

Estudio de poblaciones con un enfoque de campo medio

Carmen G. Higuera-Chan¹, Gabriel Miranda-Gómez² y Nadia Ramos-Valenzuela³

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.

¹carmen.higuera@unison.mx, ²gabriel-mirandag@outlook.com, ³n4d14rsv@gmail.com

Resumen

En este trabajo se estudia el comportamiento de una población de gran tamaño que evoluciona en tiempo discreto hasta un horizonte finito. El análisis se realiza a través de la propuesta de un modelo estocástico determinado por el tamaño y clasificación de la población y de su relación con un modelo, llamado modelo de campo medio, que resulta ser aproximante a la propuesta estocástica.

Palabras Clave: Modelos Markovianos en tiempo discreto; Poblaciones; Teoría de campo medio; Sistemas de interacción de objetos.

DOI: 110.36788/sah.v7i2.143

Recibido: 24 de agosto del 2023.

Aceptado: 6 de diciembre del 2023.

1. Introducción

El estudio de poblaciones conformadas por seres vivos, partículas, agentes o cualquier tipo de objetos de una misma naturaleza, es un problema de interés y usualmente difícil de modelar en la mayoría de los casos por la complejidad en predecir el comportamiento de quienes componen tal población. En este trabajo se tiene como objetivo presentar de una manera accesible una propuesta que permita modelar y analizar la evolución una población.

De manera general, el objetivo de la teoría de campo medio consiste en simplificar el análisis de sistemas dinámicos compuestos de un número grande de objetos o agentes que interactúan entre sí. Es claro que analizar de forma individual de cada uno de los objetos del sistema sería prácticamente imposible, es por ello la conveniencia de estudiar el comportamiento de un grupo de objetos del sistema. Tomando como referencia esta la idea, de la cual fue pionero Pierre Weiss en el área de física estadística durante la primera década del siglo XX, el desarrollo de estas ideas se han extendido a diversas áreas dentro de las matemáticas como en la teoría de juegos, siendo [8] un trabajo pionero y que marca el desarrollo de la teoría de campo medio, en particular de los juegos de campo medio o *Mean Field Games* en los últimos 15 años.

Con el fin de comprender y desarrollar algunas ideas básicas de la teoría de campo medio, aunque sin un contexto de control o juegos, como las estudiadas en los artículos [2, 3, 4, 6],

así como de algunas aplicaciones en biología, economía, finanzas en [1, 4, 5, 6, 9], en este trabajo se estudia el comportamiento de una población que evoluciona en tiempo discreto hasta un horizonte T y está compuesta por $N \sim \infty$ objetos haciendo uso de la teoría de campo medio. Esto es, en lugar de analizar cada objeto de la población, la idea es categorizar a la población de acuerdo con sus características y estudiar la proporción de objetos que ocupan cada categoría. De manera que se propondrá un modelo estocástico cuyos estados son precisamente las proporciones de objetos en cada categoría. Así, cuando $N \rightarrow \infty$, se obtendrá un nuevo modelo, al que se denominará modelo de campo medio, cuyos estados resultan ser medidas de probabilidad sobre el conjunto de las categorías y además aproxima al modelo original.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en la Sección 2 se presentarán los elementos principales para el modelado de una población de tamaño N cuya dinámica de los objetos entre categorías está dada por medio de un Kernel de transición. En la Sección 3, se motivará la creación de un nuevo proceso, llamado de campo medio, haciendo $N \rightarrow \infty$ y se analizan sus propiedades. Finalmente, en Sección 4, se presenta un resultado que relaciona a ambos modelos, así como un ejemplo que ilustra tal resultado.

Notación

Para un conjunto Z , se denota como $\mathbb{P}(Z)$ al conjunto de medidas de probabilidad en Z . Además, si Z es un conjunto finito, $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, una medida de probabilidad $p \in \mathbb{P}(Z)$ se identifica con el vector $p := (p(z_1), p(z_2), \dots, p(z_n))$, donde $p(z_i) \geq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n p(z_i) = 1$. Luego, $\|\cdot\|_\infty$ que denota la correspondiente norma, esto es, para cada vector $p \in \mathbb{P}(Z)$:

$$\|p\|_\infty := \max\{|p(z_1)|, |p(z_2)|, \dots, |p(z_n)|\}.$$

Por último, se denota como I_D a la función indicadora en el conjunto D , $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $[N] := \{1, 2, \dots, N\}$ para $N \in \mathbb{N}$.

