

Aspectos analíticos y geométricos de un modelo epidemiológico con dinámica de población

Rey A. Salas-Vega¹ y Jaime Burgos-García^{2,*}

¹Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, Unidad Campo Redondo, Edificio A, 25020 Saltillo, Coahuila, México

²Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, Unidad Campo Redondo, Edificio A, 25020 Saltillo, Coahuila, México

¹rey.vega@uadec.edu.mx, ²jburgos@uadec.edu.mx

Resumen

En este trabajo consideramos un sistema de 4 ecuaciones diferenciales ordinarias, dependiente de 6 parámetros, que modela la propagación de una enfermedad infecciosa en una población que suponemos no constante ni en equilibrio, sino que aumenta en el tiempo bajo el modelo de Malthus lo que lleva a un sistema no lineal en 5 dimensiones. A través de un cambio de variable se puede considerar la población total como una cantidad conservada lo que nos permite reducir la dimensión del sistema. Posteriormente, calculamos y analizamos los puntos de equilibrio en términos de los varios parámetros del sistema y establecemos resultados analíticos para la estabilidad haciendo uso de la teoría clásica de polinomios de Hurwitz y teoría de perturbaciones. También implementamos el método de la parametrización para calcular órbitas heteroclínicas asociadas a los puntos de equilibrio haciendo uso de la información de la dinámica local obtenida previamente. Las variedades se parametrizan en términos de series de potencias donde se obtuvieron fórmulas cerradas para los coeficientes para todo orden, lo cual permite estudiar, en particular, la evolución y convergencia de las series en términos de los parámetros del sistema reducido.

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias; Puntos de equilibrio; Cálculo de variedades invariantes.

DOI: 10.36788/sah.v7i2.144

Recibido: 3 de octubre de 2023

Aceptado: 12 de diciembre de 2023

1. Introducción

La falta de comprensión de los mecanismos de propagación y evolución de las enfermedades infecciosas que han plagado a la humanidad fue una fuente recurrente de misticismo y superstición a lo largo de los siglos. Hubo que esperar hasta el siglo XVIII y los trabajos pioneros de Daniel Bernoulli para que se comenzara a estudiar el problema de manera científica, al menos desde el punto de vista de la modelación de la propagación en una determinada

* Autor de correspondencia

población. La reciente pandemia mundial de COVID 19 trajo como consecuencia una plétora de modelos, técnicas y trabajos que representan esfuerzos para obtener mejores herramientas para estudiar posibles escenarios de propagación de enfermedades, lo cual sigue siendo un problema, sobre todo, en países en vías de desarrollo. Esto lleva a seguir planteando preguntas como: ¿cuáles serían algunas cantidades óptimas de personas infectadas y susceptibles en una población para las cuales una enfermedad, en la que es inevitable que se propague, tienda a estabilizarse o extinguirse? ó ¿cuán rápido se puede volver a propagar una enfermedad que se creía erradicada o controlada si cesa la vacunación en una población? Desde un punto de vista de sistemas dinámicos deterministas, estas preguntas podrían ser abordadas estudiando las variedades estables e inestables de puntos de equilibrio u órbitas periódicas si, por ejemplo, los efectos de introducir infectados en una población se consideran como una perturbación de éstos últimos objetos. Con esto en mente, en este trabajo nos centramos en realizar un análisis exhaustivo de los puntos de equilibrio y su dinámica local en un sistema SEIRS (siglas para nombrar a los susceptibles, expuestos, infectados y recuperados en una población) para posteriormente, poder extender la información a dominios mayores. Remitimos al lector no experto en estos temas a las referencias [10] y [6] para encontrar buenas exposiciones acerca de objetos invariantes en sistemas no lineales; también consideramos que la referencia [5] es una lectura obligada para comenzar a familiarizarse con el modelado de la propagación de enfermedades infecciosas.

Como motivación adicional, se sabe que dentro del vasto número de modelos epidemiológicos basados en ecuaciones diferenciales, existen modelos donde la dinámica resulta tan diversa que se pueden encontrar bifurcaciones homoclínicas, bifurcaciones de Hopf o del tipo Bogdanov Takens. Se pueden consultar, por ejemplo, las referencias [11], [12], [17], [19], [3] para convencerse de la riqueza de escenarios posibles determinados por dichos modelos. Si bien es cierto que el análisis de un sistema dinámico *a lápiz y papel* ha descubierto maravillas a lo largo de la historia, esto resulta en extremo complicado cuando se trata de estudiar un sistema en dimensiones mayores. En consecuencia, el fusionar herramientas de análisis funcional, análisis numérico y ciencias computacionales produjo una nueva área de estudio denominada *rigorous numerics* que se han aplicado con éxito en diversas áreas como mecánica celeste, dinámica de fluidos, teoría de control, etc. El lector interesado en este tipo de aplicaciones puede consultar las referencias [7], [8], [9] y [1].

Dentro de los métodos del área de *rigorous numerics* existe un método general para aproximar variedades invariantes con orden arbitrario llamado el método de la parametrización, de ahora en adelante abreviado como MP. De manera general, este método se basa en dos ideas fundamentales, la primera es la idea de extender el flujo $\theta(t, \theta_0)$ de un modelo más simple, como el dado por la aproximación lineal, agregando términos de orden superior. La segunda idea es construir una ecuación funcional que pueda resolverse usando técnicas de análisis numérico. Hasta donde sabemos, la implementación de este método no se ha realizado en sistemas epidemiológicos pese a la complejidad de la dinámica de ciertos modelos como ya se mencionó. En consecuencia, creemos que este trabajo representa un primer paso para explorar el desempeño del MP en un sistema epidemiológico con varios parámetros, típicamente pequeños, para posteriormente estudiar otros modelos con variedades de dimensión mayor o igual que dos.

Este trabajo está organizado como sigue: en la siguiente sección consideramos el modelo SEIRS introducido en [16] para poblaciones en equilibrio y discutimos el efecto de extender este modelo agregando dinámica de población. En la sección 3 calculamos los puntos de equilibrio del sistema de manera explícita y analizamos su estabilidad considerando todos los parámetros del sistema. En el siguiente apartado 4 discutimos la implementación del MP y nos centramos en el caso de dimensión uno para poder visualizar de manera más sencilla el decaimiento de los coeficientes y la convergencia de las series que determinan las variedades conforme se modifican los parámetros del sistema. Finalmente, en la sección 5 resumimos los resultados y discutimos perspectivas de trabajo futuro.

2. El modelo SEIRS con dinámica de población

Comenzaremos nuestro estudio considerando el trabajo [16] en donde una población de N individuos donde se propaga una enfermedad infecciosa por contacto directo entre individuos y que en cada instante de tiempo la población está dividida en cuatro compartimentos: susceptibles (S), expuestos (E), infectados (I) y recuperados (R). Si se supone que la población está aislada porque no hay migración de individuos y la mortalidad y la natalidad está balanceada (nace la misma cantidad de individuos mueren), entonces tenemos que la igualdad $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$ se cumple siempre. Teniendo en cuenta enfermedades para las cuales los individuos recuperados pierden su inmunidad natural y se vuelven susceptible nuevamente, la evolución de cada grupo de individuos está dada por el conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N - \beta \frac{IS}{N} + \omega R - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \sigma E - \mu E, \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - \gamma I - (\mu + \alpha)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \omega R - \mu R,\end{aligned}\tag{1}$$

sujeta a las condiciones iniciales $S(0) = S_0 \geq 0$, $E(0) = E_0 \geq 0$, $I(0) = I_0 \geq 0$ y $R(0) = 0$. En este caso el sistema depende de los siguientes parámetros: β (tasa de contacto), σ (latencia de la enfermedad), γ (tasa de recuperación), ω (periodo medio de inmunidad), α (muerte por infección) y μ (tasa de natalidad y mortalidad por causas naturales). Cabe señalar que este modelo se concibió para poblaciones donde es válido suponer que las muertes y nacimientos están balanceados para todo tiempo lo cual limita su aplicación a situaciones más realistas. Una generalización natural de este modelo resulta al considerar diferentes tasas de mortalidad y natalidad, denotadas d and b respectivamente, en consecuencia, se debe considerar una dinámica de población que modele el comportamiento de la población $N(t)$. Una posible

elección de tal dinámica fue considerada en [14] y está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = (b - d)N - \alpha I. \quad (2)$$

