

La coherencia parcialmente dirigida y su uso en la caracterización de la conectividad funcional cerebral

David Gutiérrez

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Unidad Monterrey
d.gutierrez@cinvestav.mx

Resumen

La coherencia parcialmente dirigida (en Inglés "partial directed coherence." PDC) es una métrica en el dominio de la frecuencia a través de la cual se establece la dirección del flujo de información entre dos series de tiempo. En este artículo se muestra el uso de la PDC para determinar relaciones de conectividad funcional en datos de electroencefalografía (EEG) a fin de obtener información sobre los procesos cerebrales subyacentes. A manera de ejemplo, aquí se muestra un análisis preliminar de datos correspondientes a actividad cerebral en respuesta a estimulación estética, y se discuten las capacidades y dificultades presentadas en el análisis basado en la PDC.

Palabras Clave: Coherencia parcialmente dirigida; electroencefalograma; modelo autoregresivo; conectividad funcional cerebral.

DOI: 10.36788/sah.v9i1.159

Recibido: 09 de enero de 2025

Aceptado: 09 de junio de 2025

1. Introducción

Entendemos por *conectividad funcional cerebral* como el proceso a través del cual distintas regiones del cerebro interactúan para realizar distintos procesos [3]. Dicha interacción no es necesariamente producto de una conexión estructural específica entre las regiones involucradas, sino el resultado de un análisis de la correlación de las activaciones cerebrales localizadas en distintas regiones.

Gran parte de los avances que se han logrado en el entendimiento de la conectividad funcional ha sido resultado de estudios de resonancia magnética funcional [8]. Sin embargo, dicha tecnología impone una limitante importante en el tipo de actividad cerebral que puede analizarse. Y es que, para realizar estudios de resonancia magnética funcional, es necesario que las personas se mantengan quietas dentro del aparato durante todo el proceso de medición. Independientemente de ello, una vez que se han realizado las mediciones del evento de interés, el análisis de la conectividad funcional se hace en términos de la correlación entre activaciones cerebrales en distintas regiones espaciales. Así pues, los estudios de resonancia

magnética proporcionan información detallada a nivel espacial, pero limitada en términos de su resolución temporal.

Los recientes avances en términos de la tecnología de adquisición de actividad cerebral con sistemas de electroencefalografía (EEG) están permitiendo realizar experimentos mucho más elaborados de los que es posible realizar en equipos de resonancia magnética, además proporcionando una muy alta resolución temporal, aunque sacrificando la resolución espacial. Aún así, los estudios de conectividad funcional cerebral basados en EEG están permitiendo revelar información importante sobre eventos relacionados a la operación de interfaces cerebro-computadora [1], la fatiga durante el ejercicio [11], el aprendizaje [5], por citar algunos ejemplos en los que hemos trabajado recientemente. En todos ellos, las series de tiempo adquiridas a través del EEG son tratadas como procesos aleatorios cuya correlación está en función de si los procesos cerebrales subyacentes están o no en sincronía [10].

Distintas técnicas de análisis de series de tiempo han sido propuestas para describir las correlaciones entre señales que reflejan la actividad cerebral. En particular, el concepto de causalidad de Granger [4] es una herramienta fundamental para la descripción de las relaciones dinámicas direccionadas entre componentes de un proceso multivariable, y recientemente ha encontrado aplicación en el área de las neurociencias [6]. Este concepto probabilístico de causalidad está basado en la idea de sentido común de que la causa precede sus efectos en el tiempo, lo que se puede formular en términos de predictibilidad. Así, la causalidad de Granger es evaluada empíricamente mediante la aproximación por modelos autorregresivos.

Una métrica que se desprende de la causalidad de Granger para el dominio de la frecuencia es la coherencia parcialmente dirigida (en Inglés *partial directed coherence* o PDC). De igual manera, la PDC se ha ido popularizando como una herramienta de análisis de las interacciones funcionales en ritmos cerebrales específicos y en nuestro trabajo de investigación ha sido de gran utilidad para el análisis de la conectividad funcional cerebral. Es por ello que, en este artículo, se hace una breve revisión de la PDC y se presenta un ejemplo de análisis basado en esta métrica para datos de EEG asociados a estímulos estéticos.