2. Modelo de una población compuesta por N objetos

Considere una población, compuesta por N objetos, que evoluciona en tiempo discreto hasta un tiempo finito T . Asimismo, en cada tiempo tales objetos pueden ser clasificados de acuerdo con una cantidad finita de categorías. Sea $S = \{c_1, c_2, \dots, c_s\} := \{1, 2, \dots, s\}$ el conjunto de categorías y denotamos por $X_n^N(t)$, $n \in [N]$, $t = 0, \dots, T$, la clase del objeto n al tiempo t , de manera que $X_n^N(t) \in S$.

En cada tiempo $t = 0, \dots, T$, se produce movimiento aleatorio de cada objeto entre categorías; este movimiento está dado por una probabilidad de transición, homogénea en N , de la forma:

$$P(X_n^N(t+1) = j | X_n^N(t) = i) = K_{ij}, \quad (1)$$

es decir, K_{ij} representa la probabilidad de que cualquier objeto pase de la categoría i a la categoría j , y se denota a $K = (K_{ij})$ como la matriz de transición.

Observación 1 *Observe que para cada $n \in [N]$, el proceso $\{X_n^N(t)\}_{t \leq T}$ es una cadena de Markov homogénea en el tiempo, por la transición dada en (1).*

Claramente el hecho que N sea grande es un obstáculo para analizar el comportamiento y evolución de cada objeto de manera individual. En este sentido, asumiendo que los objetos son distinguibles únicamente por la categoría en la que se encuentran, y considerando que K no depende de N , el comportamiento de la población puede ser analizado de una forma global por medio de las proporciones de los objetos en cada categoría. Sea $M_i^N(t)$ sea la proporción de objetos en la categoría $i \in S$ en el tiempo $t \leq T$ definida como:

$$M_i^N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_{[X_n^N(t)=i]}$$

y $M^N(t)$ es el vector de proporciones

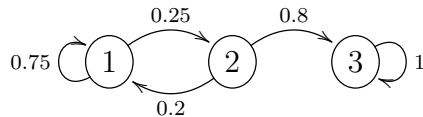
$$M^N(t) = (M_1^N(t), M_2^N(t), \dots, M_s^N(t)),$$

el cual representa el estado de la población o simplemente el estado de la población al tiempo t . Notemos que cada $M^N(t)$ pertenece al conjunto $\mathbb{P}_N := \{p \in \mathbb{P}(S) : Np(i) \in \mathbb{N}_0, \forall i \in S\}$.

Con el fin de comprender mejor la propuesta de este modelo y ubicar cada uno de los elementos presentados hasta el momento, se propone el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 *Considere una población compuesta por $N = 1,000,000$ seres vivos los cuales se pueden clasificar de acuerdo a cierta enfermedad en susceptible, infectado y muerto y donde la evolución de cada individuo está dada en el siguiente diagrama.*

1 := Susceptible 2 := Infectado 3 := Muerto



Observe que $S = \{1, 2, 3\}$ y la correspondiente matriz de transición está dada como:

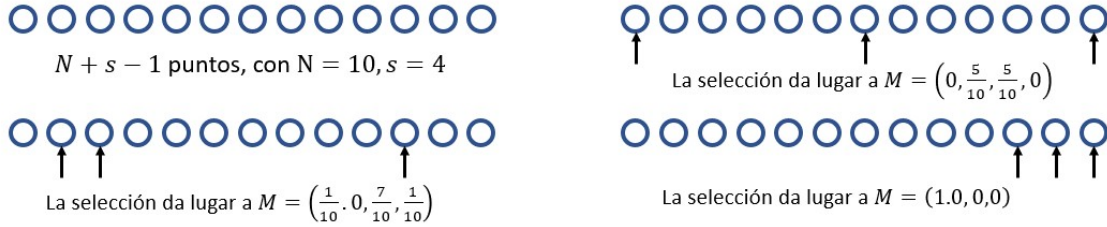
$$K = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suponga además que $X_n^N(0) = 1$ para $n = 1, \dots, 900000$ y $X_n^N(0) = 2$ para $n = 900001, \dots, N$, es decir 900000 individuos inician en condición susceptibles y 100000 infectados. De manera que $M_1^N(0) = 0.9$, $M_2^N(0) = 0.1$ y $M_3^N(0) = 0$, dando lugar al vector $M^N(0) = (0.9, 0.1, 0)$.