Si se consideran las variables normalizadas $s := S/N$, $e := E/N$, $i := I/N$, $r := R/N$ entonces sus derivadas son una fácil aplicación de la regla del producto donde se considera la ecuación (2). Al sustituir las derivadas resultantes en las ecuaciones (1) y simplificando términos, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= b - s \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) - \beta is + \omega r - ds, \\ \frac{de}{dt} &= \beta is - e \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) - \sigma e - de, \\ \frac{di}{dt} &= \sigma e - i \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) - \gamma i - (d + \alpha)i, \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - r \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) - \omega r - dr, \end{aligned}$$

donde el término $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ se convierte en $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = b - d - \alpha i$. Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= b - (b - d)s + \alpha is - \beta is + \omega r - ds, \\ \frac{de}{dt} &= \beta is - (b - d)e + \alpha ie - \sigma e - de, \\ \frac{di}{dt} &= \sigma e - (b - d)i + \alpha i^2 - \gamma i - (d + \alpha)i, \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma i - (b - d)r + \alpha ir - \omega r - dr. \end{aligned} \quad (3)$$

En este caso, la relación $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t)$ se convierte en $s + e + i + r = 1$ lo cual nos permite prescindir de una variable, conocidas las tres restantes. Si sustituimos la igualdad $r = 1 - s - e - i$ en las primeras tres ecuaciones y simplificando (3) obtenemos el sistema reducido

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= A(1 - s) - \omega e - \omega i - (\alpha - \beta)is, \\ \frac{de}{dt} &= \beta is - Be + \alpha ie, \\ \frac{di}{dt} &= \sigma e - Ci + \alpha i^2, \end{aligned}$$

donde $A := b + \omega$, $B := b + \sigma$, $C := b + \gamma + \alpha$ son constantes positivas. Con una simple evaluación del campo vectorial sobre los planos $s = 0$, $e = 0$, $i = 0$, se puede verificar que el

campo vectorial se dirige hacia primer octante convirtiéndolo en un conjunto invariante, por lo que el sistema está bien definido. En consecuencia, el estudio de la dinámica del sistema puede reducirse al conjunto $\mathcal{D} := \{(s, e, i) \in \mathbb{R}^3, |s \geq 0, e \geq 0, i \geq 0, s + e + i \leq 1\}$.

Vale la pena mencionar que en otros trabajos como [15] o [14] los autores también introducen dinámica de población en otros modelos SEIRS que difieren del nuestro ya que consideran, respectivamente, factores de vacunación y factores de incidencia $\beta i^m s^n$ donde m y n son reales positivos, este último término se puede interpretar como una ponderación de la interacción de los susceptibles con los infectados. El estudio realizado en [14] muestra que el solo estudio de los puntos de equilibrio ya es un problema complejo. Por lo tanto, en aras de la simplicidad limitaremos nuestro estudio al caso $\alpha = 0$, es decir, estudiaremos el sistema

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= A(1 - s) - \omega e - \omega i - \beta is, \\ \frac{de}{dt} &= \beta is - Be, \\ \frac{di}{dt} &= \sigma e - Ci.\end{aligned}\tag{4}$$

3. Puntos de equilibrio y estabilidad

En esta sección proporcionaremos una descripción completa de la geometría local asociada a los puntos de equilibrio del sistema (4) para lo cual debemos estudiar la estabilidad de los mismos en términos de los parámetros del sistema. Dado que el sistema depende de varios parámetros, esta tarea no resulta trivial, no obstante, veremos que el estudio es posible usando la teoría de polinomios de Hurwitz y aritmética de series de potencias.

3.1. Los puntos de equilibrio del sistema

No es difícil verificar por simple sustitución que el campo vectorial del sistema (4) tiene al punto $(1, 0, 0)$ como un punto de equilibrio; como $e = i = 0$ en este caso, este punto será llamado *equilibrio libre de enfermedad* y será denotado como \bar{X}_{DFE} por sus siglas en inglés. Por otra parte, una cuidadosa inspección del mismo campo vectorial nos permite obtener otro punto de equilibrio llamado *equilibrio endémico*, denotado como \bar{X}_{EE} , cuyas coordenadas están dadas por la expresión

$$\bar{X}_{EE} = \left(\frac{BC}{\beta\sigma}, \frac{AC \left(1 - \frac{BC}{\beta\sigma}\right)}{C\omega + \omega\sigma + BC}, \frac{\sigma A \left(1 - \frac{BC}{\beta\sigma}\right)}{C\omega + \omega\sigma + BC} \right).$$

Si definimos el cociente $R_0 := \frac{\beta\sigma}{BC}$, entonces podemos escribir

$$\bar{X}_{EE} = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{AC \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)}{C\omega + \omega\sigma + BC}, \frac{\sigma A \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)}{C\omega + \omega\sigma + BC} \right),$$

lo cual nos permite verificar de manera más simple la existencia de una bifurcación entre los puntos \bar{X}_{EE} y \bar{X}_{DFE} cuando $R_0 = 1$. También podemos ver que cuando $R_0 < 1$ el punto \bar{X}_{EE} no se encuentra en \mathcal{D} . Por lo tanto, para nuestros fines solo consideraremos el caso cuando $R_0 \geq 1$.

Observaciones 1.

- De manera estricta, los puntos \bar{X}_{EE} y \bar{X}_{DFE} son puntos de equilibrio relativo, ya que estos puntos evolucionan junto con la solución exponencial de (2) en las variables originales (S, E, I, R) .
- El factor R_0 se puede escribir como

$$R_0 = \left(\frac{\sigma}{\sigma + b} \right) \left(\frac{\beta}{b + \gamma} \right) \quad (5)$$

el cual coincide con el número reproductivo básico del modelo original (1) cuando b es reemplazado con μ y $\alpha = 0$; vea la referencia [16].

3.2. Análisis local de los puntos de equilibrio

Un cálculo directo de la matriz de Jacobi del campo vectorial (4) evaluada en el punto \bar{X}_{DFE} nos muestra que se tiene la expresión

$$J(\bar{X}_{DFE}) = \begin{pmatrix} -A & -\omega & -\omega - \beta \\ 0 & -B & \beta \\ 0 & \sigma & -C \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico es un polinomio de grado tres que puede ser escrito como

$$\begin{aligned} P_{DFE}(\lambda) &= \lambda^3 + (A + B + C)\lambda^2 + (A(B + C) + BC - \beta\sigma)\lambda + A(BC - \beta\sigma) \\ &= \lambda^3 + (A + B + C)\lambda^2 + (A(B + C) + \beta\sigma(R_0^{-1} - 1))\lambda + A\beta\sigma(R_0^{-1} - 1). \end{aligned}$$

Como el polinomio depende de los parámetros del sistema, será conveniente definir los coeficientes $a_1 := A + B + C$, $a_2 := A(B + C) + \beta\sigma(R_0^{-1} - 1)$, $a_3 := A\beta\sigma(R_0^{-1} - 1)$. Aplicando el criterio de Routh y Hurwitz tenemos que el punto de equilibrio \bar{X}_{DFE} es asintóticamente estable dado que $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ y el producto $a_2a_1 = A\beta\sigma(R_0^{-1} - 1) + A^2(B + C) + (B + C)(A(B + C) + \beta\sigma(R_0^{-1} - 1))$ puede ser escrito como $a_2a_1 = a_3 + A^2(B + C) + (B + C)(A(B + C) + \beta\sigma(R_0^{-1} - 1))$ de donde se ve inmediatamente que $a_2a_1 > a_3$ siempre y cuando $R_0 < 1$. En el caso cuando $R_0 = 1$ el polinomio se simplifica y nos permite calcular las raíces del polinomio de manera exacta. Dichas raíces son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(B + C)$ y $\lambda_3 = -A$.