2. Coherencia parcialmente dirigida

La PDC es presentada en [2] como una métrica en el dominio de la frecuencia para establecer relaciones de flujo direccionado de la información entre dos series de tiempo. Recientemente ha sido utilizada para establecer conectividad funcional cerebral mediante un riguroso análisis estadístico de la significancia de las correlaciones que la PDC es capaz de revelar [14].

2.1. Fundamentos teóricos

Modelo de mediciones electroencefalográficas

Consideremos que las señales de EEG se representan matemáticamente como series de tiempo $x_{m,k}(n)$ donde $m = 1, \dots, M$, corresponde al canal (sensor) de medición, $n =$

$1, \dots, N_k$ muestras en el tiempo, y $k = 1, \dots, K$ eventos independientes del fenómeno de interés. Entonces, para propósito de su representación matemática y posterior modelado, los datos de EEG se arreglan en matrices espacio-temporales X_k de tamaño $M \times N_k$, es decir:

$$X_k = \begin{bmatrix} x_{1,k}(1) & x_{1,k}(2) & \cdots & x_{1,k}(N_k) \\ x_{2,k}(1) & x_{2,k}(2) & \cdots & x_{2,k}(N_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{M,k}(1) & x_{M,k}(2) & \cdots & x_{M,k}(N_k) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

para cada evento independiente. Típicamente $N_k = N$, es decir, es un valor constante para todas las mediciones al que se denomina *época* y que establece una ventana de análisis común para todos los eventos.

Cálculo de la PDC

Ahora consideremos que las mediciones (1) pueden ser reacomodadas en la forma $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]^T$, donde los subíndices k se omiten por conveniencia notacional. Entonces, bajo la consideración de que las mediciones de EEG corresponden a procesos estocásticos ampliamente estacionarios, $\mathbf{x}(n)$ puede ser ajustado a un modelo autorregresivo multivariable tal que

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{p=1}^P A_p \mathbf{x}(n-p) + \mathbf{e}(n), \quad (2)$$

donde $A_p \in \mathbb{R}^{M \times M}$, para $p = 1, 2, \dots, P$, son las matrices que contienen los coeficientes $a_{m,p}$ del modelo autorregresivo de orden P , y $\mathbf{e}(n) = [e_1(n), e_2(n), \dots, e_M(n)]^T$, tal que $e_m(n)$ es una señal de ruido blanco (proceso de error no correlacionado) que se suma al m -ésimo canal.

Ahora bien, la *función total de transferencia* entre cada fuente de ruido y cada variable en el modelo puede obtenerse a través de la transformada z de (2):

$$\mathbf{X}(z) = \sum_{p=1}^P A_p \mathbf{X}(z) z^{-p} + \mathbf{E}(z). \quad (3)$$

Por lo tanto, la función total de transferencia $\mathbf{H}(z) = \mathbf{X}(z)/\mathbf{E}(z)$ está dada por

$$\mathbf{H}(z) = \left[I - \sum_{p=1}^P A_p \mathbf{X}(z) z^{-p} \right]^{-1} = \mathbf{A}(z)^{-1}, \quad (4)$$

donde I es una matriz identidad de tamaño $M \times M$. Nótese que 4 puede representarse en el dominio de la frecuencia de la siguiente manera:

$$\mathbf{H}(f) = \mathbf{H}(z)|_{z=e^{j2\pi f}} = \mathbf{A}(f)^{-1}. \quad (5)$$

Bajo estas condiciones, una métrica de las relaciones causales directas (conectividad direccional) de x_j a x_i , para $\{i, j\} \in \{1, 2, \dots, M\}$ está dada por la PDC y se define de la

siguiente manera:

$$\pi_{i \leftarrow j}(f) = \frac{A_{ij}(f)}{\sqrt{\mathbf{a}_j(f) \mathbf{a}_j^T(f)}}, \quad (6)$$

donde $A_{ij}(f)$ y $\mathbf{a}_j(f)$ son, respectivamente, los elementos i, j y la j -ésima columna de $\mathbf{A}(f)$. En la práctica, sólo la magnitud de (6) es considerada.