Observación 2

- La suma de las entradas de $M^N(t) = (M_1^N(t), M_2^N(t), \dots, M_s^N(t)) \in \mathbb{P}_N$ es 1 para cada t por lo tanto $M^N(t)$ es una medida de probabilidad en S .
- El conjunto \mathbb{P}_N es finito y tiene cardinalidad C_{s-1}^{N+s-1} .

Determinar la cardinalidad se puede visualizar de la siguiente manera. Considere una colección de $N + s - 1$ puntos ordenados y observe que cada selección de $s - 1$ define un elemento de \mathbb{P}_N . Esto porque cada selección de $s - 1$ puntos divide al conjunto de N puntos en s grupos y cada uno representa el número de objetos en una categoría, consecuentemente se tiene un elemento de \mathbb{P}_N . Como ejemplo vea la siguiente imagen.



Por lo tanto, el número total de elementos de \mathbb{P}_N es C_{s-1}^{N+s-1} .

Por otra parte, en [2] los autores demuestran que el proceso $\{M^N(t)\}$, $t \leq T$ es una cadena de Markov finita. De hecho, al ser una cadena de Markov finita, existe una función medible $G^N : \mathbb{P}_N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{P}_N$ tal que

$$M^N(t+1) = G^N(M^N(t), w_t), \quad t \leq T \quad (2)$$

donde $\{w_t\}$ es un vector aleatorio en \mathbb{R}^N con una distribución común θ .

Aplicando técnicas de simulación de Montecarlo se puede obtener una forma explícita de G^N como se procede a continuación. Considerare s particiones del intervalo $[0, 1]$ dadas por las filas de $K = (K_{ij})$. Para cada $i, j \in S$, sea

$$\Delta_{ij} := [\psi_{ij}, \psi_{ij+1}] \subseteq [0, 1] \quad (3)$$

donde

$$\psi_{ij} := \sum_{l=1}^{j-1} K_{il}. \quad (4)$$

Note que la longitud del intervalo Δ_{ij} representa la probabilidad de que el objeto se mueva de la categoría i a la categoría j .

Ahora, continuando con el procedimiento de simulación, se definen en cada tiempo N variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (i.i.d.) con distribución uniforme en $[0, 1]$, las cuales simularán el movimiento de cada objeto entre las categorías. Tales

variables aleatorias deben ser identificadas de acuerdo con la categoría donde un objeto se encuentre actualmente ubicado. Es por ello que, para cada tiempo, se define el vector

$$w_t := (w^1(t), \dots, w^s(t)),$$

con $w^i(t) := (w_i^1(t), \dots, w_{NM_i^N(t)}^i(t))$, $i \in S$ y $w_i^k(t) \sim Unif[0, 1]$. Note que $w^i(t)$ es un vector con tantas entradas como número de objetos que se encuentran en la categoría i al tiempo t . Esta longitud varía de tiempo en tiempo pero no la longitud de w_t , el cual un vector en $[0, 1]^N$.

Una vez ubicado al vector w_t , la proporción de objetos en la categoría j al tiempo $t + 1$ toma la forma:

$$M_j^N(t+1) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s \sum_{n=1}^{NM_i^N(t)} I_{\Delta_{ij}}(w_n^i(t)), j \in S.$$

Por lo anterior, la función G^N queda definida como

$$G^N(m, w) = (G_1^N(m, w), \dots, G_s^N(m, w)) \quad (5)$$

con $(m, w) \in \mathbb{P}_N \times [0, 1]^N$, donde

$$G_j^N(m, w) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s \sum_{n=1}^{Nm_i} I_{\Delta_{ij}}(w_n^i), j \in S,$$

para $m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in \mathbb{P}_N$.

De aquí en adelante fijaremos la función G^N en (5) para describir la dinámica del proceso $\{M^N(t)\}$ entre un par de tiempos consecutivos.

La evolución de la población hasta el tiempo T queda de la siguiente forma. Al tiempo t se observa el $m = M^N(t) \in \mathbb{P}_N$ que representa en estado de la población. Después, al tiempo $t + 1$, la población pasa a un nuevo estado $m' = M^N(t + 1)$ dada la siguiente ley de transición.

$$\begin{aligned} Q(D|m) &:= P[M^N(t+1) \in D | M^N(t) = m] \\ &= \theta(\{w : G^N(m, w) \in D\}) \\ &= \int_{[0,1]^N} I_D[G^N(m, w)] \theta(dw), D \in \mathcal{B}(\mathbb{P}_N). \end{aligned} \quad (6)$$

De manera que, dado un estado inicial fijo $m = M^N(0) \in \mathbb{P}_N$, el proceso $\{M^N(t)\}_{t \leq T}$ está definido en el espacio de probabilidad $(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'), P_m)$ con $\Omega' = (\mathbb{P}_N)^{T+1}$ y P_m definida de la siguiente manera (ver Subsección 2.1.6 de [10])

$$P_m(m, M^N(1), \dots, M^N(T)) = Q(M^N(1)|m)Q(M^N(2)|M^N(1)) \cdots Q(M^N(T)|M^N(T-1)). \quad (7)$$

Para fines prácticos, la caracterización de G^N en (5) es de gran utilidad para la simulación del sistema.