Cuando $R_0 > 1$, tenemos que se cumplen las desigualdades $a_1 > 0$ y $a_3 < 0$ y en consecuencia, por la regla de los signos de Descartes, existe al menos una raíz real positiva independientemente del signo de a_2 . Para determinar las posibles raíces negativas, consideremos el polinomio

$$P_{DFE}(-\lambda) = -\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3,$$

donde podemos notar que hay dos cambios de signo, y nuevamente, por la regla de los signos, existen dos raíces negativas o ninguna. No obstante, si observamos que el eje s es un conjunto invariante, entonces la dinámica restringida a este conjunto está determinada por la ecuación

$$\frac{ds}{dt} = A(1 - s), \quad s(0) = s_0,$$

cuya solución general es de la forma $s(t) = 1 - (1 - s_0)e^{-At}$. De esta observación, podemos concluir que $\lambda_1 = -A$ es un eigenvalor negativo asociado al vector propio $v_1 = (1, 0, 0)^T$. Por lo tanto, de la regla de los signos obtenemos que tenemos dos raíces negativas

En la siguiente sección usaremos la información geométrica discutida hasta ahora, por lo que conviene resumirla en la siguiente proposición. La prueba es una aplicación directa de álgebra elemental y lineal por lo que los detalles se pueden consultar en el apéndice 2

Proposición 2. *El punto de equilibrio \bar{X}_{DFE} tiene asociados dos valores propios negativos y un valor positivo para todos los valores de los parámetros. El sistema de vectores y valores propios están dados por las expresiones*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -A, & v_1 &= (1, 0, 0)^T, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(-(B + C) + \sqrt{D} \right), & v_2 &= \frac{1}{\sigma} \left(-\frac{\omega(\lambda_2 + C) + \sigma(\omega + \beta)}{A + \lambda_2}, \lambda_2 + C, \sigma \right)^T, \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2} \left(B + C + \sqrt{D} \right), & v_3 &= \frac{1}{\sigma} \left(-\frac{\omega(\lambda_3 + C) + \sigma(\omega + \beta)}{A + \lambda_3}, \lambda_3 + C, \sigma \right)^T, \end{aligned}$$

con $D := (B - C)^2 + 4\beta\sigma$. Más aún, existe una variedad inestable de dimensión uno contenida en \mathcal{D} y una variedad estable de dimensión 2 contenida en \mathcal{D}^c para $R_0 > 1$.

Ahora, para el punto \bar{X}_{EE} la matriz de Jacobi evaluada en ese punto se convierte en

$$J(\bar{X}_{EE}) = \begin{pmatrix} -A \left(1 + \frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) & -\omega & -\omega - \frac{\beta}{R_0} \\ A \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) & -B & \frac{\beta}{R_0} \\ 0 & \sigma & -C \end{pmatrix},$$

con $\Omega = (C\omega + \omega\sigma + BC)/BC$. A través de una manipulación algebraica es posible escribir el polinomio característico como sigue

$$\begin{aligned} P_{EE}(\lambda) &= \lambda^3 + \left[A \left(1 + \frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + B + C \right] \lambda^2 + A \left[B + C + \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) (B + C + \omega) \right] \lambda \\ &\quad + AC\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) (1 + B) := \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3, \end{aligned}$$

el cual nos permitirá establecer el siguiente teorema.

Teorema 3. *Si $\omega < 1$ y $R_0 > 1$ entonces $P_{EE}(\lambda)$ es un polinomio de Hurwitz. En consecuencia, las partes reales de sus raíces son negativas y hay al menos una raíz real negativa.*

Demostración. La existencia de al menos una raíz negativa es una consecuencia directa de la regla de los signos dado que todos los coeficientes de $P_{EE}(\lambda)$ son positivos y por lo tanto $P_{EE}(-\lambda)$ tiene tres cambios de signo.

Ahora procederemos a verificar que $P_{EE}(\lambda)$ es un polinomio de Hurwitz. Solo resta verificar la desigualdad $a_1 a_2 > a_3$. Después de un cálculo tedioso, pero necesario, cuyos detalles se pueden consultar en el apéndice 1, obtenemos que la condición $a_1 a_2 > a_3$ es equivalente a verificar que la desigualdad

$$\begin{aligned} & A^2 B + A^2 B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + AB^2 + ABC + A^2 C + A^2 C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC + AC^2 \\ & + A^2 B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2 B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AB^2 \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \\ & + A^2 C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2 C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AC^2 \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2 \omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \\ & + A^2 \omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AB\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) (1 - \omega) > 0, \end{aligned}$$

se satisface. Pero recordando que las cantidades A , B y C son positivas, $R_0 > 1$ y $(1 - \omega) > 0$, entonces, se concluye que $P_{EE}(\lambda)$ es un polinomio de Hurwitz. \square

El teorema anterior no nos proporciona información acerca de la naturaleza compleja o real de los valores propios. Sin embargo, en el siguiente resultado damos condiciones para las cuales los valores propios son negativos y al mismo tiempo podemos dar expresiones cuando R_0 es suficientemente mayor que uno. Debemos mencionar que, aunque el cálculo de los valores propios se puede realizar fácilmente con algún método numérico para un valor dado de R_0 , dicho enfoque suele ocultar, por así decirlo, relaciones importantes entre los coeficientes. Por si esto fuera poco, debemos mencionar que la construcción de las expresiones del siguiente corolario son un buen *calentamiento* para el lector no experto manipulando series de potencia lo cual será necesario en la siguiente sección. Nuevamente, para una mejor lectura del documento, dejamos los detalles de la demostración en el apéndice 3.

Corolario 4. Bajo las condiciones del teorema anterior, si $R_0 = 1 + \epsilon$ y $A - B - C \neq 0$, entonces los valores propios son negativos para ϵ suficientemente pequeño. De manera explícita, si

$$\lambda_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i \epsilon^n$$

es un valor propio para $i = 1, 2, 3$, entonces los primeros coeficientes están dados por las expresiones

$$a_0^1 = 0 \qquad a_0^2 = -A \qquad a_0^3 = -(B + C)$$

$$a_1^1 = -\frac{C\omega(1+B)}{\Omega(B+C)}$$

$$a_1^2 = -\Omega^{-1} \left(1 + \omega \left(\frac{C-A+BC}{A-B-C} \right) \right)$$

$$a_1^3 = \frac{A\omega}{\Omega} \left(\frac{B(1-C)}{(B+C)(A-B-C)} \right)$$

$$a_2^i = - \left(\frac{2Aa_0^i\Omega^{-1}a_1^i + A\Omega^{-1}(B+C+\omega)a_1^i + 3a_0^i(a_1^i)^2 + (A+B+C)(a_1^i)^2}{3(a_0^i)^2 + 2a_0^i(A+B+C) + A(B+C)} \right)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Observaciones 5.

- Vale la pena mencionar que la condición sobre el número reproductivo básico R_0 sea cercano a uno está relacionada con ciertas enfermedades como el caso de la influenza estacional, vea por ejemplo las referencias [13] y [4].
- La condición $A - B - C \neq 0$ es equivalente a pedir que $\omega \neq \sigma + \gamma + b$ la cual muestra que el cambio del punto de equilibrio endémico de un nodo estable a un nodo espiral estable no solo depende del valor de R_0 sino también del valor del parámetro ω .

El corolario (4) establece que es menos probable tener *olas de infección* para una enfermedad con R_0 cercano a uno, lo cual está acorde a un escenario real. Remitimos al lector nuevamente a las referencias [13] y [4] para más detalles. Es posible proporcionar una medida cualitativa acerca de la cantidad de raíces negativas si consideramos el discriminante del polinomio $P_{EE}(\lambda)$ definido como $D := Q^3 + R^2$, donde $Q = (3a_2 - a_1^2)/9$ y $R = (9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3)/54$. Por supuesto, los valores de los parámetros para los cuales los valores propios cambian de reales a imaginarios se determinan al resolver la ecuación $D = 0$. Sin embargo, para nuestros fines es más ilustrativo proporcionar regiones en el espacio de parámetros donde D cambia de valores positivos (lo que nos da dos valores propios complejos) a negativos (valores propios reales). En la figura 1 podemos observar dos vistas de la superficie $D(R_0, \omega)$ considerando valores fijos de los parámetros restantes. Observe que, en particular, conforme el valor del periodo medio de inmunidad (determinado por ω) cambia, para un valor fijo de R_0 , el valor de D tiende a ser positivo o negativo dependiendo de los valores de los parámetros restantes, sobre todo del valor del periodo medio de latencia σ . Esto puede verse de manera más fácil en la figura 2 donde se ofrecen perspectivas de la superficie $D(R_0, \omega)$ en los planos (D, ω) y (D, R_0) respectivamente.