Significancia estadística

No basta con calcular la PDC para que ésta sea indicativa de conectividad funcional cerebral, sino que también hay que realizar un análisis de su significancia estadística, a fin de cerciorarse de que cierto valor de PDC pueda interpretarse como una *conectividad efectiva* y no un resultado azaroso. Entonces, bajo la hipótesis nula $H_0 : |A_{ij}(\omega)|^2 = 0$, para $\omega = 2\pi f$, la distribución asintótica de N muestras de

$$\frac{N}{C_{ij}(\omega)} |A_{ij}(\omega)|^2, \quad (7)$$

es un promedio ponderado de dos distribuciones independientes χ^2 con un grado de libertad, con $C_{ij}(\omega)$ dada por

$$C_{ij}(\omega) = \Sigma_{ii} \left[\sum_{p,l=1}^P F_{jj}(p,l) ((\cos(p\omega) \cos(l\omega) + \sin(p\omega) \sin(l\omega))) \right], \quad (8)$$

donde Σ_{ii} son los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza del ruido $\Sigma = E[\mathbf{e}(n) \mathbf{e}^T(n)]$, $F_{jj}(p,l)$ son los elementos de la diagonal de $F = R^{-1}$, con $R = E[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)]$ correspondiente a la matriz de covarianza de las mediciones. Los elementos de R están dados por

$$R_{ij}(p,l) = \text{cov}(x_i(n-p), x_j(n-l)), \text{ para } p, l = 1, 2, \dots, P, \quad (9)$$

donde $\text{cov}(\cdot)$ indica la covarianza.

Bajo esas condiciones, el valor crítico al que la magnitud de $\pi_{i \leftarrow j}(f)$ puede ser considerado como significativo a un nivel α está dado por [14]:

$$|\pi_{i \leftarrow j}(\omega)|_\alpha = \sqrt{\frac{C_{ij}(\omega) \chi_{1,1-\alpha}^2}{N (\mathbf{a}_j(\omega) \mathbf{a}_j^T(\omega))}}, \quad (10)$$

donde $\chi_{1,1-\alpha}^2$ es el $1 - \alpha$ cuantil de la distribución χ^2 con un grado de libertad. Entonces, $|\pi_{i \leftarrow j}(\omega)|$ es considerada como una conectividad efectiva si es mayor a (10).

3. Caso de estudio

A manera de ejemplo, en esta sección se detalla el proceso de análisis preliminar de la conectividad funcional cerebral obtenida de datos de EEG adquiridos en el Laboratorio de

Procesamiento de Señales Biomédicas del Cinvestav Unidad Monterrey. Los datos corresponden a la actividad cerebral de voluntarios que fueron expuestos a distintas imágenes de obras de arte (sesenta en total), todas ellas curadas para generar la sensación de melancolía.

3.1. Diseño experimental

En la Figura 1 se muestra la manera en que se adquirieron los datos de EEG usados en este artículo. Todos los voluntarios se sentaron cómodamente frente a la computadora y se les mostraron sesenta imágenes correspondientes a la exposición “Melancolía”, la cual se presentó en el Museo Nacional de Arte de la Ciudad de México en la primavera de 2017.



Figura 1: Adquisición de datos de EEG de una voluntaria mirando en la pantalla la imagen de una de las obras de arte de la exposición “Melancolía”.