En el siguiente código se muestra una forma de simulación de la población del Ejemplo 1; se considera que estado inicial es $M^N(0) = (0.9, 0.1, 0)$ (el cual puede modificarse) y para su funcionamiento se solicitan los valores de N , T y el número de simulaciones que se desea. Como salida se obtiene un conjunto de vectores de proporción referente a la trayectoria de cada una de las simulaciones.

```

from functools import reduce
import numpy as np
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt

# Definiciones
PROPORCIONES = np.array([0.9, 0.1, 0], dtype = np.float64)
mT = np.array([[0.75, 0.25, 0], [0.2, 0, 0.8], [0, 0, 1]], dtype=np.float64)
rng = np.random.default_rng()

# Funciones
def demo():
    # Entrada de variables y calculos previos
    pN = np.uint64(input("Poblacion total: "))
    Tiempo = np.uint64(input("Tiempo: "))
    n_simulaciones = np.uint16(input("Numero de simulaciones: "))
    arregloP = np.array(PROPORCIONES*pN, dtype = np.uint64)

    # Simulacion de Modelo de poblacion compuesta
    resultados_tipo_1 = []
    for _ in range(n_simulaciones):
        resultados_tipo_1.append(M_simulation(arregloP, Tiempo))
    proporciones_tipo_1 = [resultado/pN for resultado in resultados_tipo_1]

def M_step(poblaciones):
    ps_list = []
    new_poblaciones = np.zeros(3, dtype = np.uint64)
    for tipo, poblacion in enumerate(poblaciones):
        ps_list.append(rng.choice(3, poblacion, p = mT[tipo]))

    # Esta seccion es para evitar errores de cambio de forma del arreglo
    ps = reduce(lambda x,y: np.concatenate((x,y),axis=None),ps_list)
    counts_per_type = np.unique(ps, return_counts = True)
    for i, pob_type in enumerate(counts_per_type[0]):
        new_poblaciones[pob_type] = counts_per_type[1][i]

    return new_poblaciones

def M_simulation(poblaciones, max_steps):
    history = np.empty((max_steps, 3), dtype = np.uint64)
    history = np.vstack((poblaciones, history))
    for t in range(max_steps):
        history[t + 1] = M_step(history[t])

```

```

    return history

# Programa Principal
if __name__ == "__main__":
    demo()

```

3. Modelo de campo medio

Recuerde que $M^N(t) = (M_1^N(t), M_2^N(t), \dots, M_s^N(t))$ es un vector en \mathbb{P}_N cuyos componentes representan la proporción de objetos correspondientes en cada tiempo t . Lo que se busca en esta sección es proponer un modelo para la población que, de cierta manera, simplifique la complejidad del modelo estocástico propuesto anteriormente ya que se involucran dinámicas con integrales del orden $N \sim \infty$, vea (6) y (7).

Como motivación para el modelo que está por definirse, se propone el siguiente resultado.

Proposición 1 *El conjunto $\mathbb{P}(S)$ es un espacio completo bajo la métrica inducida por $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración 1 *Se demostrará que $\mathbb{P}(S)$ tiene un subconjunto denso y numerable D . Sea $D = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}_N$, es claro que D es numerable ya que cada conjunto \mathbb{P}_N es finito (vea Observación 2).*

Ahora, falta verificar que D es denso. Sea $p = (p_1, p_2, \dots, p_s) \in \mathbb{P}(S)$ y $\epsilon > 0$, entonces existe un $N' \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N'} < \frac{\epsilon}{s-1}$ y racionales $p_i^{N'}$, $i = 1, 2, \dots, s-1$ tales que

$$|p_i - p_i^{N'}| \leq \frac{1}{N'} < \frac{\epsilon}{s-1} < \epsilon,$$

y para $p_s = 1 - p_1 - \dots - p_{s-1}$ y $p_s^{N'} = 1 - p_1^{N'} - \dots - p_{s-1}^{N'}$ se cumple

$$|p_s - p_s^{N'}| = |1 - p_1 - \dots - p_{s-1} - 1 + p_1^{N'} - \dots + p_{s-1}^{N'}| \leq \frac{s-1}{N'} < \epsilon.$$

