**SAHUARUS**
**Revista Electrónica de Matemáticas,**
**Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,**
**Vol. 1, No. 2, Septiembre 2016, pp. 82–89.**

# Generación de soluciones vía transformaciones para ecuaciones del tipo Klein–Gordon que contienen parámetros arbitrarios

**Carmen M. Romandía Flores, Inna K. Shingareva, Carlos Lizárraga-Celaya**

Departamentos de Matemáticas y Física
Universidad de Sonora
*e-mail:* carmenm.romandiafl@correoa.uson.mx,
inna@mat.uson.mx, carlos.lizarraga@correo.fisica.uson.mx

**Resumen**

*En el presente trabajo se consideran dos clases de transformaciones (transformaciones puntuales y transformaciones de contacto) y una familia de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) del tipo Klein–Gordon que contiene parámetros arbitrarios. Basado en el enfoque exacto y la teoría de transformaciones de ecuaciones diferenciales parciales, se puede reducir ecuaciones del tipo Klein–Gordon a ecuaciones más simples de resolver o bien conocidas vía transformaciones puntuales y de contacto para obtener soluciones exactas. Se consideran transformaciones de traslación y auto-similares (de la clase transformaciones puntuales), transformaciones de Bäcklund (de la clase transformaciones de contacto) y se obtienen soluciones exactas de algunas ecuaciones diferenciales parciales de la familia de ecuaciones del tipo Klein–Gordon con parámetros arbitrarios (ecuación lineal de Klein–Gordon, ecuación no lineal de sine-Gordon, ecuación no lineal de Liouville, entre otras). En general, aplicando métodos de álgebra computacional y modificando parámetros de transformaciones y de ecuaciones del tipo Klein–Gordon consideradas, se puede generar una variedad de soluciones exactas.*

## 1 Introducción

El enfoque exacto basado principalmente en métodos de transformaciones, es una herramienta analítica muy útil para el estudio de varias clases de ecuaciones diferenciales parciales.

En general, el método de transformaciones puede ser dividido en dos partes: transformaciones de variables independientes y variables dependientes, y transformaciones de variables independientes, dependientes y sus derivadas.

El método de transformaciones nos permite encontrar mapeos bajo los cuales la EDP no lineal es invariante y sus nuevas variables (independientes y dependientes) hacen que la ecuación sea más simple. Con estas transformaciones también se puede convertir una solución de una EDP en la misma solución o en otra, las soluciones invariantes pueden ser encontradas por reducciones de simetría, reescribiendo la ecuación con nuevas variables.

Bajo alguna transformación puntual o de contacto, las EDP no lineales pueden ser escritas en forma de Cauchy–Kovalevskaya, forma normal, forma canónica o forma lineal.

Es bien conocido que ecuaciones de la familia del tipo Klein–Gordon (por ejemplo, ecuación de Klein-Gordon, ecuación de sine-Gordon y ecuación de Liouville) describen varios fenómenos físicos de una manera precisa (por ejemplo, propagación de dislocaciones en cristales, movimiento de paredes de Bloch en cristales magnéticos, propagación de ondas con dislocaciones a lo largo de una membrana lipídica, propagación de flujo magnético con efecto túnel de Josephson, etc.) [3].

En este trabajo, generamos soluciones exactas de las siguientes ecuaciones diferenciales parciales de la familia de ecuaciones del tipo Klein–Gordon que contienen parámetros arbitrarios: ecuación lineal de Klein–Gordon (KG-L), ecuación no lineal de sine-Gordon (SG) y ecuación no lineal de Liouville (L-NL). Demostramos que la ecuación lineal de Klein–Gordon (KG-L) está relacionada con una EDO mediante la transformación de traslación de tipo onda viajera, la ecuación no lineal de sine-Gordon está relacionada con una EDO mediante la transformación auto-similar, las transformaciones auto-Bäcklund satisfacen la ecuación no lineal de sine-Gordon y la ecuación no lineal de Liouville está relacionada con la ecuación de onda lineal mediante la transformación de Bäcklund.