La adquisición se realizó con un equipo de EEG Mobita de 32 canales y con una tasa de muestreo de 500 Hz. Los estímulos fueron sesenta imágenes, presentadas cada una por 10 segundos y con períodos de reposo de 3 segundos. El orden de las imágenes respetó los cuatro núcleos temáticos definidos por el curador de la exposición, Mtro. Abraham Villavicencio. El estudio contó con diez voluntarios (cinco mujeres y cinco hombres), todos ellos parte de los posgrados del Cinvestav Monterrey. Todos los voluntarios firmaron el consentimiento

informado y los experimentos se realizaron de manera ética acorde a lo establecido en la declaración de Helzinki para la realización de pruebas en humanos.

3.2. Análisis preliminar

Un análisis preliminar de la conectividad funcional cerebral de los datos descritos previamente se realizó calculando los valores de PDC para dos señales adquiridas en todas las combinaciones de los 32 canales tomados por pares. Eso, para el arreglo de EEG utilizado genera un total de 496 valores de PDC. Ahora, cada valor de PDC se calcula para cada voluntario, para cada imagen y para un ancho de banda en específico. Para el caso de este ejemplo particular se discuten los resultados del análisis correspondiente al ritmo cerebral alfa, el cual está en el rango de 9 a 13 Hz.

Todos los cálculos de la PDC se realizaron acorde a (6) utilizando la utilidad *asymptPDC*, la cual consiste en una colección de rutinas y funciones de MATLAB/Octave para el análisis de series de tiempo. AsympPDC se distribuye de manera libre en <https://github.com/asymppdc/asymptPDC/releases/tag/v3.0.1>. Su versión más reciente incluye la aproximación asintótica para el cálculo rápido de la PDC y la evaluación de su significancia estadística [12].

Bajo estas condiciones los valores de PDC fueron calculados en ventanas de tres segundos, las cuales se fueron moviendo por todo el intervalo de medición (visualización de una imagen) con una sobreposición de un segundo. Además, los valores de PDC fueron calculados para las frecuencias $f = 9, 10, 11, 12, 13$ Hz, y después fueron promediadas en todas esas ventanas y frecuencias para dejar una representación única dentro del rango del ritmo cerebral alfa. En todos los cálculos siempre se consideraron sólo aquellos valores de PDC que resultaron estadísticamente significativos acorde a (10) y para $\alpha = 0.05$.

Una vez obtenida la representación única de la conectividad funcional en términos de la PDC para el ritmo alfa, ésta se procedió a binarizarse haciendo cero todos aquellos valores de PDC por debajo de un umbral determinado y haciendo uno todos los que estuvieran por arriba de dicho umbral. Este proceso de binarización permite un análisis posterior a través de métricas de topologías de redes (ver, por ejemplo, [13]), en donde los canales de EEG son considerados como nodos de la red.

3.3. Resultados preliminares

El resultado del procedimiento previamente explicado se muestra para el caso de un sólo voluntario al ser expuesto a dos de las imágenes en las Figuras 2 y 3. Allí, las redes de conectividad están representadas por flechas que indican la dirección de la conexión funcional entre pares de canales (nodos de la red), cuyas posiciones corresponden a la distribución espacial de los sensores de EEG sobre el cuero cabelludo del voluntario y que mantienen el estándar internacional de colocación 10-10 [9].

El siguiente paso en el análisis de conectividad funcional sería el de relacionar los patrones de conectividad encontrados con los procesos fisiológicos asociados a la actividad cerebral subyacente. Dicho proceso requiere relacionar las zonas de activación [7] con funciones cerebrales

elementales previamente descritas. Dicho proceso está fuera del alcance de este trabajo (por lo cual se omite) dejando sólo constancia del proceso de análisis desde el cálculo matemático de la PDC hasta su representación como una conectividad efectiva.