Por lo que $p^{N'} = (p_1^{N'}, p_2^{N'}, \dots, 1 - p_1^{N'} - \dots - p_{s-1}^{N'}) \in \mathbb{P}_{N'}$ y $d_\infty(p, p^{N'}) := \|p - p^{N'}\|_\infty < \epsilon$. Es decir para cualquier $p \in \mathbb{P}(S)$ existe un elemento de D lo suficientemente cercano a p . Por lo tanto D es denso.

El considerar poblaciones de tamaño N muy grandes, la proposición anterior nos motiva a considerar estados de la población de la forma $m(t) = (m_1(t), m_2(t), \dots, m_s(t)) \in \mathbb{P}(S)$, donde $m_i(t)$ representa la probabilidad de que un objeto esté en la categoría i al tiempo t . Por tanto, considerando el movimiento de los objetos entre las categorías dadas por la matriz de transición $K = (K_{ij})$ se busca que $m_j(t+1)$ tome la forma

$$m_j(t+1) = \sum_{i=1}^s m_i(t) K_{ij},$$

definiendo así la dinámica de $m(t)$. Formalizamos lo anterior como sigue. Sea $G : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}(S)$ la función definida como

$$G(m) := mK \quad (8)$$

donde K es la matriz de transición en (1) y se considera el proceso de estados $m(t) \in \mathbb{P}(S)$ que evoluciona de acuerdo a la ecuación en diferencias

$$m(t+1) = G(m(t)) = m(t)K \quad (9)$$

dadas las condiciones iniciales $m(0) = m \in \mathbb{P}(S)$. Al proceso $\{m(t)\}_{t \leq T}$ se le llama modelo de campo medio.

Del mismo modo que en la sección anterior, con el fin de identificar los elementos y dinámica del modelo de campo medio, se presenta una continuación del Ejemplo 1.

Ejemplo 2 Considerando el Ejemplo 1, donde $S = \{1, 2, 3\}$, la matriz de transición

$$K = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $m(0) = (0.9, 0.1, 0) \in \mathbb{P}(S)$. La evolución del proceso de campo medio $\{m(t)\}_{t \leq T}$ con la dinámica (8) es como sigue:

- $m(0) = (0.9, 0.1, 0) \in \mathbb{P}(S)$.

- $m(1) = m(0)K = (0.9, 0.1, 0) \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0.695, 0.225, 0.08) \in \mathbb{P}(S)$.

- $m(2) = m(1)K = (0.695, 0.225, 0.08) \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0.56625, 0.17375, 0.26)$.

- $m(3) = (0.56625, 0.17375, 0.26) \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0.4594375, 0.1415625, 0.399)$.

- ... y así continua hasta el tiempo T .

Observe que el estado de la población al tiempo $t = 3$ es $(0.4594375, 0.1415625, 0.399)$, es decir la proporción de la población que se encuentra en la categoría 1 es 0.4594375 , la proporción de la población que se encuentra en la categoría 2 es 0.1415625 y la proporción de la población que se encuentra en la categoría 3 es 0.399 . En esta situación, a pesar de haber iniciado la población con 0 “Muertos”, se puede ver que en 3 tiempos ya se tiene un incremento muy grande.

El siguiente código es una opción para automatizar los cálculos hechos en Ejemplo 2 para obtener $m(1), m(2), \dots$ hasta el tiempo T .


```

from functools import reduce
import numpy as np
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt

# Definiciones
PROPORCIONES = np.array([0.9, 0.1, 0], dtype = np.float64)
mT = np.array([[0.75, 0.25, 0], [0.2, 0, 0.8], [0, 0, 1]], dtype=np.float64)

# Funciones
def demo():
    # Entrada de variables y calculos previos
    pN = np.uint64(input("Poblacion total: "))
    Tiempo = np.uint64(input("Tiempo: "))
    arregloP = np.array(PROPORCIONES*pN, dtype = np.uint64)
    # Simulacion de Modelo de campo medio
    resultados_tipo_2 = markov_calculation(arregloP, Tiempo)
    proporciones_tipo_2 = resultados_tipo_2/pN

def markov_calculation(poblaciones, max_steps):
    history = np.empty((max_steps, 3), dtype = np.uint64)
    history = np.vstack((poblaciones, history))
    for t in range(max_steps):
        history[t+1]=np.dot(poblaciones, np.linalg.matrix_power(mT, t+1))

    return history

# Programa Principal
if __name__ == "__main__":
    demo()

```

A pesar de que este es un modelo con espacio de estados $\mathbb{P}(S)$ que ya no es finito, parte de las bondades es que este modelo es determinista. Es decir una vez identificados los elementos necesarios y las condiciones iniciales la trayectoria del proceso está completamente determinada.