En general se puede aplicar métodos de álgebra computacional, modificar parámetros de transformaciones y de ecuaciones del tipo Klein–Gordon para generar una variedad de soluciones exactas y derivar relaciones entre soluciones.

## 2 Transformaciones Puntuales

En esta Sección, consideramos ecuaciones diferenciales parciales en una dimensión $x$ y con una variable de tiempo $t$. La variable dependiente es $u$, y todas las funciones son $\mathcal{C}^\infty$.

**Definición 2.1** *Sea $u = u(x,t)$ una función de las variables independientes $x, t$. En general, una transformación puntual está definida por las fórmulas*

$$X(x,t) = F(u(x,t), x, t), \quad T(x,t) = G(u(x,t), x, t), \quad U(X,T) = H(u(x,t), x, t), \tag{1}$$

*donde* $\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,t,u)} \neq 0,\ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,t)} \neq 0.$

Una transformación puntual preserva el orden de la EDP a la que se le aplica, y también preserva la estructura de la ecuación ya que las derivadas de orden mayor de las nuevas variables son linealmente dependientes de las derivadas de orden mayor de las variables originales.

### 2.1 *Transformaciones de Traslación*

Las soluciones de tipo onda viajera, por definición son de la forma

$$u(x,t) = U(z), \quad z = kx - \lambda t, \tag{2}$$

donde $\lambda/k$ describe la velocidad de la propagación de onda. Estas soluciones se caracterizan por el hecho de que la forma de estas soluciones en instantes diferentes se obtienen de una de ellas mediante traslaciones apropiadas sobre el eje $x$.

La ecuación lineal de Klein–Gordon,

$$u_{tt} - au_{xx} + bu = 0, \tag{3}$$

está relacionada con la EDO

$$U_{\xi\xi} + \frac{b}{(\lambda/k)^2 - a} U = 0, \tag{4}$$

mediante la transformación de traslación del tipo onda viajera, $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = kx - \lambda t$.

Derivando $U(\xi)$, obtenemos

$$u_{xx} = U_{\xi\xi}, \quad u_{tt} = (\lambda/k)^2 U_{\xi\xi}, \tag{5}$$

y sustituyendo en (3), tenemos

$$U_{\xi\xi} + \frac{b}{(\lambda/k)^2 - a} U = 0. \tag{6}$$

*Generación de soluciones*: si $(\lambda/k)^2 < a$, entonces la solución (no acotada y no localizada) de la EDO es

$$U(\xi) = A_1 \exp\left(\frac{\sqrt{b}\xi}{\sqrt{a - (\lambda/k)^2}}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{b}\xi}{\sqrt{a - (\lambda/k)^2}}\right), \tag{7}$$

si $(\lambda/k)^2 > a$, la solución (acotada y periódica) es

$$U(\xi) = A_3 \cos\left(\frac{\sqrt{b}\xi}{\sqrt{(\lambda/k)^2 - a}}\right) + A_4 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{b}\xi}{\sqrt{(\lambda/k)^2 - a}}\right), \tag{8}$$

donde $A_i$ $(i = 1, \ldots 4)$ son constantes de integración.

### 2.2 *Transformaciones Auto-Similares*

**Definición 2.2** *Una solución auto-similar es una solución de la forma*

$$u(x,t) = t^{\alpha} U(\zeta), \quad \zeta = xt^{\beta}. \tag{9}$$

Los perfiles de estas soluciones se pueden construir bajo una transformación de similaridad (o escalamiento).

**Definición 2.3** *Las soluciones auto-similares existen si el escalamiento de variables independientes y dependientes,*

$$t = C^n T, \quad x = C^m X, \quad u = C^k U, \tag{10}$$

*donde $C \neq 0$ es una constante arbitraria y $|k| + |m| \neq 0$, para algunos parámetros $k$ y $m$, es equivalente a la transformación idéntica.*

Una EDP se reduce a la misma ecuación con respecto a las variables $(X, T, U)$ bajo la transformación (10) y la relación entre los parámetros $\alpha, \beta, k, m, n$ es $\alpha = k/n$, $\beta = -m/n$.