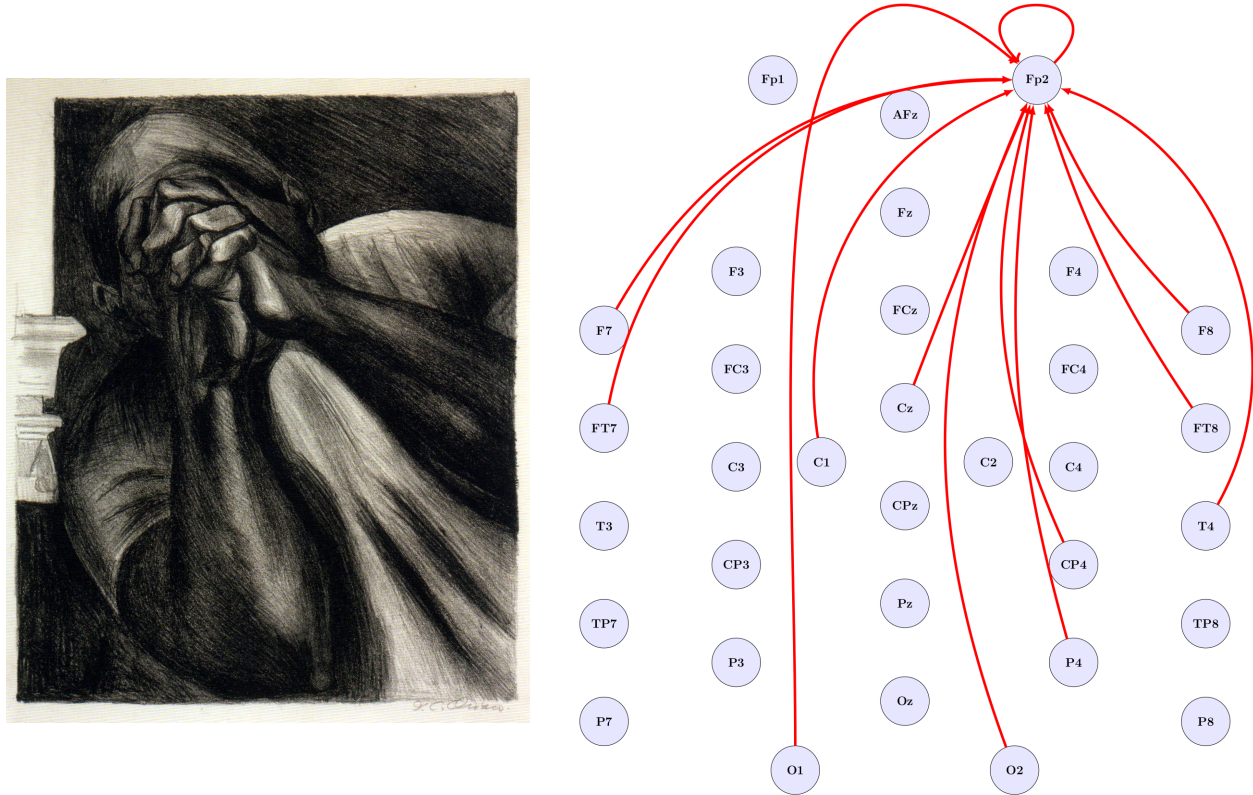


Figura 2: Imagen mostrada (izquierda) y red de conectividad funcional (derecha) obtenida para uno de los voluntarios para dicha imagen.

4. Conclusiones

La PDC es una métrica efectiva de la conectividad funcional cerebral, de fácil y rápido cálculo, y de un análisis relativamente simple. Sin embargo, obtener un panorama completo del fenómeno de interés resulta complicado debido a la necesidad de un análisis exhaustivo de los valores obtenidos de PDC.

En este artículo se ejemplificó un análisis preliminar que estuvo sujeto a varias reducciones: comenzando por la promediación en el dominio temporal y en el rango de un ritmo cerebral, la binarización de los resultados para obtener conectividades “representativas”, y su posterior visualización como grafos de conectividad efectiva. Todo ello, si bien genera una representación útil del fenómeno, no es más que una muestra estática de un proceso dinámico mucho más complejo.