4. Implementación del MP en el sistema SEIRS con dinámica de población

Comencemos por describir de manera general los aspectos más importantes detrás del método de la parametrización para variedades invariantes asociadas a un punto de equilibrio p de un campo vectorial $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Si Λ_s y Λ_u son matrices de dimensiones n_s

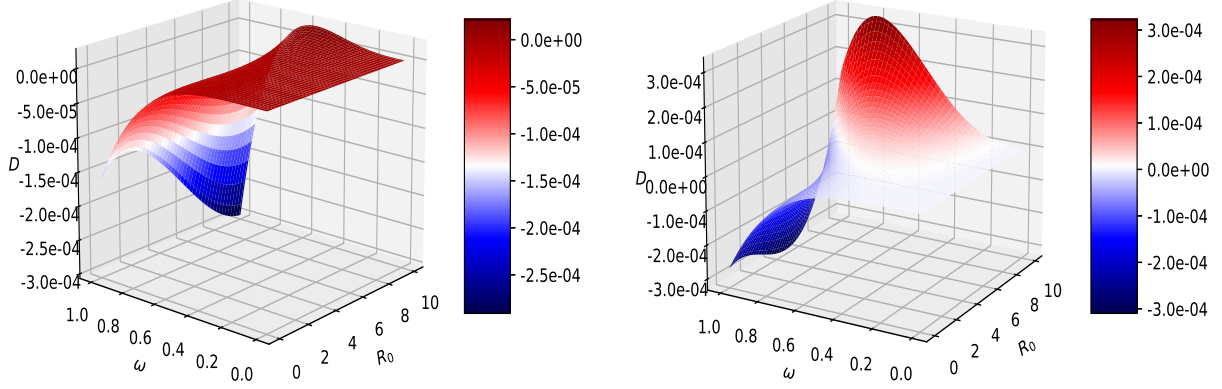


Figura 1: Superficies de D para $(\omega, R_0) \in [0, 1] \times [0, 10]$. Figura de la izquierda. Superficie para $\sigma = 1/14$, $\gamma = 1/14$ y $b = (16/100)/365$. Figura de la derecha. Superficie para $\sigma = 1/7$, $\gamma = 1/14$ y $b = (16/100)/365$. La escala de tiempo para los parametros está considerada en días. Valores tomados de [16]

y n_u , respectivamente, tales que Λ_s contienen los valores propios con parte real negativa y Λ_u contiene los valores propios con parte real positiva. Para el caso de la variedad local inestable (respectivamente para variedades locales estables), buscamos una parametrización $P_u : B_r(0) \subset \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^N$ (respectivamente $P_s : B_r(0) \subset \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^N$), con $B_r(0)$ la bola de radio r centrada en el origen de tal forma que $P_u(0) = p$ y $P_u(B_r(0)) = W_{loc}^u(p)$ (respectivamente $P_s(B_r(0)) = W_{loc}^s(p)$). Ambas parametrizaciones se buscan como series de potencias que se construyen de manera similar por lo que restringiremos la discusión para el caso de la variedad inestable. En el caso de la variedad inestable, buscamos una expresión de la forma

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(\theta), \quad (6)$$

donde cada $P^n(\theta)$ es un polinomio homogéneo de grado n en $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_u})$ variables para el cual $P^0(\theta) = p$ y $P^1(\theta) = (\theta_1, \dots, \theta_{n_u}) \cdot (\xi_1^u, \dots, \xi_{n_u}^u)$ donde cada ξ_i^u es el vector propio correspondiente a cada valor propio contenido en Λ_u para $i = 1, 2, \dots, n_u$. En otras palabras, los elementos $P^0(\theta)$ y $P^1(\theta)$ son conocidos a través de la linealización del campo vectorial. Más aún, el MP toma en cuenta la dinámica interna sobre la respectiva variedad la cual es descrita por un campo vectorial

$$\dot{\theta} = f(\theta), \quad \text{con } f(0) = 0, \quad \text{y } f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f^n(\theta),$$

donde $f^n(\theta)$ es un polinomio homogéneo en n_u variables. Dependiendo del problema bajo estudio, se puede escoger de manera distinta la dinámica interna del campo $f(\theta)$. Cuando no

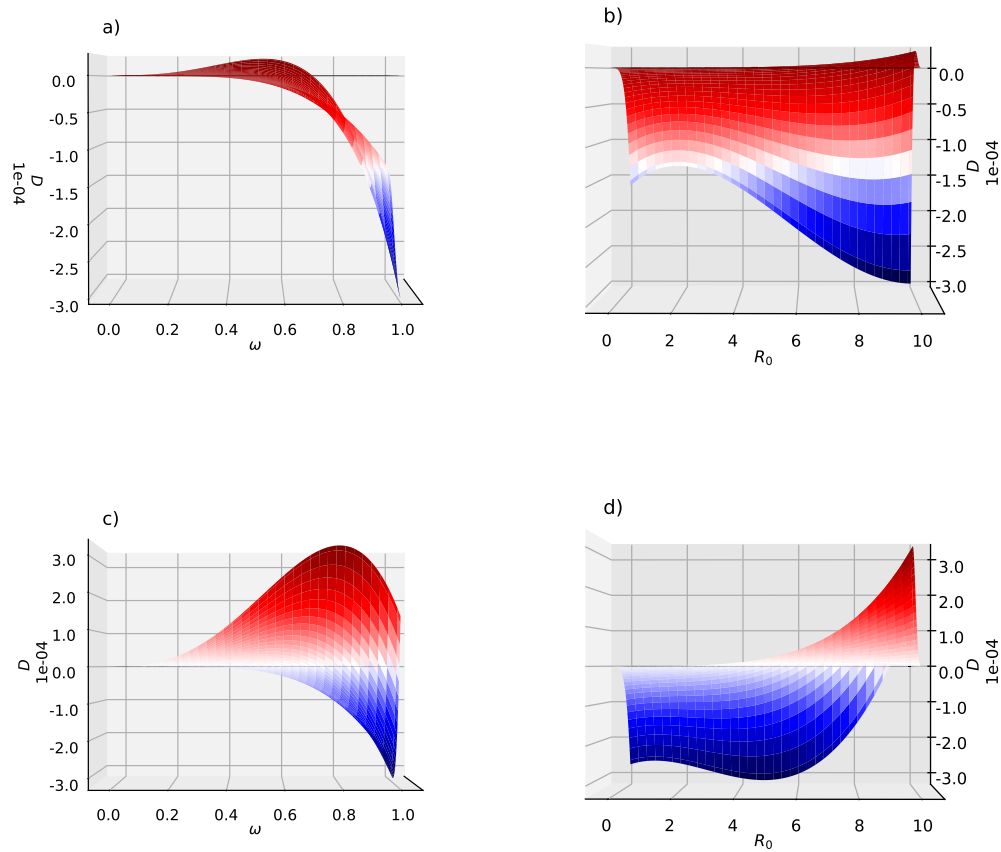


Figura 2: Paneles a) y b). Perspectivas en los planos (D, ω) y (D, R_0) para $\sigma = 1/14$, $\gamma = 1/14$ y $b = (16/100)/365$. Paneles c) y d). Perspectivas en los planos (D, ω) y (D, R_0) para $\sigma = 1/7$, $\gamma = 1/14$ y $b = (16/100)/365$.

hay resonancias entre los valores propios, la parametrización *estilo forma normal* es apropiada ya que nos permite desacoplar las llamadas *variedades rápidas y lentas* y la dinámica interna es determinada solamente por el campo vectorial lineal $f(\theta) = \Lambda_u \theta$ de donde podemos obtener completamente la dinámica para las variables locales θ . La dinámica de los términos de orden superior en la expresión (6) se obtienen resolviendo una ecuación funcional llamada la *ecuación de invarianza*

$$DP_u(\theta)\Lambda_u\theta = F(P_u(\theta)), \quad (7)$$

donde $DP_u(\theta)$ es la derivada de P_u . Ya que $P_u(\theta)$ está en forma de serie de potencias, la ecuación (7) nos permitirá realizar la clásica estrategia de igualar coeficientes y obtener fórmulas iterativas que pueden ser manipuladas y resueltas pero cuya complejidad depende del campo vectorial F .

