

Estabilidad de sistemas lineales positivos por politopos invariantes

Horacio Leyva Castellanos¹, Francisco A. Carrillo Navarro^{2,*}, Griselda Quiroz Compeán³ y Alejandro Femat Flores⁴

Universidad de Sonora^{1,2}

Universidad Autónoma de Nuevo León³

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica⁴

¹horacio.leyva@unison.mx, ²armando.carrillo@unison.mx, ³griselda.quirozcm@uanl.edu.mx, ⁴rfemat@ipicyt.edu.mx.

Resumen

El objetivo principal de este artículo es describir la estabilidad de sistemas lineales positivos mediante politopos invariantes en el espacio de estados, de forma que a cada sistema estable le corresponde una familia de politopos invariantes. Además, para el caso del plano, presentamos una manera de estabilizar sistemas lineales positivos mediante el diseño de controles lineales.

Palabras Clave: Sistemas Positivos, Politopo Convexo, Invarianza Positiva.

DOI: 10.36788/sah.v7i1.136

Recibido: 10 de marzo de 2023

Aceptado: 5 de mayo de 2023

1. Introducción

Los sistemas positivos se caracterizan por la invariancia del ortante positivo \mathbb{R}_+^n en el espacio de estados, y se usan para representar dinámicas en: economía, modelos compartimentales, poblaciones, mezclas de sustancias químicas, ver los trabajos [6, 10, 13, 14, 18, 19]. El objetivo principal de este trabajo es abordar la estabilización asintótica global (GAS) de sistemas positivos a través de la invariancia de conjuntos politópicos P , con $0 \in \text{int}P$, definido como curvas de nivel de funciones lineales por partes $V(x) = \max\{v_1^T x, \dots, v_k^T x\}$, donde v_i^T representa el vector transpuesto v_i . A través de la invariancia de conjuntos convexos en el espacio de estados, podemos describir el comportamiento de soluciones de sistemas lineales positivos. Como V no es diferenciable, para cada solución $x(t)$ de un sistema lineal, es posible demostrar que la función compuesta $V(x(t))$ es decreciente para concluir que el origen $x = 0$ es asintóticamente estable, según el Teorema 2.7.20 en [4] y el Teorema 6.2 en [1].

La investigación de propiedades y soluciones para sistemas positivos es motivado por la capacidad de representación y predicción que estos sistemas tienen en varias y distintas aplicaciones. En [8, 15], se presentan las condiciones para la existencia de un politopo invariante

* Autor de correspondencia

y la estabilidad del sistema lineal positivo bajo perturbaciones específicas. En [2] se trabajó la estabilización de sistemas lineales invariantes en el tiempo con criterios algebraicos. En cambio, en este artículo consideramos una función de Lyapunov lineal por partes, de modo que obtenemos la invariancia positiva de los conjuntos de tipo simplex S contenidos en el ortante positivo, que involucra a la estabilidad asintótica de las soluciones del sistema positivo. Adicionalmente, dichos resultados diseñan controles estabilizadores que preservan la positividad del sistema.

Las propiedades de las matrices de Metzler describen las características de las soluciones de sistemas lineales positivos autónomos. Considere el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}_+^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Metzler, es decir, una matriz cuyas entradas fuera de la diagonal son no negativas. En [11] se prueba que el caso lineal es un sistema positivo si y sólo si la matriz A es Metzler. Es conocido que el punto de equilibrio $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable bajo (1) si y sólo si la matriz A es Hurwitz, esto es que todos sus valores propios tienen parte real negativa ($\sigma(A) \subset \text{int } \mathbb{C}^-$). También, las propiedades de las matrices Metzler permiten describir el comportamiento de las soluciones del sistema (1), en particular mediante el teorema de Perron–Frobenius y la Proposición 1 de [19]. Mediante una Proposición para sistemas lineales, establecemos condiciones suficientes para la invariancia de una familia de politopos (n -octaedros y n -simplex) bajo el sistema lineal positivo (1). De acuerdo con la Proposición 1 de [19], se prueba que A es también una matriz Hurwitz si y solo si existe $L \in \mathbb{R}^n$ tal que $L > 0$ y $L^T A < 0$, ver por ejemplo [3, 5, 19]. Dada una matriz Metzler y Hurwitz A en (1), sea L_q la familia de vectores positivos que satisface la desigualdad $L_q^T A < 0$. Además, a cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzler y Hurwitz le corresponde un cono convexo abierto $C_A \subset \text{int } \mathbb{R}_+^n$, cuya amplitud está relacionada con la robustez del sistema lineal positivo definido por la matriz A .

Determinaremos dos tipos de politopos para describir la estabilidad, definimos los politopos P y S ; el politopo $P \subset \mathbb{R}^n$, que es un n -octaedro (también conocido como politopo cruzado) con centro en el origen y $2n$ vértices. En cambio, el politopo S es un n -simplex con el origen en uno de sus $n + 1$ vértices, tal que $S = P \cap \mathbb{R}_+^n$. Ambos politopos se definen con un vector positivo $L_q = -q^T A^{-1} \in C_A \subset \text{int } \mathbb{R}_+^n$, donde $q \in \mathbb{R}^n$ es positivo y si A es matriz Metzler y Hurwitz, entonces la matriz $-A^{-1}$ es una matriz no-negativa, esto está demostrado en el Teorema 6.5.3, página 206 en [16]. Para este caso de sistemas lineales positivos, incluimos una demostración de la invariancia de una familia de politopos S explícitamente dados, según la Proposición 2.1 de [7].