4. Relación entre los procesos de la N -población y el de campo medio

Finalmente se tienen las condiciones de enunciar el resultado que indica la relación entre los procesos $\{M^N(t)\} \in \mathbb{P}_N$ y $\{m(t)\} \in \mathbb{P}(S)$.

Teorema 1 *Suponga que $M^N(0) = m \in \mathbb{P}_N$ y $m(0) = m' \in \mathbb{P}(S)$ y defina $\delta := \|m - m'\|_\infty$, entonces existe una función $\mu_T(\epsilon, \delta)$, donde $\mu_T(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$ y $\delta \rightarrow 0$, tal que:*

(a) Para cualquier $\epsilon > 0$,

$$P_m \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \|M^N(t) - m(t)\|_\infty > \mu_T(\epsilon, \delta) \right\} \leq 2Te^{-2N\epsilon^2} \quad (10)$$

(b) Además, para cada $m \in \mathbb{P}_N$ y $\epsilon > 0$

$$E_m \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|M^N(t) - m(t)\|_\infty \right] \leq 2Te^{-2N\epsilon^2} + \mu_T(\epsilon, \delta) \tag{11}$$

donde P_m es la medida de probabilidad definida en (7) y E_m el respectivo operador esperanza.

El Teorema 1 muestra que para una población lo suficientemente grande, el proceso $\{m(t)\}$ resulta ser una buena aproximación para el proceso estocástico $\{M^N(t)\}$. Para la demostración de este resultado se tomará como referencia lo realizado en [3, 4, 6] en donde el resultado considera el mismo estado inicial pero para situaciones de control estocástico y teoría de juegos.

En las siguientes figuras se pueden comparar los vectores de proporción de ambos modelos cuando $M^N(0) = m(0) = (0.9, 0.1, 0)$ durante los tiempos $t = 1, 2, 3$ de los Ejemplos 1 y 2, usando los códigos correspondientes a cada modelo que fueron presentados en secciones previas.