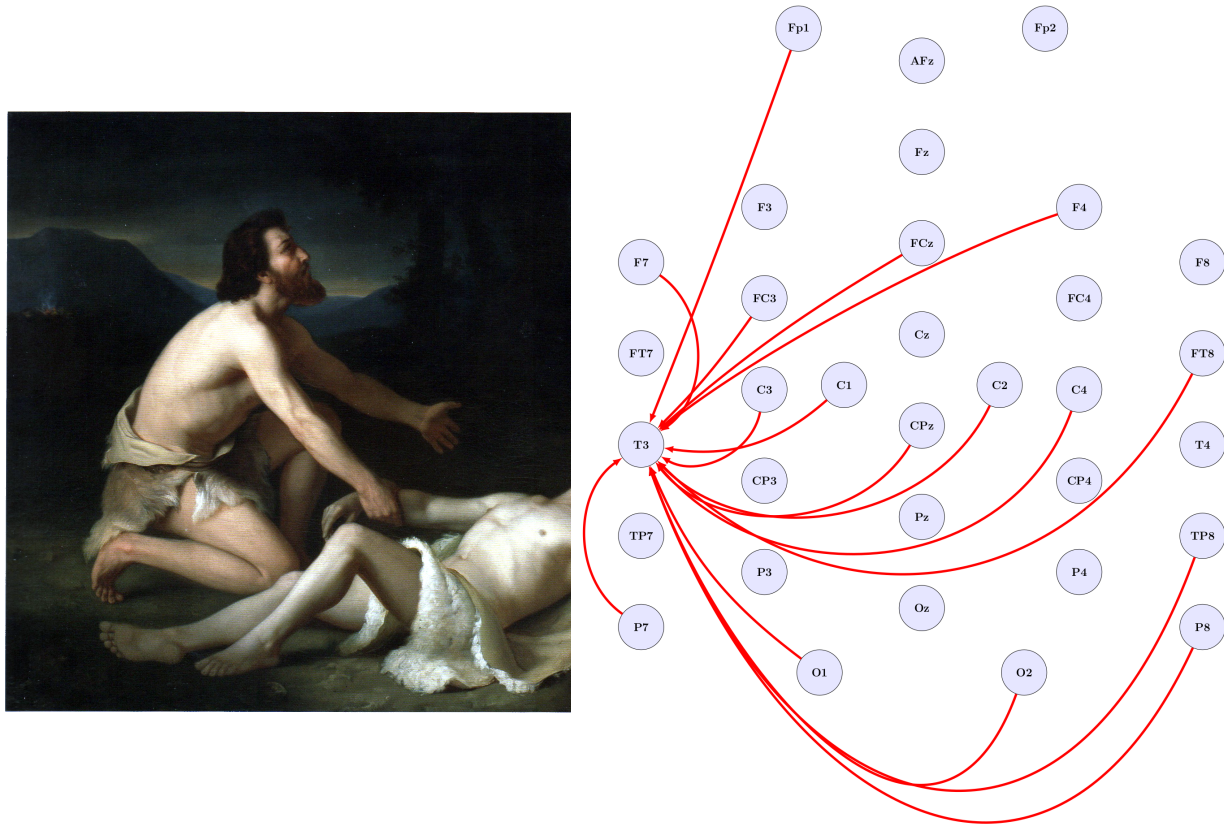


Figura 3: Imagen mostrada (arriba) y red de conectividad funcional (abajo) obtenida para uno de los voluntarios para dicha imagen.

Por ello, nuevas tendencias de análisis orientadas a la búsqueda de patrones de conectividad funcional cerebral están siendo probadas a través del uso de herramientas de inteligencia artificial. Bajo este nuevo paradigma, la PDC se convierte en un referente de gran importancia para la interpretación y entrenamiento de redes neuronales que sean capaces de auxiliar en la búsqueda de patrones asociados a regiones funcionales, que en nuestro ejemplo pudieran ser aquellas regiones cerebrales que trabajan de manera colaborativa para generar la sensación de melancolía.

Agradecimientos

Agradezco la colaboración del Maestro Abraham Villavicencio, curador de la exposición “Melancolía” presentada en el Museo Nacional de Arte, y que sirve como referencia para el estudio de respuesta cerebral a la estimulación estética.