Como se dijo anteriormente, con el fin de mostrar la robustez del sistema lineal (1) con matriz A Metzler y Hurwitz, definimos un cono abierto n -dimensional C_A , de manera que cada elemento $L \in C_A$ genera politopos invariantes bajo el sistema lineal (1), de forma que es posible establecer un vínculo entre las propiedades estables de tales politopos invariantes y las propiedades del intervalo de matrices Metzler estables definidas en [5].

2. Preliminares y la formulación del problema

2.1. Notación

Se dice que una matriz A es *positiva* si todas sus entradas a_{ij} son positivas.

Para las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, con $A \neq B$, usamos la siguiente notación

- $A > B$ significa que $a_{ij} > b_{ij}$, para toda i, j .
- $A \geq B$ significa que $a_{ij} \geq b_{ij}$, para toda i, j .
- A^T es la transpuesta de la matriz A .
- A^{-1} es la inversa de la matriz A .
- \mathbb{R}_+ es el conjunto de números reales no negativos.
- \mathbb{R}_+^n es llamado el *ortante positivo* de \mathbb{R}^n , dado por $\{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$.
- Para un vector $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \in \mathbb{R}^n$ representa un vector con componentes $|x_i|$.
- $x^T y$ denota el producto interior de los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2.2. Politopos

En la literatura se manejan básicamente dos maneras de representar politopos, una es llamada H -representación, que consiste en una intersección acotada de un número finito de semiespacios (desigualdades lineales) ver [20]. Otra manera de definir un politopo es mediante el envolvente convexo de un conjunto finito de puntos, conocida como la V -representación mediante vértices. Con el objetivo de estudiar la estabilidad del sistema lineal positivo, consideramos también las siguientes representaciones del octaedro n -dimensional (ver [22]), con el vector $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)^T$ que resulta de la Proposición 1, caso(1.3) de [19]. Es conocida la equivalencia de tales representaciones, demostrada en [20]. En particular, el octaedro n -dimensional o *hiperoctaedro* P con $2n$ vértices y 2^n caras, podemos representarlo de las siguientes formas

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{L}x \leq \rho\}, \quad (2)$$

donde $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{k \times n}$, con $k = 2^n$ y $\rho = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$, los renglones de la matriz \mathcal{L} representan los gradientes L_i de los hiperplanos que definen las caras del hiperoctaedro. Otra representación es de la forma de un envolvente convexo de los $2n$ vértices que se obtienen al permutar el signo en los vectores de la base canónica $\left(\pm \frac{1}{l_1} e_1, \pm \frac{1}{l_2} e_2, \dots, \pm \frac{1}{l_n} e_n\right)$ con $l_i > 0$, para toda $i = 1, \dots, n$, lo escribimos como

$$P = \text{conv} \left\{ \pm \frac{1}{l_1} e_1, \pm \frac{1}{l_2} e_2, \dots, \pm \frac{1}{l_n} e_n \right\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

con la base canónica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

En [22] se muestra la siguiente representación para el hiperoctaedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max_{i=1, \dots, k} \{L_i^T x\} \leq 1\} \text{ con } k = 2^n,$$

donde L_i es el gradiente de i -ésima cara del politopo.

También consideramos una forma equivalente a la H -representación

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid L^T |x| \leq 1\}, \quad (4)$$

donde $L = (l_1, \dots, l_n)^T$ es el gradiente la cara principal, es decir, de la cara en el ortante positivo \mathbb{R}_+^n y $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)^T$.

Igualmente, la equivalencia de estas últimas representaciones se muestra en [20]. En este trabajo no hacemos distinción, de manera que pasaremos de una representación a otra según convenga.

Consideremos el siguiente par de definiciones (ver definiciones 2 y 5 en [17]):

Definición 1. *Una función politópica es una función positiva definida la cual es definida de la forma*

$$V(x) = \max_{i=1, \dots, k} \{v_i^T x\}, \quad (5)$$

donde los vectores $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$ son diferentes de cero.

Definición 2. *Una curva de nivel de una función positiva definida $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por números reales $c_2 > c_1 \geq 0$ como*

$$V^{-1}[c_1, c_2] = \{x \in \mathbb{R}^n : c_1 \leq V(x) \leq c_2\}.$$

Entonces, para cada politopo convexo $P \subset \mathbb{R}^n$, con $0 \in \text{int } P$, existen vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \in \mathbb{R}^n$, tal que, mediante la función politópica (5), podemos representar P como

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\}, \quad (6)$$

donde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función convexa y positivamente homogénea, es decir, $V(rx) = rV(x)$ para cualquier número real $r \geq 0$, para la representación (5)-(6) de un politopo ver el Teorema 1.1 en [22] y p. 174 en [20]; en particular, ∂P de la definición (6) viene dado por la curva de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = 1\}$. Supondremos que el conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y convexo con $0 \in \text{int } P$.