Como ya mencionamos anteriormente, nos centraremos en la exploración de la variedad inestable de dimensión uno asociada al punto \bar{X}_{DFE} . Es decir, consideraremos una serie de potencias de la forma

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \theta^n, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad P_n = (p_n^1, p_n^2, p_n^3)^T, \quad (8)$$

donde $P_0 = \bar{X}_{DFE}$, $P_1 = v_2$. Como solo tenemos una variable θ entonces la derivación del lado izquierdo de la ecuación (7) es derivación ordinaria y en consecuencia se obtiene la expresión $\lambda_2 \theta \sum_{n=1}^{\infty} n P_n \theta^{n-1}$, donde no es difícil ver que es equivalente a $\sum_{n=0}^{\infty} n \lambda_2 P_n \theta^n$. Las cantidades λ_2 and v_2 están descritas en la proposición (2). Cabe mencionar que se ha hecho este cambio debido a que luego se deberá igualar coeficientes. La composición $f(P(\theta))$ puede ser manipulada de manera similar como en la prueba del corolario (4) considerando los productos (15). De esta manera, podemos igualar coeficientes con la misma potencia y agrupar los términos con índice n

$$\begin{pmatrix} n\lambda_2 + \beta p_0^3 + A & \omega & \omega + \beta p_0^1 \\ -\beta p_0^3 & n\lambda_2 + B & -\beta p_0^1 \\ 0 & -\sigma & n\lambda_2 + C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n^1 \\ p_n^2 \\ p_n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}^3 p_k^1 \\ \beta \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}^3 p_k^1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

o, de manera equivalente

$$(Df(P_0) - n\lambda_2 I_3) p_n = \beta s_{n-1} (1, -1, 0)^T$$

donde I_3 es la matriz identidad de dimensión 3 y $s_{n-1} := \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}^3 p_k^1$ para $n \geq 2$.

Observe que se ha construido un sistema lineal que puede ser resuelto para todo $n \geq 2$, ya que, recordando nuevamente la proposición (2), $n\lambda_2$ no es un valor propio del sistema. Dada la naturaleza del campo vectorial (4) y que $P_0 = (1, 0, 0)^T$, es posible resolver el sistema lineal de manera explícita y así obtener expresiones cerradas para los coeficientes de la serie en términos de todos los parámetros del sistema. De esta forma, se puede verificar que la solución de (9) está dada por la expresión

$$\begin{pmatrix} p_n^1 \\ p_n^2 \\ p_n^3 \end{pmatrix} = \beta s_{n-1} \begin{pmatrix} -\frac{n^2 \lambda_2^2 + n\lambda_2(B+C+\omega) + BC + C\omega + \sigma\omega}{(A+n\lambda_2)(n^2 \lambda_2^2 + n\lambda_2(B+C) + R_0^{-1})} \\ \frac{n\lambda_2 + C}{n^2 \lambda_2^2 + n\lambda_2(B+C) + R_0^{-1}} \\ \frac{\sigma}{n^2 \lambda_2^2 + n\lambda_2(B+C) + R_0^{-1}} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

n	p_n^1	p_n^2	p_n^3
0	$1.00000000 \times 10^{+00}$	$0.00000000 \times 10^{+00}$	$0.00000000 \times 10^{+00}$
1	$-9.39054422 \times 10^{-01}$	$2.49524982 \times 10^{-01}$	$2.36461574 \times 10^{-01}$
2	$8.98921822 \times 10^{+00}$	$-2.57476531 \times 10^{+00}$	$-2.33146787 \times 10^{+00}$
3	$-8.34152826 \times 10^{+01}$	$2.55484854 \times 10^{+01}$	$2.21493921 \times 10^{+01}$
4	$7.60881343 \times 10^{+02}$	$-2.47514403 \times 10^{+02}$	$-2.05821110 \times 10^{+02}$
5	$-6.86563117 \times 10^{+03}$	$2.35842932 \times 10^{+03}$	$1.88421269 \times 10^{+03}$
6	$6.14919383 \times 10^{+04}$	$-2.21954600 \times 10^{+04}$	$-1.70630969 \times 10^{+04}$

Tabla 1: Coeficientes (10) utilizando el vector propio normalizado $v_2/||v_2||$.

Desde luego, uno de los beneficios principales de obtener expresiones cerradas para los coeficientes es que se puede analizar los decaimientos de los coeficientes en términos de los parámetros del sistema. Por ejemplo, no es difícil realizar las siguientes observaciones

Observaciones 6.

- *Entre mayor sea el valor del parámetro β , mayor será la magnitud de los coeficientes de la serie.*
- *El decaimiento más rápido de los coeficientes sucede para la componente p_n^3 que corresponde a los infectados. Inclusive este decaimiento acelera para valores pequeños de σ .*
- *Conforme el valor de R_0 se incrementa, la distancia entre los puntos de equilibrio se incrementa y el efecto de R_0 tiende a tener menos impacto en el decaimiento de los coeficientes.*
- *El decaimiento de las coordenadas p_n^1 y p_n^2 es similar.*

El decaimiento de los coeficientes puede notarse de mejor manera si realizamos unas pruebas numéricas. Una primera elección obvia para p_1 es considerar el vector normalizado $v_2/||v_2||$ mencionado en la proposición (2); los términos de orden superior se pueden ver en la tabla (1) para $R_0 = 1.1$. Podemos observar que los coeficientes no decrecen, sino por el contrario, éstos aumentan conforme n aumenta.

No obstante, una de las ventajas operativas que tiene el MP es que podemos utilizar cualquier vector en el espacio propio, es decir, podemos cambiar la escala del vector propio sin que esto modifique el método. Por ejemplo, si dividimos cada coeficiente de v_2 por un factor de 30 y repetimos los cálculos, obtenemos los coeficientes de la tabla (2) donde se pueden observar los coeficientes hasta orden 20 los cuales esta vez decaen. Debemos mencionar que hemos detenido los cálculos a este orden debido a que los valores de los coeficientes se aproximan al valor épsilon de maquina en aritmética de doble precisión y no porque aumenten la complejidad de los cálculos conforme el orden avanza. En otras palabras, el grado de los polinomios solo está limitado por la aritmética de punto flotante que se utilice. En la referencia

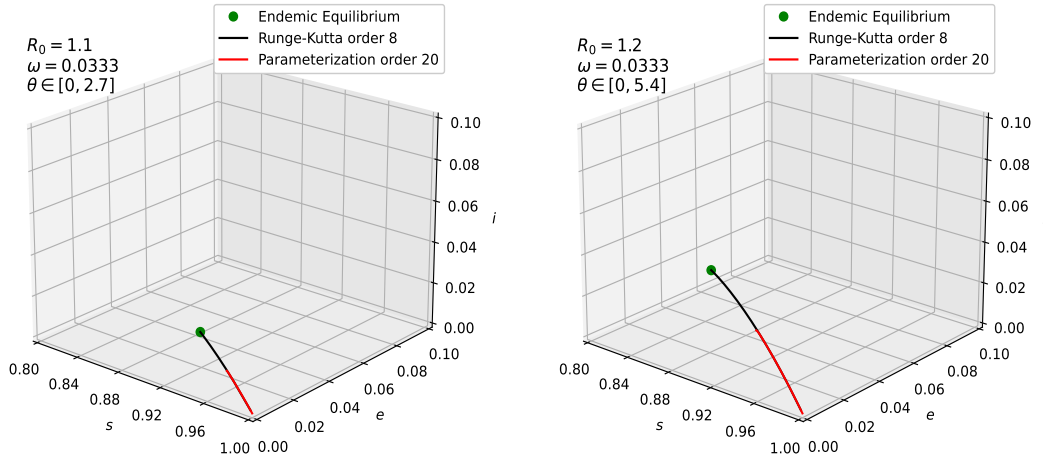


Figura 3: Variedad inestable de dimensión uno (en rojo) calculada con el MP de orden 20 y con valores de los parámetros: $\sigma = 1/14$, $\gamma = 1/14$ y $b = (16/100)/365$.

[1] el lector puede encontrar cálculos para las variedades del sistema de Lorenz donde se utiliza aritmética extendida y en consecuencia los órdenes utilizados rondan el valor 50.

En la figura 3 podemos ver el comportamiento geométrico de las variedades calculadas para valores $R_0 = 1.1$ y $R_0 = 1.2$ donde solo hay valores propios reales para el equilibrio endémico como fue predicho en el corolario (4). En la figura 4 se pueden visualizar las parametrizaciones para valores mayores de R_0 y con el mismo factor de escala para el vector propio. Es interesante notar que, debido a que la parametrización es de alto orden, ésta puede describir buena parte (que precisaremos más adelante) de las trayectorias heteroclínicas, las cuales se completaron con integración numérica. Si recordamos que los puntos de equilibrio tienden a alejarse conforme aumentamos el valor de R_0 entonces las respectivas trayectorias heteroclínicas son más extensas, no obstante, la parametrización parece no ser afectada por este hecho. Inclusive, se puede observar que el decaimiento de los coeficientes se acelera conforme R_0 crece.