La ecuación característica de sine-Gordon

$$u_{xy} = a\,\mathrm{sen}(bu), \tag{11}$$

está relacionada con la EDO

$$\xi U_{\xi\xi} + U_{\xi} = a\,\mathrm{sen}(bU) \tag{12}$$

mediante la transformación auto similar

$$x = C^m X, \quad t = C^{-m} T, \quad u = U. \tag{13}$$

Asumimos que esta ecuación es invariante bajo un grupo de transformaciones

$$x = C^m X, \quad t = C^n T, \quad u = C^k U. \tag{14}$$

De aquí tenemos que

$$u_{xt} = \frac{\partial^2 (C^k U)}{\partial (C^m X) \partial (C^n T)} = C^{k-m-n} U_{XT} = a\,\mathrm{sen}(C^k b U). \tag{15}$$

Para que la ecuación (11) sea invariante, se debe cumplir que $k = 0, m = -n$. Así

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = xt, \tag{16}$$

y obtenemos la EDO

$$\xi U_{\xi\xi} + U_{\xi} = a\,\mathrm{sen}(bU). \tag{17}$$

*Generación de soluciones*: si introducimos la nueva variable $w = \exp(ibU)$ y derivamos la ecuación para $w$, obtenemos

$$w'' - \frac{w'^2}{w} + \frac{1}{2\xi}(2w' - abw^2 + ab) = 0, \tag{18}$$

la cual es un caso especial de la ecuación de Painlevé de tercera clase. Este tipo de ecuaciones se resuelven mediante integración numérica [1]. Por ejemplo, obtenemos la solución numérica y gráfica de Ec. (18) mediante el sistema de álgebra computacional *Maple*:

```
with(plots): G:=Array(1..2);
setoptions(axes=boxed,scaling=unconstrained,numpoints=200);
Eq1:=diff(w(xi),xi$2)-(diff(w(xi),xi))^2/w(xi)+(diff(w(xi),xi))/xi
 -(1/2)*w(xi)^2*a*b/xi+a*b/(2*xi)=0;
IC1:=w(0.1)=-0.1,D(w)(0.1)=-0.1;
Sol_num:=dsolve({subs(a=3,b=6,Eq1),IC1},w(xi),numeric,
 range=0.1..evalf(1000*Pi));
odeplot(Sol_num,[xi,w(xi)],0.1..evalf(1000*Pi),color=blue);
G[1]:=odeplot(Sol_num,[xi,w(xi)],0.1..evalf(1000*Pi),color=blue):
G[2]:=odeplot(Sol_num,[w(xi),diff(w(xi),xi)],0.2..evalf(200*Pi),
 color=magenta,numpoints=5000): display(G);
```

## 3 Transformaciones de Contacto

Una transformación de contacto es equivalente a una transformación puntual que actúa sobre el espacio de variables independientes, dependientes y sus primeras derivadas y puede ser extendido a transformaciones puntuales que actúan en el espacio de variables independientes, dependientes y sus derivadas de cualquier orden finito.

**Definición 3.1** *Sea $u = u(x, y)$ una función de dos variables. Una transformación de contacto es la que sus variables originales dependen de las nuevas variables y sus primeras derivadas:*

$$x = F\big(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta\big), \quad y = G\big(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta\big), \quad u = H\big(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta\big). \tag{19}$$

*Las funciones $F$, $G$, $H$ no pueden ser arbitrarias y son elegidas de tal forma que las primeras derivadas de las variables originales dependen solo de las variables transformadas y de las primeras derivadas:*

$$u_x = U\big(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta\big), \quad u_y = V\big(\xi, \eta, \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta\big). \tag{20}$$

Las transformaciones de contacto no incrementan el orden de las ecuaciones.