De acuerdo a los resultados de invariancia que se presentan en [12], para el caso de los politopos,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Gx \leq b\},$$

donde $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Consideramos la presentación del siguiente Lema que describe como se puede justificar la invariancia en términos de los vértices del politopo.

Lema 3. *El politopo P es un conjunto invariante para el sistema continuo (1) si y solo si se cumple la siguiente desigualdad*

$$G_i A v_j \leq 0, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, \dots, l_i,$$

donde G_i es el i -ésimo renglón de G y v_j son los vértices del politopo P , para $j = 1, 2, \dots, l_i$, donde l_i es la i -ésima cara del politopo.

Demostración. *Según la demostración del Lema 3.5 en [12], para tener la nueva equivalencia basta con considerar que cualquier punto $x \in \partial P$ (tal que, $G_i x = b_i$) se puede escribir como una suma convexa de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_{l_i}\}$ de la i -ésima cara que corresponde, de modo que*

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{l_i} v_{l_i}, \quad \text{where } 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad \text{with } \sum_j \lambda_j = 1,$$

por lo tanto

$$G_i A x = \sum_j \lambda_j G_i A v_j \leq 0,$$

ya que $G_i A v_j \leq 0$ para $j = 1, 2, \dots, l_i$ y para toda $i = 1, \dots, m$. □

Observación 4. *Según el Lema 3, si el politopo $P = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es invariante bajo el sistema lineal (1), entonces el politopo $cP = \text{conv}\{cv_1, cv_2, \dots, cv_k\}$, para cualquier cualquier escalar $c > 0$, también es invariante bajo el sistema (1).*

Ejemplo 5. *Dado el sistema lineal inestable a lazo abierto*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

donde el polinomio característico de la matriz es $(\lambda - 1)^2$. Con el control lineal $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$ y considerando el vector renglón $k = (k_1, k_2)$, obtenemos el sistema de realimentación

$$A + bk = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2) = \begin{pmatrix} 2 + k_1 & 1 + k_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando los vectores

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

la función no negativa $V(x) = \max_{i=1, \dots, k} \{w_i^T x\}$ es equivalente a

$$V(x_1, x_2) = \max \left\{ \frac{1}{3} |x_1 + x_2|, |x_1 - x_2| \right\},$$

consideremos el cuadrilátero

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid V(x_1, x_2) \leq 1\},$$

de manera similar

$$P = \text{conv} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Con el fin de obtener la invariancia de P bajo el sistema de realimentación, es suficiente que

$$\begin{aligned} G_1(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 1, 2 \\ G_2(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 2, 3 \\ G_3(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 3, 4 \\ G_4(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 4, 1 \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

por simetría del politopo P , es suficiente que

$$\begin{aligned} G_1(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 1, 2 \\ G_2(A + bk)v_j &\leq 0 \text{ para } j = 2, 3 \end{aligned}$$

entonces, con los valores $k_2 = -2 - \frac{1}{2}k_1$ y $k_1 < -2$ las cuatro desigualdades anteriores se satisfacen. El cuadrilátero P es invariante bajo el sistema lineal (1), con

$$A + bk = \begin{pmatrix} 2 + k_1 & -1 - \frac{1}{2}k_1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } \det(A + bk) = -(1 + \frac{1}{2}k_1) > 0 \text{ y } \text{tr}(A + bk) = k_1 + 2 < 0.$$

Las desigualdades (7) implican que la función $V(x(t))$ es decreciente bajo la soluciones $x(t)$ del sistema de realimentación.

3. Resultados principales

Para abordar el problema de estabilización de un sistema lineal positivo, consideramos una función de Lyapunov con peso L^T , dada por

$$V(x) = \sum_{i=1}^n l_i |x_i| = L^T |x|, \quad (8)$$

tal que $V(x)$ es decreciente, para concluir que el origen $x = 0$ es un equilibrio globalmente asintóticamente estable para el sistema lineal positivo.

Considerando el politopo como el conjunto convexo y cerrado dado por (4), para probar la estabilidad con la función $V(x)$ dada por (8), haremos uso del siguiente Teorema donde identificamos X como \mathbb{R}^n y a M con el equilibrio $x = 0$.

Teorema 6. (Ver Teorema 2.7.20 in [4])

Un conjunto compacto $M \subset X$ es asintóticamente globalmente estable si y solo si existe una función uniformemente continua y no acotada $V(x)$ definida en X tal que

i) $V(x) = 0$ si $x \in M$ y $V(x) > 0$ si $x \notin M$.

ii) $V(x(t, x_0)) < V(x_0)$ para $x_0 \notin M$ y $t > 0$.

En (1.3) de la Proposición 1 de [19], para la familia de matrices Metzler A , se demuestra que la equivalencia entre ser A matriz Hurwitz y la existencia de un vector positivo $L > 0$ tal que $L^T A < 0$. En el siguiente Lema mostramos la familia de vectores positivos $L > 0$.