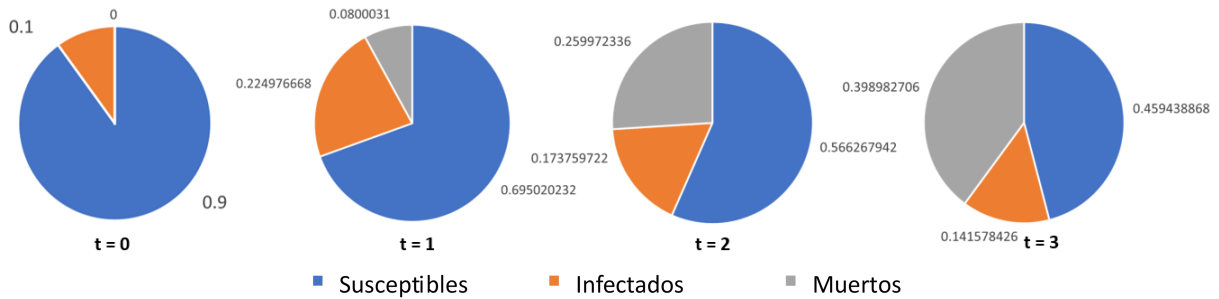


Figura 1: Simulación de la población

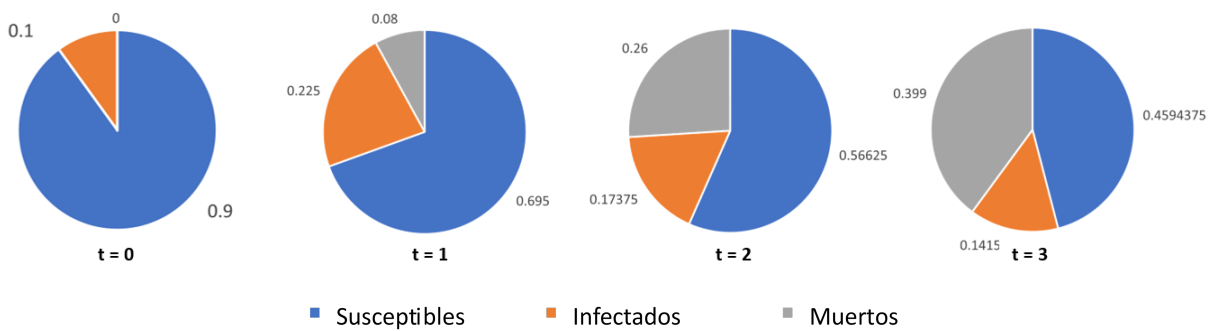


Figura 2: Evolución de la población con el modelos de campo medio

5. Prueba del Teorema 1

Sea $M^N(0) = m \in \mathbb{P}_N$ y $m(0) = m' \in \mathbb{P}(S)$ las condiciones iniciales. Definimos $\gamma_0 := \|m - m'\|_\infty$ t una colección de N variables aleatorias

$$B_{inj}^N(t) := I_{\Delta_{ij}}(w_n^i), i, j \in S, n \in \mathbb{N}$$

donde w_n^i son variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme en $[0,1]$. Por tanto, para cada $t \leq T$, $\{B_{inj}^N\}_{inj}$ es una familia de variables aleatorias independientes con distribución *Bernoulli*(K_{ij}) y con media

$$E_m [B_{inj}^N(t)] = K_{ij}.$$

De la desigualdad de Hoeffding (ver ecuación (2.6) en [7]), para una $\epsilon > 0$ fija, se tiene que para cada $t \leq T, i, j \in S$,

$$P_m \left[\left| \sum_{n=1}^{NM_i^N(t)} B_{inj}^N(t) K_{ij} - NM_i^N(t) \right| < N\epsilon \right] > 1 - 2e^{-2N\epsilon^2}. \quad (12)$$

Por otra parte, sea

$$\bar{\Omega} = \left\{ w \in \Omega' : \left| \sum_{n=1}^{NM_i^N(t)} B_{inj}^N(t) K_{ij} - NM_i^N(t) \right| < N\epsilon \right\}.$$

Observe que por (12), $P_m(\bar{\Omega}) \rightarrow 1$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Ahora se demostrará que en el conjunto $\bar{\Omega}$ se satisface

$$\|M^N(t) - m(t)\|_\infty \leq \mu_t(\epsilon, \gamma_0) \quad t \leq T,$$

con $\{\mu_t(\epsilon, \gamma_0)\}_{t \leq T}$ una familia de funciones definida como sigue

$$\mu_0(\epsilon, \gamma_0) = \gamma_0; \quad \mu_t(\epsilon, \gamma_0) = s\epsilon \sum_{l=0}^{t-1} s^l + \gamma_0 s^t.$$

Note que la sucesión de funciones $\{\mu_t\}$ satisface las condiciones del teorema y además es creciente en t .

Se procederá por inducción.

Para $t=0$, se tiene $\|M^N(0) - m(0)\| = \gamma_0$. Ahora suponga que

$$\|M^N(k) - m(k)\|_\infty \leq \mu_k(\epsilon)$$

para algún $k \leq T$. Así, para cada $j \in S$

$$\begin{aligned}
|M_j^N(k+1) - m_j(k+1)| &= \left| \sum_{i=1}^s \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^{NM_i^N(k)} B_{inj}^N(k) - Nm_i(k) - Nm_i(k)K_{ij} \right] \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^s \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{NM_i^N(k)} B_{inj}^N(k) - Nm_i(k) - Nm_i(k)K_{ij} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^s \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{NM_i^N(k)} B_{inj}^N(k) - NM_i^N(k)K_{ij} \right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^s |M_i^N(k) - m_i(k)|K_{ij} \\
&\leq s\epsilon + s\mu_k(\epsilon, \gamma_0) = s\epsilon + s^2\epsilon \sum_{l=0}^{k-1} s^l + s^{k+1}\gamma_0 = s\epsilon \sum_{l=0}^k s^l + s^{k+1}\gamma_0 = \mu_{k+1}(\epsilon).
\end{aligned}$$

Entonces, $|M_j^N(k+1) - m_j(k+1)| \leq \mu_{k+1}(\epsilon)$ en $\bar{\Omega}$. Así, mediante un proceso inductivo sobre T y por (12), se tiene

$$P_m \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|M^N(t) - m(t)\|_\infty < \mu_T(\epsilon, \gamma_0) \right] \geq 1 - 2Te^{-2N\epsilon^2}.$$