En este punto es importante precisar lo que significa que la parametrización cubra buena parte de las trayectorias heteroclínicas. Recuerde que la parametrización se busca en forma de series de potencia lo que implica que tiene un radio de convergencia para su variable θ , dicho radio de convergencia determina el denominado *dominio fundamental* donde la parametrización aproxima una variedad con una tolerancia dada. Si bien es cierto que dicho radio de convergencia puede ser estimado analizando los coeficientes de las series, preferimos ofrecer una medida cualitativa del dominio fundamental considerando los valores máximos de θ donde la variedad comienza a *separarse* de la trayectoria heteroclínica aproximada numéricamente. De hecho, para variedades de dimensiones mayores esta estrategia de medir la máxima separación entre la parametrización y las trayectorias integradas numéricamente con un método de alto orden proporciona una medida del dominio fundamental. El lector interesado puede consultar el libro [1] para una discusión más detallada. Cabe mencionar

n	p_n^1	p_n^2	p_n^3
0	$1.00000000 \times 10^{+00}$	$0.00000000 \times 10^{+00}$	$0.00000000 \times 10^{+00}$
1	$-3.13018141 \times 10^{-02}$	$8.31749941 \times 10^{-03}$	$7.88205247 \times 10^{-03}$
2	$9.98802024 \times 10^{-03}$	$-2.86085034 \times 10^{-03}$	$-2.59051985 \times 10^{-03}$
3	$-3.08945491 \times 10^{-03}$	$9.46240200 \times 10^{-04}$	$8.20347856 \times 10^{-04}$
4	$9.39359683 \times 10^{-04}$	$-3.05573337 \times 10^{-04}$	$-2.54100136 \times 10^{-04}$
5	$-2.82536262 \times 10^{-04}$	$9.70547043 \times 10^{-05}$	$7.75396170 \times 10^{-05}$
6	$8.43510813 \times 10^{-05}$	$-3.04464472 \times 10^{-05}$	$-2.34061687 \times 10^{-05}$
7	$-2.50477662 \times 10^{-05}$	$9.45907835 \times 10^{-06}$	$7.00726609 \times 10^{-06}$
8	$7.40763686 \times 10^{-06}$	$-2.91581208 \times 10^{-06}$	$-2.08420555 \times 10^{-06}$
9	$-2.18377904 \times 10^{-06}$	$8.93000372 \times 10^{-07}$	$6.16665065 \times 10^{-07}$
10	$6.42137312 \times 10^{-07}$	$-2.71996238 \times 10^{-07}$	$-1.81667412 \times 10^{-07}$
11	$-1.88423530 \times 10^{-07}$	$8.24578491 \times 10^{-08}$	$5.33248978 \times 10^{-08}$
12	$5.51922713 \times 10^{-08}$	$-2.48958734 \times 10^{-08}$	$-1.56044166 \times 10^{-08}$
13	$-1.61424871 \times 10^{-08}$	$7.48972618 \times 10^{-09}$	$4.55428189 \times 10^{-09}$
14	$4.71519876 \times 10^{-09}$	$-2.24608389 \times 10^{-09}$	$-1.32617603 \times 10^{-09}$
15	$-1.37574241 \times 10^{-09}$	$6.71670045 \times 10^{-10}$	$3.85405315 \times 10^{-10}$
16	$4.00994548 \times 10^{-10}$	$-2.00346240 \times 10^{-10}$	$-1.11808394 \times 10^{-10}$
17	$-1.16775149 \times 10^{-10}$	$5.96222439 \times 10^{-11}$	$3.23861518 \times 10^{-11}$
18	$3.39790706 \times 10^{-11}$	$-1.77063516 \times 10^{-11}$	$-9.36800400 \times 10^{-12}$
19	$-9.87993201 \times 10^{-12}$	$5.24835262 \times 10^{-12}$	$2.70645756 \times 10^{-12}$
20	$2.87081497 \times 10^{-12}$	$-1.55295724 \times 10^{-12}$	$-7.81045888 \times 10^{-13}$

Tabla 2: Coeficientes (10) utilizando un vector propio escalado.

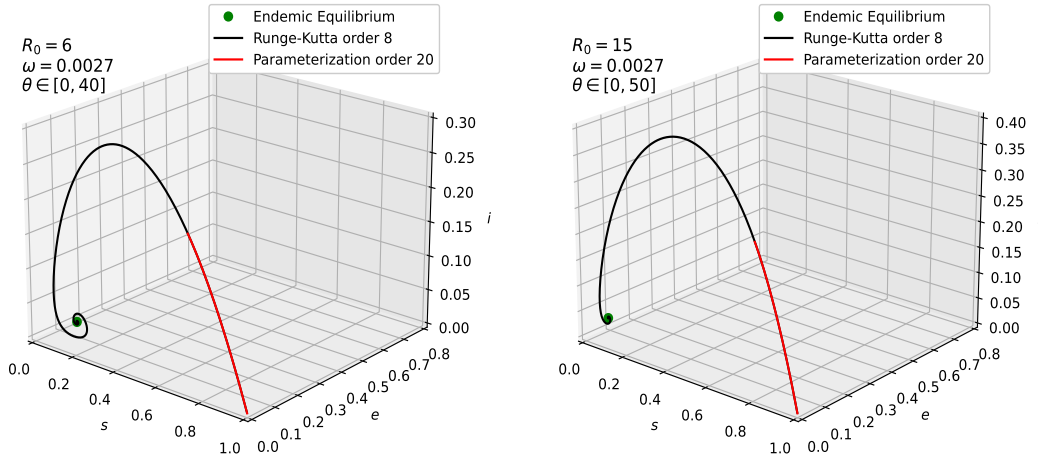


Figura 4: Variedad inestable de dimensión uno (en rojo) calculada con el PM de orden 20 y con valores de los parámetros: $\sigma = 1/14$, $\gamma = 1/14$, and $b = (16/100)/365$.

que en [18] se realizaron implementaciones detalladas del MP en los modelos SIR clásicos que son más sencillos pero, no menos importantes. En la figura 5 mostramos algunas separaciones entre las parametrizaciones y trayectorias numéricas lo cual proporciona una medida cualitativa del radio de convergencia de las series.

5. Conclusiones y perspectivas

Hemos extendido un modelo SEIRS al introducir dinámica de población para considerar escenarios donde los nacimientos y muertes no están en equilibrio. Se realizó un estudio exhaustivo de la estabilidad de los puntos de equilibrio para todos los valores admisibles de los parámetros del sistema y se describió a detalle la geometría local de dichos puntos. Con este análisis demostramos de manera rigurosa que el punto de equilibrio \bar{X}_{DFE} es inestable para todos los valores de los parámetros que satisfagan $R_0 > 1$; además usando el resultado que afirma que el espacio inestable del punto \bar{X}_{DFE} está contenido en la región de interés \mathcal{D} más el resultado que establece que el punto \bar{X}_{EE} es asintóticamente estable para éstos valores de R_0 , tenemos garantizada la existencia de órbitas heteroclínicas que hemos explorado de manera local implementando el MP obteniendo expresiones explícitas para las series de potencias que las describen.