Lema 7. Sea A una matriz Metzler y Hurwitz, tal que el vector $L^T := -q^T A^{-1}$, para cualquier vector positivo q , entonces $L^T A < 0$.

Demostración. Según el Teorema 3 de la sección 6.5 de [16], la matriz $-A^{-1}$ es no-negativa si y solo si A es la matriz Hurwitz, tal que

$$L^T A = -q^T A^{-1} A = -q^T < 0.$$

□

Teorema 8. Si A es una matriz Metzler y Hurwitz, entonces el politopo convexo P dado por (4) es invariante con respecto al sistema lineal (1).

Demostración. Primero se prueba que la función $V(x(t)) = L^T |x(t)|$ es decreciente. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, tal que la vecindad N_x para x no contenga puntos en los ejes, de modo que las entradas x_i del vector x no cambian de signo. Sea $L^T := -q^T A^{-1}$, para q cualquier vector positivo, tal que al derivar la función

$$\begin{aligned} V(x) &= L^T |x| \\ &= l_1 s_1 x_1 + l_2 s_2 x_2 + \cdots + l_n s_n x_n, \end{aligned}$$

donde $s_i = \text{sign}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, con la función signo

$$\text{sgn}(x_i) = \frac{d|x_i|}{dx_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i > 0 \\ -1 & \text{si } x_i < 0 \end{cases},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= (l_1 s_1, \dots, l_n s_n) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = (l_1 s_1, \dots, l_n s_n) \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & -a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1 (-l_1 a_{11} s_1 + l_2 a_{21} s_2 + \cdots + l_n a_{n1} s_n) + \cdots \\
&\quad + x_n (l_1 a_{1n} s_1 + l_2 a_{2n} s_2 + \cdots + l_{n-1} a_{n-1n} s_{n-1} - l_n a_{nn} s_n) \\
&= |x_1| \left(-l_1 a_{11} + l_2 a_{21} \frac{s_2}{s_1} + \cdots + l_n a_{n1} \frac{s_n}{s_1} \right) + \cdots \\
&\quad + |x_n| \left(l_n a_{1n} \frac{s_1}{s_n} + l_2 a_{2n} \frac{s_2}{s_n} + \cdots + l_{n-1} a_{n-1n} \frac{s_{n-1}}{s_n} - l_n a_{nn} \right) \\
&= |x_1| \left(-l_1 a_{11} + \sum_{i \neq 1} l_i a_{i1} \frac{s_i}{s_1} \right) + \cdots + |x_n| \left(-l_n a_{nn} + \sum_{i \neq n} l_i a_{in} \frac{s_i}{s_n} \right)
\end{aligned}$$

como $\frac{s_i}{s_j} \leq 1$, entonces

$$|x_j| \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} \frac{s_i}{s_j} \leq |x_j| \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n,$$

de aquí tenemos que

$$\begin{aligned}
x_j (-l_j a_{jj} s_j + \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} s_i) &= |x_j| (-l_j a_{jj} + \sum_{i \neq j} l_i a_{ij} \frac{s_j}{s_i}) \\
&\leq |x_j| (-l_j a_{jj} + \sum_{i \neq j} l_i a_{ij}) = |x_j| L^T A_j
\end{aligned}$$

donde A_j es the j -ésima columna de la matriz A . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= (l_1 s_1, \dots, l_n s_n) A x \\
&\leq L^T A |x| \\
&= -q^T A^{-1} A |x| \\
&= -q^T |x| < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E,
\end{aligned}$$

donde

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \prod_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Ahora, consideremos el caso $x_0 \in E$, con la solución correspondiente $\varphi(t, x_0)$ del sistema lineal (1). Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n \setminus E$ tal que el segmento lineal $p_1 p_2$ que interseca al conjunto E en x_0 , se sabe que el conjunto $e^{At} p_1 p_2$ es un segmento lineal para cada $t > 0$, así que $\dot{V}(p_1) < 0$ y $tV(p_2) < 0$, por lo que la función $V(x(t))$ es decreciente en x_0 : $V(\varphi(t, x_0)) < V(x_0)$ para $t > 0$. Concluimos que $V(x(t))$ es decreciente en \mathbb{R}^n . De acuerdo al Teorema 2.7.20 de [4], el politopo convexo P es invariante con respecto al sistema lineal $\dot{x} = Ax$, por lo que el origen $x = 0$ es asintóticamente estable. \square

Resumiendo, para cada matriz Metzler y Hurwitz A existe una correspondiente familia de politopos P que son invariantes con respecto al sistema lineal (1).

Ejemplo 9. *Este ejemplo está tomado de [8]. Dada la matriz A Metzler y Hurwitz y el vector positivo L :*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } L^T = (5q_1 + 10q_2 + 20, 10q_1 + 13q_2 + 12, 5q_1 + 17q_2 + 13),$$

cada par de valores (q_1, q_2) definen un politopo P invariante con respecto al sistema lineal $\dot{x} = Ax$.