### 3.1 *Transformaciones de Bäcklund*

Sean $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ soluciones, respectivamente, de las ecuaciones diferenciales parciales

$$E_1\big(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\big) = 0, \quad E_2\big(x, y, v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}\big) = 0. \tag{21}$$

**Definición 3.2** *Se dice que las ecuaciones (21) están relacionadas por la transformación de Bäcklund,*

$$\Phi_1\big(x, y, u, u_x, u_y, v, v_x, v_y\big) = 0, \quad \Phi_2\big(x, y, u, u_x, u_y, v, v_x, v_y\big) = 0, \tag{22}$$

*si la consistencia (o compatibilidad) de las primeras ecuaciones de (21) y (22) implica la segunda ecuación de (21) y la consistencia (o compatibilidad) de las segundas ecuaciones de (21) y (22) implica la primera ecuación de (21).*

Si para alguna solución específica $v$ de la segunda ecuación de (21) uno puede resolver las ecuaciones (22) para $u$, entonces $u$ es solución de la primera ecuación de (21).

Ahora vamos a ver un resultado aplicado a la ecuación no lineal de sine–Gordon que contiene parámetros arbitrarios.

Consideremos la forma característica de la ecuación de sine–Gordon:

$$u_{xt} = a\,\mathrm{sen}(bu). \tag{23}$$

La transformación de Bäcklund para esta ecuación es

$$(v-u)_x = 2\frac{k}{b}\,\mathrm{sen}\left(\frac{b(u+v)}{2}\right), \quad (v+u)_t = -\frac{2a}{k}\,\mathrm{sen}\left(\frac{b(u-v)}{2}\right). \tag{24}$$

Diferenciando la primera ecuación de (24) con respecto a $t$, obtenemos

$$(v-u)_{xt} = -2a\,\mathrm{sen}\left(\frac{b(u-v)}{2}\right)\cos\left(\frac{b(u+v)}{2}\right). \tag{25}$$

Diferenciando la segunda ecuación de (24) con respecto a $x$, obtenemos

$$(u+v)_{tx} = 2a\,\mathrm{sen}\left(\frac{b(u+v)}{2}\right)\cos\left(\frac{b(u-v)}{2}\right). \tag{26}$$

Utilizando la propiedad de derivadas parciales mixtas, $u_{xt} = u_{tx}$, si sumamos las ecuaciones (25) y (26), tenemos en el lado izquierdo de la igualdad, $(u-v)_{xt}+(u+v)_{xt} = 2u_{xt}$. Utilizando la identidad trigonométrica, $\mathrm{sen}(\varphi-\psi) = \mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi - \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi$, tomando $\varphi = \dfrac{b(u+v)}{2}$ y $\psi = \dfrac{b(u-v)}{2}$, entonces el lado derecho de la sumatoria queda $2a\,\mathrm{sen}(bv)$. Así, la suma de (25) y (26) es

$$v_{xt} = a\,\mathrm{sen}(bv).$$

Similarmente, si restamos (25) y (26), obtenemos

$$u_{xt} = a\,\mathrm{sen}(bu).$$

En este caso, la transformación de Bäcklund relaciona dos soluciones $u$ y $v$ que satisfacen la misma ecuación diferencial parcial. Por esta razón, la transformación de Bäcklund es llamada, transformación auto-Bäcklund.

*Generación de soluciones:* ahora obtendremos una solución de la ecuación (11) mediante las transformaciones (24). Partimos de la solución trivial $u(x,t) = 0$. Si $v = 0$, la transformación de Bäcklund queda

$$u_x = -\frac{2k}{b}\,\mathrm{sen}\left(\frac{bu}{2}\right), \quad u_t = -\frac{2a}{k}\,\mathrm{sen}\left(\frac{bu}{2}\right). \tag{27}$$

Integrando estas ecuaciones, tenemos

$$\frac{2kx}{b} = 2\log\left|\tan\left(\frac{bu}{4}\right)\right| + A(t), \quad \frac{2at}{k} = 2\log\left|\tan\left(\frac{bu}{4}\right)\right| + B(x), \tag{28}$$

donde $A(t), B(x)$ son funciones arbitrarias que resultan de la integración. Sumando las dos ecuaciones de (28) tenemos

$$\tan\left(\frac{bu}{4}\right) = \alpha e^{\left(kx+\frac{abt}{k}\right)}, \tag{29}$$

donde $\alpha = \exp\left(\frac{1}{2}[b(A(t)+B(x))]\right)$ es una constante. Despejando $u(x,t)$, obtenemos la solución del tipo soliton

$$u(x,t) = \frac{4}{b}\tan^{-1}\left[\alpha\exp\left(kx+\frac{abt}{k}\right)\right]. \tag{30}$$