Referencias

- [1] M. Alanis-Espinosa and D. Gutiérrez, "On the assessment of functional connectivity in an immersive brain-computer interface during motor imagery," *Frontiers in Psychology*, vol. 11, p. 1301, 2020. DOI: 10.3389/fpsyg.2020.01301
- [2] L. A. Baccalá and K. Sameshima, "Partial directed coherence: a new concept in neural structure determination," *Biological Cybernetics*, vol. 84, no. 6, pp. 463–474, 2001. DOI: 10.1007/PL00007990
- [3] K. J. Friston, "Functional and effective connectivity: a review," *Brain Connectivity*, vol. 1, no. 1, pp. 13–36, 2011. DOI: 10.1089/brain.2011.0008
- [4] C. Granger, "Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods," *Econometrica*, pp. 424–438, 1969. DOI: 10.2307/1912791
- [5] D. Gutiérrez, "Changes in functional brain connectivity of electroencephalography while learning to touch-type," DOI:10.21203/rs.3.rs-5799272/v1, 2025, preprint.
- [6] W. Hesse, E. Möller, M. Arnold, and B. Schack, "The use of time-variant EEG granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies," *Journal of Neuroscience Methods*, vol. 124, no. 1, pp. 27–44, 2003. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00366-7
- [7] L. Koessler, L. Maillard, A. Benhadid, J. P. Vignal, J. Felblinger, H. Vespignani, and M. Braun, "Automated cortical projection of EEG sensors: anatomical correlation via the international 10–10 system," *Neuroimage*, vol. 46, no. 1, pp. 64–72, 2009. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2009.02.006
- [8] K. Li, L. Guo, J. Nie, G. Li, and T. Liu, "Review of methods for functional brain connectivity detection using fmri," *Computerized Medical Imaging and Graphics*, vol. 33, no. 2, pp. 131–139, 2009. DOI: 10.1016/j.compmedimag.2008.10.011
- [9] M. R. Nuwer, "10-10 electrode system for EEG recording," *Clinical Neurophysiology*, vol. 129, no. 5, p. 1103, 2018. DOI: 10.1016/j.clinph.2018.01.065
- [10] G. Pfurtscheller and F. H. Lopes Da Silva, "Event-related EEG/MEG synchronization and desynchronization: basic principles," *Clinical Neurophysiology*, vol. 110, no. 11, pp. 1842–1857, 1999. DOI: 10.1016/S1388-2457(99)00141-8
- [11] K. A. Pichardo-Rivas and D. Gutiérrez, "On the functional connectivity between heart, muscle, and frontal brain cortex during exercise fatigability," *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, vol. 24, no. 7, pp. 710–720, 2021. DOI: 10.1080/10255842.2020.1849154
- [12] F. Rezaei, O. A. Alamoudi, S. Davani, and S. Hou, "Fast asymptotic algorithm for real-time causal connectivity analysis of multivariate systems and signals," *Signal Processing*, vol. 204, p. 108822, 2023. DOI: 10.1016/j.sigpro.2022.108822

- [13] M. Rubinov and O. Sporns, “Complex network measures of brain connectivity: uses and interpretations,” *Neuroimage*, vol. 52, no. 3, pp. 1059–1069, 2010. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2009.10.003
- [14] B. Schelter, M. Winterhalder, M. Eichler, M. Peifer, B. Hellwig, B. Guschlbauer, C. H. Lücking, R. Dahlhaus, and J. Timmer, “Testing for directed influences among neural signals using partial directed coherence,” *Journal of Neuroscience Methods*, vol. 152, no. 1-2, pp. 210–219, 2006. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2005.09.001

Como citar este artículo: D. Gutiérrez Ruiz, “La coherencia parcialmente dirigida y su uso en la caracterización de la conectividad funcional cerebral”, *SahuarUS. Revista Electrónica de Matemática*, vol. 9, no. 1, pp. 1–10, 2025.
<https://doi.org/10.36788/sah.v9i1.159>