3.1. El cono de una matriz Metzler

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzler y Hurwitz, definimos el *cono convexo* $C_A \subset \mathbb{R}_+^n$ como

$$C_A := \{L \in \mathbb{R}_+^n : L^T A < 0\},$$

por los Teoremas para matrices Metzler y Hurwitz dados en [15], tenemos que C_A no es un conjunto vacío bajo las condiciones dadas en dichos Teoremas. Mediante el Lema 7 representamos a cualquier elemento del cono C_A con el vector L .

Lema 10. *El cono C_A contiene n vectores linealmente independientes.*

Demostración. *Por (1.3) de la Proposición 1 de [19], existe un vector $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) > 0$, tal que $lA < 0$.*

Mostraremos que los vectores $C_1, C_2, \dots, C_n \in C_A$, definidos como $C_i = l + \varepsilon e_i^T$, con $\varepsilon > 0$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ como la base canónica de \mathbb{R}^n , son linealmente independientes.

Es suficiente demostrar que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} l_1 + \varepsilon & l_2 & \cdots & l_n \\ l_1 & l_2 + \varepsilon & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_1 & & & l_n + \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon^n + \varepsilon^{n-1} (l_1 + l_2 + \cdots + l_n) > 0. \end{aligned}$$

□

El siguiente Teorema establece una relación entre los conos de un intervalo de matrices Metzler. Según la definición 12.2 de intervalo de matrices, de la página 529 de [5], denotado por $[A, B]$ tal que $B - A \geq 0$, considere el siguiente intervalo de matrices:

$$\mathbf{A} := \{A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n} : a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+, \text{ para toda } i, j\},$$

donde a_{ij}^\mp son entradas de A^\mp .

Teorema 11. Si $A \in \mathbf{A}$, entonces $C_{A^+} \subset C_A \subset C_{A^-}$.

Demostración. Para el caso $A \leq A^+$ demostraremos que si $L \in C_{A^+}$, entonces $L \in C_A$.

Sea $B \geq 0$ la matriz tal que

$$A + B = A^+,$$

y sea $L^T \in C_{A^+} \subset \mathbb{R}_+^2$, entonces

$$L^T (A + B) = L^T A + L^T B < 0.$$

Como $L^T B > 0$, se sigue que $L^T A < 0$. Esto es $L^T \in C_A$. Concluimos que $C_{A^+} \subset C_A$. El caso $A^- \leq A$ es similar, por lo tanto

$$C_{A^+} \subset C_A \subset C_{A^-}.$$

□

El resultado muestra que si la *robustez paramétrica* (con respecto a las variaciones de las entradas de la matriz) de la estabilidad del sistema $\dot{x} = A^+x$ es grande, la robustez del sistema $\dot{x} = Ax$ también es grande.

Considere el sistema

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}, \quad (9)$$

donde $x \in \mathbb{R}_+^n$, $b \in \mathbb{R}_+^n$, con $\bar{u} > 0$. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz Metzler y Hurwitz, tenemos un equilibrio positivo \bar{x} dado por:

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} > 0.$$

Para un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, definimos el conjunto de (*adición de Minkowski*) como

$$\bar{x} + P := \{\bar{x} + x \mid x \in P\}. \quad (10)$$

La siguiente Proposición es una consecuencia inmediata del Teorema 8.

Proposición 12. Si A es una matriz Metzler y Hurwitz, entonces el politopo convexo $\bar{x} + P$ dado por (10) es invariante con respecto al sistema (9).

Demostración. Sea $y(t) = x(t) - \bar{x}$, entonces el sistema (9) y $\dot{y} = Ay$ son equivalentes. Por lo tanto, el Teorema 8 implica que $x(t) \in \bar{x} + P$ para toda $t \geq 0$. □

Ejemplo 13. Consideremos el sistema (9) con

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{u}. \quad (11)$$

con $\bar{u} \geq 0$ constante, tal que esto genera el equilibrio positivo \bar{x} :

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u} \end{pmatrix}.$$

Para cualquier escalar $m > 0$, consideremos el vector positivo $q^T = (m, 1)$, para definir el vector L^T :

$$L^T = -q^T A^{-1} = \left(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7}, \frac{3}{7}m + \frac{4}{7} \right), \quad (12)$$

así que considerando también la función no negativa

$$L^T |x| = \left(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7} \right) |x_1| + \left(\frac{3}{7}m + \frac{4}{7} \right) |x_2|,$$

definimos los cuadriláteros invariantes

$$P_m = \{x \in \mathbb{R}^2 : L^T |x| \leq c, c > 0\}.$$

De acuerdo con la Proposición 12, tenemos que el politopo $\bar{x} + P_m$ es positivamente invariante bajo el sistema (11).

Observación 14. Si establecemos el valor $\bar{u} > 0$, con $k > m$, entonces $P_k \subset P_m$, de modo que $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = \{0\}$.

En particular, para el valor $\bar{u} = 2$, con $m \geq \frac{1}{8}$, tenemos que $\bar{x} + P_m \subset \mathbb{R}_+^2$, ver la figura 1.