Los estimados cuantitativos y cualitativos acerca de la estabilidad del punto de equilibrio \bar{X}_{EE} proveen regiones para el espacio de parámetros para los cuales aparecen las llamadas *olas de infección* de una enfermedad, como las que estamos experimentando actualmente con la propagación de COVID 19. La obtención de expresiones explícitas para las órbitas heteroclínicas locales podrían ser usadas para el estimado de los parámetros del sistema al considerar datos observados para una enfermedad y técnicas clásicas de estimación de

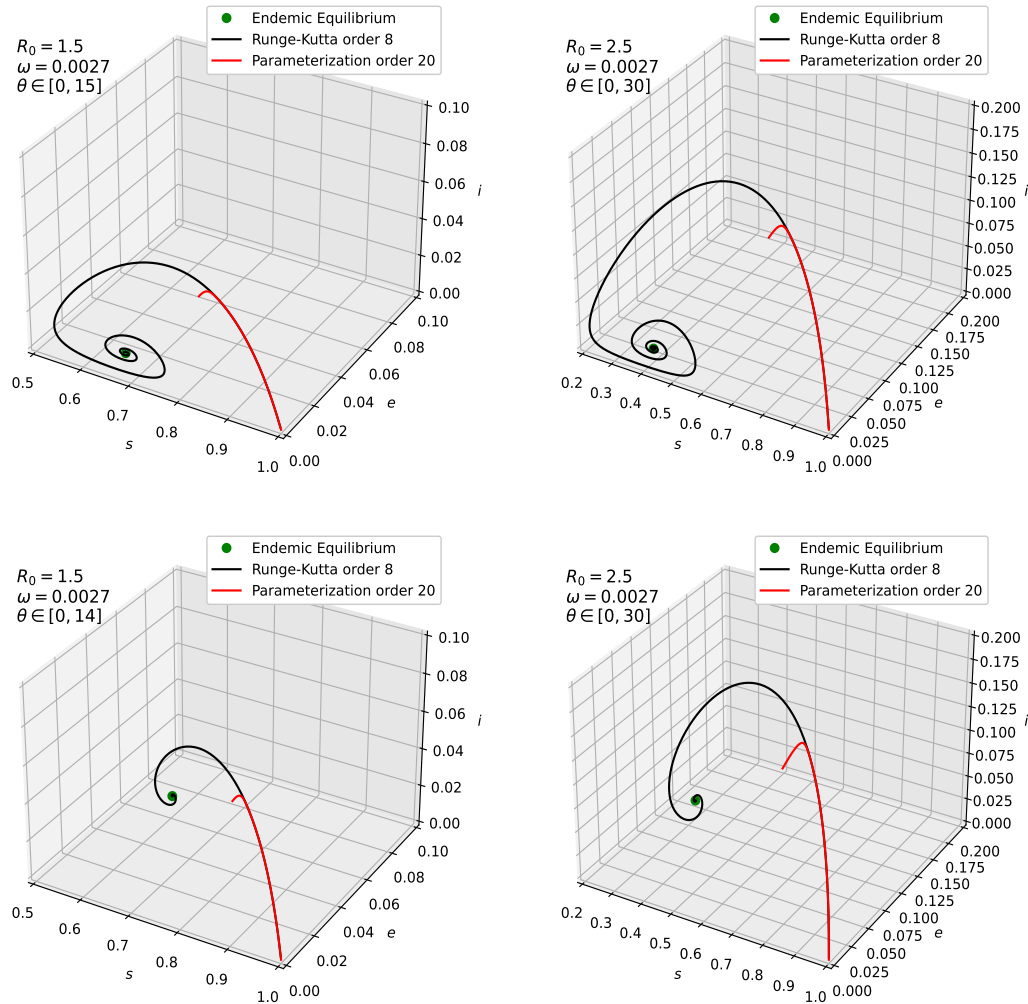


Figura 5: Variedades inestables de dimensión uno (en rojo) calculada con el MP de orden 20 con valores de los parámetros: $\sigma = 1/7$, $\gamma = 1/14$ y $b = (16/100)/365$.



parámetros como mínimos cuadrados o máxima verosimilitud. Creemos que esta motivación práctica junto con la importancia que tienen las variedades invariantes para *separar* las regiones en el espacio fase hacen que implementar el MP en sistemas epidemiológicos con dinámica más complicada sea un siguiente paso que vale la pena dar.

Agradecimientos

Agradecemos al doctor Victor Breña-Medina y a los revisores anónimos por sus valiosos comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo. También deseamos agradecer al doctor Pedro Reyes-Pérez por su hospitalidad en la UAM-I donde este trabajo comenzó. Este trabajo fue posible gracias al apoyo del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) y la Coordinación de la Unidad Saltillo (CUS) de la Universidad Autónoma de Coahuila.

1. Detalles algebraicos de la prueba del teorema 3

En la prueba del teorema (3) necesitamos verificar la condición $a_1 a_2 > a_3$, o equivalentemente, necesitamos verificar la desigualdad

$$A \left[B + C + \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) (B + C + \omega) \right] \left[A \left(1 + \frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + B + C \right] > AC\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) (1 + B). \quad (11)$$

Si, por el contrario, suponemos que la desigualdad no se cumple, entonces, expandiendo el lado izquierdo de (11), nos lleva a considerar la desigualdad

$$\begin{aligned} & A^2 B + A^2 B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + AB^2 + ABC + A^2 C + A^2 C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC + AC^2 \\ & + A^2 B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2 B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AB^2 \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \\ & + A^2 C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2 C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + ABC \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + AC^2 \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \\ & + A^2 \omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2 \omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AB\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + AC\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \leq \\ & AC\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) (1 + B), \end{aligned}$$

si ponemos todos los términos de (11) en el lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned}
& A^2B + A^2B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + AB^2 + ABC + A^2C + A^2C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC + AC^2 \\
& + A^2B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AB^2 \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \\
& + A^2C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AC^2 \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \\
& + A^2\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AB\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) - ABC\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Asociando términos de manera conveniente, obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}
& A^2B + A^2B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + AB^2 + ABC + A^2C + A^2C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC + AC^2 \\
& + A^2B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2B \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AB^2 \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \\
& + A^2C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2C \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AC^2 \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + A^2\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) \\
& + A^2\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right)^2 + AB\omega \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) + ABC \left(\frac{R_0 - 1}{\Omega} \right) (1 - \omega) \leq 0,
\end{aligned}$$

Como todos los parámetros son no negativos tenemos que A , B and C son cantidades positivas; y también $R_0 > 1$ y $(1 - \omega) > 0$ por hipótesis, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $a_1a_2 > a_3$ se debe cumplir.

2. Prueba de la proposición 2

Recordemos que $\lambda_1 = -A$ es un valor propio, entonces, por medio de una división de polinomios obtenemos la factorización

$$P_{DFE}(\lambda) = (\lambda + A) (\lambda^2 + (B + C)\lambda + \beta\sigma(R_0^{-1} - 1)),$$

y usando la relación $BC - \beta\sigma = \beta\sigma(R_0^{-1} - 1)$ obtenemos que la raíces restantes son

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(-(B + C) + \sqrt{D} \right) \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} \left(B + C + \sqrt{D} \right).$$

Desde luego, $\lambda_3 < 0$ lo que lleva a que λ_2 sea positiva por la regla de los signos de Descartes. Los vectores propios asociados con λ_2 se obtienen al resolver el sistema

$$(J(1, 0, 0) - \lambda_2 I_3) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ y $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$. Un cálculo directo nos muestra que, en particular, debemos resolver el subsistema

$$\begin{aligned} -(B + \lambda_2)x_2 + \beta x_3 &= 0, \\ \sigma x_2 - (C + \lambda_2)x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

cuyo determinante es cero y en consecuencia tiene infinitas soluciones dadas por las expresiones

$$x_3 = \alpha, \quad x_2 = \frac{1}{\sigma}(C + \lambda_2)\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

La componente x_1 se obtiene al resolver la ecuación $-(A + \lambda_2)x_1 - \omega x_2 - (\omega + \beta)x_3 = 0$. Como $\lambda_2 > 0$ y considerando $\alpha > 0$, tenemos que la segunda y tercera componentes de v_2 son positivas y en consecuencia el vector apunta hacia la región \mathcal{D} . Por otro lado, una manipulación análoga muestra que para el vector propio λ_3 obtenemos un subsistema similar a (12). En consecuencia, trabajando con la segunda ecuación de (12) tenemos que si $\lambda_3 + C \geq 0$ entonces $C - B \geq \sqrt{D}$ lo que conduce a la desigualdad $(C - B)^2 \geq D$ la que su vez implica que $0 \geq 4\beta\sigma$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\lambda_3 + C < 0$ y así la componente x_3 de v_3 apunta hacia el eje e negativo. Recordando que $v_1 = (1, 0, 0)^T$ nos lleva a concluir que el subespacio generado por v_1 y v_3 está contenido en \mathcal{D}^c .