(b) Se denota por $M_T := \sup_{0 \leq t \leq T} \|M^N(t) - m(t)\|_\infty$. Para cada $m \in \mathbb{P}_N, T \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0, \gamma_0 > 0$, ya que $M_T \leq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
E_m[M_T] &= E_m[M_T I_{[M_T > \mu_T(\epsilon, \gamma_0)]} + M_T I_{(Y_T \leq \mu_T(\epsilon, \gamma_0))}] \\
&\leq P_m(M_T > \mu_T(\epsilon, \gamma_0)) + \mu_T(\epsilon, \gamma_0) P_m(M_T \leq \mu_T(\epsilon)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $E_m[M_T] \leq 2Te^{-2N\epsilon^2} + \mu_T(\epsilon, \gamma_0)$. ■

6. Conclusiones

En este trabajo los autores han propuesto un modelo para estudiar el comportamiento de una población compuesta por una gran cantidad de objetos que evoluciona en un tiempo discreto hasta un horizonte finito T . También se ha construido un modelo de campo medio que resulta ser un modelo aproximante en un sentido asintótico, según lo establecido en el Teorema 1.

Los resultados de los trabajos [3, 4, 6] fueron base para la adaptación, bajo el escenario propuesto, de la demostración del Teorema 1, así como una mejora al incluir la posibilidad de que ambos procesos inicien en estados diferentes. Además como otra aportación se realiza una simulación del proceso estocástico mediante la programación de la función G^N y se compara con el modelo de campo medio con el fin de visualizar y comprobar los resultados esperados en el ejemplo analizado a lo largo del trabajo.

Referencias

- [1] J. Doncel, N. Gast, and B. Gaujal, "Vaccination in a large population: Mean field equilibrium versus social optimum," in *Network Games, Control and Optimization: 10th International Conference, NetGCooP 2020, France, September 22–24, 2021, Proceedings 10*. Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-87473-5_6 pp. 51–59.
- [2] N. Gast and B. Gaujal, "A mean field approach for optimization in discrete time," *Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 21, no. 1, pp. 63–101, 2011. DOI: 10.1007/s10626-010-0094-3
- [3] C. G. Higuera-Chan, "Approximation and mean field control of systems of large populations," in *Advances in Probability and Mathematical Statistics: CLAPEM 2019, Mérida, Mexico*. Springer, 2021, pp. 103–122.
- [4] C. G. Higuera-Chan, H. Jasso-Fuentes, and J. A. Minjárez-Sosa, "Discrete-time control for systems of interacting objects with unknown random disturbance distributions: a mean field approach," *Applied Mathematics & Optimization*, vol. 74, no. 1, pp. 197–227, 2016. DOI: 10.1007/s00245-015-9312-6
- [5] C. G. Higuera-Chan, L. R. Laura-Guarachi, and J. A. Minjárez-Sosa, "Stochastic mitrawan forestry models analyzed as a mean field optimal control problem," *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 98, no. 2, pp. 169–203, 2023. DOI: 10.1007/s00186-023-00832-1
- [6] C. G. Higuera-Chan and J. A. Minjárez-Sosa, "A mean field approach for discounted zero-sum games in a class of systems of interacting objects," *Dynamic Games and Applications*, vol. 11, no. 3, pp. 512–537, 2021. DOI: 10.1007/s13235-021-00377-0
- [7] W. Hoeffding, "Probability inequalities for sums of bounded random variables," *The collected works of Wassily Hoeffding*, pp. 409–426, 1994. DOI: 10.2307/2282952
- [8] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, "Mean field games," *Japanese journal of mathematics*, vol. 2, no. 1, pp. 229–260, 2007. DOI: 10.1007/s11537-007-0657-8
- [9] M. E. Martínez Manzanarez, "Modelos de control en sistemas estocásticos de interacción de objetos bajo un enfoque de campo medio," Master's thesis, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, 2020. [Online]. Available: https://posgrado.mat.uson.mx/tesis/maestria/maria_elena_martinez.pdf
- [10] M. L. Puterman, *Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming*. John Wiley & Sons, 2014.

Como citar este artículo: C. G. Higuera Chan, G. Miranda Gámez, y N. Ramos-Valenzuela, "Estudio de poblaciones con un enfoque de campo medio", *Sahuarus. Revista Electrónica de Matemática*, vol. 7, no. 2, pp. 1–13, 2023. <https://doi.org/110.36788/sah.v7i2.143>