J. S. Russell, *Report on Waves*. Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, pages 311-390 (1844).
- [3] E. M. de Jager, *On the Origin of the Korteweg-de Vries Equation*, Korteweg-de Vries Institute, University of Amsterdam (2011).
<http://arxiv.org/pdf/math/0602661v2.pdf>
- [4] D. G. Crighton, *Applications of KdV*. Acta Applicandae Mathematicae, Volume 39, Issue 1, pages 39-67 (1995).
- [5] J. Boussinesq, *Théorie de l'intumescence liquide, appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 72, pages 755-759 (1871).
- [6] P. G. Drazin y R. S. Johnson, *Solitons: an introduction*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2da edición (1989).
- [7] D. Gablinger, *Notes on The Sine Gordon Equation*.
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~tdohnal/SOLIT_WAVES/SGEhandout4.pdf (2007).
- [8] K. Brauer, *The Korteweg-de Vries Equation: History, exact Solutions, and graphical Representation*.
http://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math_485/KdV.pdf (2000).

- [9] M. G. García A. y G. A. Omel'yanov, *Interaction of solitary waves for the generalized KdV equation*. Elsevier; Communications in nonlinear science and numerical simulations, Volume 17, Issue 8, pages 3204-3218 (2012).
- [10] L. P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Ginn and Company, Boston (1909).
- [11] C. Rogers y W. F. Shadwick, *Bäcklund Transformations and Their Applications*, Academic Press, New York (1982).