3. Prueba de corolario 4

Definamos el polinomio $P_{EE}(\lambda, \epsilon)$ como una forma perturbativa de $P_{EE}(\lambda)$ dada por la expresión

$$P_{EE}(\lambda, \epsilon) = \lambda^3 + \left(A + B + C + \frac{A}{\Omega}\epsilon\right)\lambda^2 + A\left(B + C + \frac{(B + C + \omega)}{\Omega}\epsilon\right)\lambda + \frac{AC\omega(1 + B)}{\Omega}\epsilon. \quad (13)$$

Es fácil verificar que las raíces para $\epsilon = 0$ son

$$\lambda_0^1 = 0, \quad \lambda_0^2 = -A, \quad \text{and} \quad \lambda_0^3 = -(B + C).$$

Como λ_0^2 y λ_0^3 son negativos, por el teorema de la función implícita será suficiente mostrar que dichas raíces no son puntos críticos del polinomio. Un cálculo directo muestra que las derivadas evaluadas en cada raíz son de la forma

$$P'_{EE}(\lambda_0^2, 0) = A(A - B - C), \quad P'_{EE}(\lambda_0^3, 0) = -(B + C)(A - B - C),$$

que son diferentes de cero por hipótesis. El siguiente paso es calcular los primeros coeficientes de las series para cada λ_i . Para esto, debemos considerar expresiones de la forma

$$\lambda_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i \epsilon^n, \quad \lambda_i^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^i \epsilon^n, \quad \lambda_i^3 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^i \epsilon^n, \quad (14)$$

con $i = 1, 2, 3$. La parte crucial, desde el punto de vista operativo, es calcular los coeficientes b_n y c_n de manera efectiva a todo orden. Para esto, consideramos el producto de Cauchy para series infinitas. En consecuencia,

$$b_n^i := \sum_{k=0}^n a_{n-k}^i a_k^i, \quad c_n^i := \sum_{k=0}^n a_{n-k}^i b_k^i, \quad (15)$$

donde los primeros coeficientes son: $b_0^i = (a_0^i)^2$, $c_0^i = (a_0^i)^3$, $b_1^i = 2a_1^i a_0^i$ y $c_1^i = a_1^i (b_0^i + 2(a_0^i)^2)$. Sustituyendo las expresiones (14) en (13) e igualando potencias obtenemos para $n = 1$

$$c_1^i + (A + B + C)b_1^i + a_1^i A(B + C) = -\frac{A}{\Omega} (b_0^i + (B + C + \omega)a_0^i + C\omega(1 + B)). \quad (16)$$

Sustituyendo los primeros términos de (15) en esta igualdad nos permite obtener una expresión general para a_1^i

$$a_1^i = -\frac{A}{\Omega} \left(\frac{(a_0^i)^2 + (B + C + \omega)a_0^i + C\omega(1 + B)}{3(a_0^i)^2 + 2a_0^i(A + B + C) + A(B + C)} \right),$$

de donde se puede obtener fácilmente las expresiones que menciona el corolario para cada a_1^i . Ahora, para $n \geq 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^i + (A + B + C)b_n^i + b_{n-1}^i \frac{A}{\Omega} + a_n^i A(B + C) + \frac{A(B + C + \omega)}{\Omega} a_{n-1}^i \right) \epsilon^n = 0. \quad (17)$$

Poniendo los términos con índice n a la izquierda, y los términos con índice $n - 1$ a la derecha, obtenemos la siguiente expresión

$$a_n^i = -\frac{2A\Omega^{-1}a_0^i a_1^i + A\Omega^{-1}(B + C + \omega)a_1^i + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}^i (b_k^i + a_0^i a_k^i) + (A + B + C) \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}^i a_k^i}{3(a_0^i)^2 + 2a_0^i(A + B + C) + A(B + C)},$$

la cual puede ser simplificada para $n = 2$ y obtener

$$a_2^i = -\left(\frac{2Aa_0^i \Omega^{-1} a_1^i + A\Omega^{-1}(B + C + \omega)a_1^i + 3a_0^i (a_1^i)^2 + (A + B + C)(a_1^i)^2}{3(a_0^i)^2 + 2a_0^i(A + B + C) + A(B + C)} \right).$$

De estas expresiones tenemos que a_1^1 y a_2^1 son negativos. Por lo tanto, λ_1 es negativo para ϵ suficientemente pequeño.

Referencias

- [1] Á. Haro, M. Canadell, J.-Ll. Figueras, A. Luque, J. M. Mondelo, *The Parametrization Method for Invariant Manifolds. From Rigorous Results to Effective Computations*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2016.
- [2] B. Krauskopf, H. M. Osinga, E. J. Doedel, M. E. Henderson, J. Guckenheimer, A. Vladimírsky, M. Dellnitz, and O. Junge, "A survey of methods for computing (un)stable manifolds of vector fields," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 15, no. 03, pp. 763-791, 2005.
- [3] E. Villar-Sepúlveda, P. Aguirre, and V. Breña-Medina, "A case study of multiple wave solutions in a reaction-diffusion system using invariant manifolds and global bifurcations," To appear in *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. <https://arxiv.org/pdf/2008.05628v4.pdf>
- [4] G. Chowell, M. Miller and C. Viboud, "Seasonal influenza in the United States, France, and Australia: Transmission and prospects for control," *Epidemiology and Infection*, vol. 136, no. 6, pp. 852-864, June 2008 . DOI:10.1017/S0950268807009144.
- [5] H.W. Hethcote, "The Mathematics of Infectious Diseases," *SIAM Review*, vol. 42, no. 4, pp. 599-653, 2000.
- [6] J. Guckenheimer, and P. Holmes. Differential Equations and Dynamical Systems, *Texts in Applied Mathematics*. Springer New York, NY, 2001.
- [7] J. Burgos-García, A. Bengochea, and L. Franco-Pérez., "The spatial Hill four-body problem I. An exploration of basic invariant sets," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 108, 106264, 2022.
- [8] J. Burgos-García, J.P. Lessard, and J.D. Mireles James, "Spatial periodic orbits in the equilateral circular restricted four-body problem: computer-assisted proofs of existence," *Celest Mech Dyn Astr.*, vol.131, no. 2, 2019.
- [9] J.B. Van der Berg, and J.P. Lessard, "Rigorous Numerics in Dynamics," in *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. American Mathematical Society, vol. 74, 2016.
- [10] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2001.
- [11] L. Wu, and F. Zhilan, "Homoclinic Bifurcation in an SIQR Model for Childhood Diseases," *Journal of Differential Equations*, vol.168, pp. 150-167, 2000.
- [12] M. Erdem, S. Muntaser, and C. Castillo-Chavez, "Mathematical Analysis of an SIQR Influenza Model with Imperfect Quarantine," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 79, pp. 1612-1636, 2017.

-
- [13] M. Biggerstaff, S. Cauchemez, C. Reed, M. Gambhir, and L. Finelli, “Estimates of the reproduction number for seasonal, pandemic, and zoonotic influenza: a systematic review of the literature,” *BMC Infect Dis*, vol. 14, 480, 2014.
- [14] M.P. Markakis, and P.S. Douris, “Hopf Bifurcation Analysis of a New SEIRS Epidemic model with Nonlinear Incidence Rate and Nonpermanent Immunity,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2018, Article ID 1467235, 13 pages, 2018.
- [15] M.B. Trawicki, “Deterministic Seirs Epidemic Model for Modeling Vital Dynamics, Vaccinations, and Temporary Immunity,” *Mathematics*, vol. 5, no. 1, 2017.
- [16] O.N. Bjørnstad, K. Shea, M. Krzywinski, and N. Altman, “The SEIRS model for infectious disease dynamics,” *Nat methods*, vol. 17, pp. 557-558, 2020.
- [17] P.S. Douris, and M.P. Markakis, “Global Connecting Orbits of a SEIRS Epidemic model with Nonlinear Incidence Rate and Nonpermanent Immunity,” *Engineering Letters*, vol. 27, no. 4, pp. 1-10, 2019.
- [18] R.A. Salas-Vega, “Aspectos analíticos y geométricos de modelos epidemiológicos con dinámica de población”. Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. UAdeC. Saltillo, Coah. México, abril 2023. <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.10224.02564>
- [19] Z. Xiaoguang, C. Shan, Z. Jin, and H. Zhu, “Complex dynamics of epidemic models on adaptive networks,” *Journal of Differential Equations*, vol. 266, no. 1, pp. 803-832, January 2019.

Como citar este artículo: R. A. Salas-Vega y J. Burgos-García, “Aspectos analíticos y geométricos de un modelo epidemiológico con dinámica de población”, *Sahuarus. Revista Electrónica de Matemáticas*, vol. 7, no. 2, pp. 29-51, 2023. <https://doi.org/10.36788/sah.v7i2.144>.