Ejemplo 15. Consideremos un sistema lineal que pueda representar los subsistemas para la concentración de insulina plasmática descritos en [18, 21],

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}, \quad (13)$$

donde las variables de estado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ representan la concentración de insulina en los principales órganos del cuerpo humano (cerebro, corazón, pulmones, hígado, estómago, riñones y piel). El sistema de control propuesto en [15] considera el valor $\bar{u} = 23.349$ y el vector no negativo $b = (0, 0, 0, 0, 0, 1.418, 0)$, con el equilibrio correspondiente $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$:

$$\bar{x} = \left(\frac{21379}{1000}, \frac{21379}{1000}, \frac{21379}{1000}, \frac{12789}{1000}, \frac{16439}{1000}, \frac{4019}{125}, \frac{14483}{1000} \right).$$

Sea $q^T = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7)$ cualquier vector positivo, para definir el vector $L^T = -q^T A^{-1}$, el cual nos permite definir la función no negativa

$$L^T |x| = q_1 |x_1| + q_2 |x_2| + \cdots + q_7 |x_7|,$$

y definimos el politopo convexo

$$H = \{x \in \mathbb{R}^7 : L^T |x| \leq 1\},$$

con una traslación obtenemos el politopo $\bar{x} + H$, el cual podemos representar también como

$$\bar{x} + H = \{x \in \mathbb{R}^7 : L^T |x - \bar{x}| \leq 1\}.$$

Podemos ver que si $q_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, 7$, entonces sucede que $\bar{x} + H \subset \mathbb{R}_+^7$.

De acuerdo con la Proposición 12, tenemos que el politopo $\bar{x} + H$ es positivamente invariante con respecto al sistema (13).

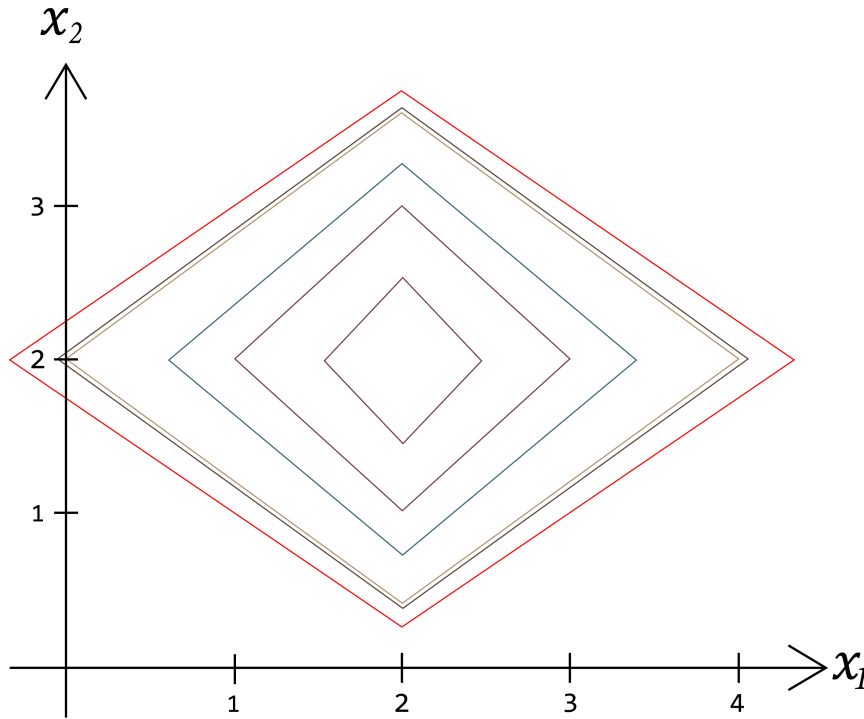


Figura 1: Para $(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7})|x_1 - 2| + (\frac{3}{7}m + \frac{4}{7})|x_2 - 2| = 1$, el rombo en línea dorada es para $m = \frac{1}{8}$ y el rombo más pequeño y el más grande son para $m = 3$ y $m = 0$ respectivamente.

Proposición 16. *Si A es una matriz Metzler y Hurwitz, entonces el politopo convexo S es invariante con respecto al sistema lineal (1).*

Demostración. *Podemos ver esta Proposición como un corolario de la Proposición 8, para el caso $|x| = x$, ya que $V : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$.* \square

Una forma de probar la invariancia del n -Simplex $S = P \cap \mathbb{R}_+^n$ es mediante la Proposición 2.1 de [7] para el sistema lineal (1), para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$, también para esto se puede consultar el Teorema 1.1 en [22] y p. 174 en [20].

Proposición 17. *(Ver la Proposición 2.1 en [7]) Cualquier politopo convexo no vacío $P \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto positivamente invariante del sistema (1) si y solo si existe una matriz Metzler $N \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tal que:*

$$QA - NQ = 0 \quad (14)$$

$$N\omega \leq 0. \quad (15)$$

donde

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Qx \leq \omega\}.$$

La siguiente proposición se refiere a la invariancia de la familia de n -Simplex S .