### 3.2 *Transformaciones de Linealización*

La ecuación diferencial parcial no lineal de Liouville [2]

$$u_{xy} = ae^{bu}, \tag{31}$$

está relacionada con la ecuación de onda lineal

$$v_{xy} = 0 \tag{32}$$

mediante la transformación de Bäcklund

$$v_x = u_x + \frac{2k}{b}\exp\left[\frac{1}{2}b\big(u+v\big)\right], \quad v_y = -u_y - \frac{a}{k}\exp\left(\frac{1}{2}\big(u-v\big)\right). \tag{33}$$

Diferenciando la primera ecuación de la transformación de Bäcklund (33) con respecto a $y$, tenemos

$$v_{xy} = u_{xy} + k(u_y + v_y)\exp\left[\frac{1}{2}b(u+v)\right]. \tag{34}$$

Sustituyendo (33) en (34) y simplificando, obtenemos

$$v_{xy} = u_{xy} + a\exp\left[\frac{1}{2}b\big(u-v\big) + \frac{1}{2}b(u-v)\right] = u_{xy} + a\exp(bu). \tag{35}$$

Análogamente, diferenciando la segunda ecuación de la transformación de Bäcklund (33) con respecto a $x$, tenemos

$$v_{xy} = -u_{xy} - a\exp(bu). \tag{36}$$

Sumando Ec. (35) y Ec. (36), obtenemos la ecuación de onda lineal (32). De manera similar, restando Ec. (35) y Ec. (36), obtenemos la ecuación no lineal de Liouville (31).

*Generación de soluciones*: la solución para la ecuación de onda lineal es la bien conocida *solución de d'Alembert* y puede obtenerse mediante el sistema de álgebra computacional *Maple*:

```
pdsolve(LEqu);
EcLinOnda:=diff(U(x,t),x$2)-1/c^2*diff(U(x,t),t$2)=0;
IC1:=U(x,0)=f(x); IC2:=D[2](U)(x,0)=g(x);
sisD:=[EcLinOnda,IC1,IC2]; pdsolve(sisD);
```

## 4 Conclusiones

En el presente trabajo hemos considerado métodos analíticos (métodos de transformaciones) para encontrar soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales del tipo Klein–Gordon que contienen parámetros arbitrarios. En particular, consideramos transformaciones de traslación y auto-similares (de la clase de transformaciones puntuales), transformaciones de Bäcklund (de la clase de transformaciones de contacto), obtenemos soluciones exactas de algunas ecuaciones diferenciales parciales de la familia de ecuaciones del tipo Klein–Gordon (ecuación lineal de Klein–Gordon, ecuación no lineal de sine-Gordon, ecuación no lineal de Liouville). Basado en el enfoque exacto y la teoría de transformaciones de ecuaciones diferenciales parciales, reducimos ecuaciones del tipo Klein–Gordon a ecuaciones más simples de resolver o bien conocidas vía transformaciones puntuales y de contacto para obtener soluciones exactas. En general, si aplicamos métodos de álgebra computacional y modificamos parámetros de transformaciones y de ecuaciones del tipo Klein–Gordon, podemos generar una variedad de soluciones exactas y derivar relaciones entre soluciones.

## Referencias

[1] Debnath, L.: Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. 4th ed. Birkhäuser, Boston 2005

[2] Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F.: Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton 2011

[3] Scott, A. C., Chu, F. Y. F., and McLaughlin, D. W.: The Soliton: a New Concept in Applied Science. Proc. IEEE. 61, pp. 1443–1483, 1973

[4] Shingareva, I. and Lizárraga-Celaya, C.: Solving Nonlinear Partial Differential Equations with Maple and Mathematica. Springer, Wien–New York 2011