Proposición 18. *Si A es una matriz Metzler y Hurwitz y $L \in \mathbb{R}^n$, $L > 0$ un vector que satisface $L^T A < 0$, entonces el politopo convexo S es invariante con respecto al sistema lineal (1), donde S está definido por $n + 1$ desigualdades lineales (una \mathcal{H} -representación de un politopo)*

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Qx \leq \bar{w}\}.$$

Demostración. *Consideremos la matriz Metzler $M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, dada por*

$$M = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -L^T A & 0 \end{pmatrix},$$

y representemos el politopo S como

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Qx \leq \bar{w}\},$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} -e_1^T \\ \vdots \\ -e_n^T \\ L^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \\ L^T \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $e_i \in \mathbb{R}^n$ es el i -ésimo vector canónico. Entonces

$$M\bar{w} = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -L^T A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

esto satisface (15) de la Proposición 17. Además

$$QA = \begin{pmatrix} -A \\ L^T A \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad MQ = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -L^T A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I \\ L^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \\ L^T A \end{pmatrix},$$

entonces

$$QA - MQ = 0$$

y esto satisface (14) de la Proposición 17. □

En nuestro caso particular, asumimos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Metzler y Hurwitz, y definimos el vector positivo $L^T := -q^T A^{-1} \in \mathbb{R}_+^n$, para cualquier vector $q > 0$, además

$$S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Qx \leq \bar{w}\},$$

con matriz $Q \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$ y vector $\bar{\omega}$ dado por

$$Q = \begin{pmatrix} I_n \\ L^T \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y la invariancia de S con respecto a (1) con A matriz Metzler está demostrada por la matriz $M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ dada por

$$M = \begin{pmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -q & 0 \end{pmatrix},$$

donde M es parametrizada por el vector positivo q .

De acuerdo con la Proposición 1 de [19], podemos observar la siguiente generalización.

Observación 19. *Si el sistema lineal (1) es positivo, sea D la matriz tal que $\det DA \neq 0$. Sea además el vector $L^T = -q^T(DA)^{-1}$, con cualquier vector $q > 0$. Entonces, considerando el sistema lineal*

$$\dot{x} = DAx,$$

tenemos la equivalencia

$$L^T < 0 \quad \Leftrightarrow \quad DA \text{ es Hurwitz.}$$

Esta doble implicación es inmediata por el Teorema 2.7.20 en [4], por la invariancia del politopo P y por el Teorema 3 de la sección 6.5 de [16].

Para una aplicación de la Observación anterior véase [9].

Ejemplo 20. *Lo siguiente es un ejemplo para la Observación 19.*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad DA = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix},$$

así que el vector $L^T = -q^T(DA)^{-1} < 0$, con cualquier vector $q > 0$, y ya que $-(DA)^{-1} = -\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, entonces para el sistema $\dot{x} = DAx + b\bar{u}$, con $b = (b_1, b_2)^T > 0$ y $\bar{u} > 0$, tenemos el equilibrio \bar{x} :

$$\bar{x} = -(DA)^{-1}b\bar{u} = \frac{\bar{u}}{35} \begin{pmatrix} 6b_1 + b_2 \\ b_1 + 6b_2 \end{pmatrix},$$

así que, si $b\bar{u} > 0$, entonces $\bar{x} > 0$.

De acuerdo con el Lema 7, dada una matriz Metzler y Hurwitz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, consideramos

$$L^T = -q^T A^{-1},$$

donde el vector positivo q es arbitrario, y definimos la familia de politopos

$$U := \{x \in \mathbb{R}_+^n : L^T \bar{x}_1 \leq L^T x \leq L^T \bar{x}_2\},$$

donde $\bar{x}_1 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_2$, tal que la frontera ∂U de U es formada por los $n + 2$ segmentos de hiperplano de dimensión $n - 1$; luego los n segmentos pertenecen a la frontera $\partial \mathbb{R}_+^n$ y dos segmentos de hiperplanos r_1 y r_2 pueden ser representados por

$$r_i = \{x \in \mathbb{R}_+^n : L^T(x - \bar{x}_i) = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Proposición 21. *El politopo U es invariante con respecto al sistema lineal (9).*

Demostración. *Debido a que es un sistema positivo, es suficiente demostrar que*

$$L^T \dot{x} > 0 \text{ para } x \in r_1$$

y

$$L^T \dot{x} < 0 \text{ para } x \in r_2.$$

donde

$$L^T \dot{x} = L^T(Ax + b\bar{u}) = -q^T A^{-1}(Ax + b\bar{u}) = -q^T x + q^T \bar{x} = -q^T(x - \bar{x}).$$

Con cualquier vector positivo q tal que $q^T(x - \bar{x}) = 0$, se cumplen las siguientes desigualdades

$$q^T(x - \bar{x}_1) > 0 > q^T(x - \bar{x}_2),$$

tal que para $x \in r_1$, tenemos

$$L^T \dot{x} = -q^T(x - \bar{x}) > 0,$$

y para $x \in r_2$ tenemos

$$L^T \dot{x} = -q^T(x - \bar{x}) < 0.$$

□

Por ejemplo, consideremos el sistema (11) con (12), tal que genera el equilibrio positivo $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} = (\bar{u}, \bar{u})^T$, entonces para constantes $\bar{u} = 1, 2, 3$, los equilibrios $\bar{x}_1 = (1, 1)^T$, $\bar{x}_2 = (2, 2)^T$, $\bar{x}_3 = (3, 3)^T$ son generados.

Para cualquier escalar $m > 0$, considere el vector positivo $q^T = (m, 1)$, para definir el vector L^T :

$$L^T = -q^T A^{-1} = \left(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7} \quad \frac{3}{7}m + \frac{4}{7} \right),$$

tal que podemos definir el cuadrilátero

$$U := \{x \in \mathbb{R}_+^2 : m + 1 \leq x_1 \left(\frac{4}{7}m + \frac{3}{7} \right) + x_2 \left(\frac{3}{7}m + \frac{4}{7} \right) \leq 3m + 3\}.$$

Concluimos que para el valor $\bar{u} = 2$ y cualquier valor $m > 0$, el cuadrilátero U es invariante con respecto al sistema lineal (11).

3.2. Diseño de una función de retroalimentación lineal para la estabilización de un sistema lineal positivo

Consideremos un sistema lineal positivo con entrada escalar positiva u , dado por

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (16)$$

de modo que, nos acercamos al siguiente problema de diseño:

Dado un sistema lineal positivo del tipo (16) inestable a lazo abierto, proponemos encontrar los vectores $L^T > 0$ y K para que tengamos la desigualdad

$$L^T(A + bK)x < 0 \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}. \quad (17)$$

Para cualquier vector positivo $q > 0$, definimos el vector $L^T = -q^T A^{-1}$, y establecemos el objetivo de diseñar el vector K para que satisfaga (17).

Ejemplo 22. *Considérese (16) definido por*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con constantes positivas a_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Vemos que la matriz A es una matriz Metzler pero no una matriz Hurwitz. Ahora, considerando $|A| = -(a_1 a_4 + a_2 a_3) < 0$ y encontrando un vector renglón $K = (k_1, k_2)$, tal que la matriz

$$A + bK = \begin{pmatrix} a_1 + k_1 & a_2 + k_2 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix},$$

es Metzler y satisface la desigualdad (17). Con

$$A^{-1} = -\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix},$$

tal que

$$\begin{aligned} I + A^{-1}bK &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1, k_2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|} (|A| - a_4 k_1) & -\frac{1}{|A|} a_4 k_2 \\ -\frac{1}{|A|} a_3 k_1 & \frac{1}{|A|} (|A| - a_3 k_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L^T(A + bK) &= -q^T(I + A^{-1}bK) = -(q_1, q_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{|A|} (|A| - a_4 k_1) & -\frac{1}{|A|} a_4 k_2 \\ -\frac{1}{|A|} a_3 k_1 & \frac{1}{|A|} (|A| - a_3 k_2) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{|A|} (a_3 k_1 q_2 - |A| q_1 + a_4 k_1 q_1), \frac{1}{|A|} (a_3 k_2 q_2 - |A| q_2 + a_4 k_2 q_1) \right), \end{aligned}$$

con $k_1 = -2a_1$ y $k_2 = 0$,

$$\begin{aligned} L^T(A + bK) &= \left(\frac{1}{|A|} (a_3(-2a_1)q_1 - |A|q_1 + a_4(-2a_1)q_1), \frac{1}{|A|} (-|A|q_2) \right) \\ &= \left(-\frac{1}{|A|} (|A|q_1 + 2a_1 a_3 q_2 + 2a_1 a_4 q_1), -q_2 \right) < 0. \end{aligned}$$

4. Conclusiones

Hemos presentado resultados que permiten describir la geometría de la estabilidad para una familia de sistemas lineales positivos. Se describe también la estabilidad de sistemas positivos bajo la invariancia de una familia de n -octaedros y n -Simplex. Tal familia de polítopos se define como conjunto de nivel de funciones lineales por partes. Para el caso general, el Lema 3 establece condiciones necesarias y suficientes sobre los vértices para tener la invariancia de un polítopo, de manera que puedan servir para diseñar un estabilizador lineal, damos un ejemplo en el plano para mostrar el estabilizador diseñado.

Para el caso de sistemas lineales positivos, donde la matriz A es Metzler y Hurwitz, se define un cono convexo C_A , cuyos elementos vectores L configuran hiperoctaedros P que son positivamente invariantes con respecto al sistema lineal (1). Con el Teorema 11 mostramos el vínculo entre el tamaño del cono C_A y la robustez del sistema lineal (1). También para sistemas positivos, mediante la Proposición 16 mostramos la invariancia de una familia de conjuntos n -Simplex S , delimitada por los ejes y el hiperplano definido por los vectores $L \in C_A$. Damos ejemplos en el plano para mostrar los polítopos invariantes y la estabilización de un sistema.

Para los sistemas no lineales autónomos $\dot{x} = f(x)$, con campo vectorial $f(x)$ de clase \mathcal{C}^1 , hay resultados parciales sobre condiciones suficientes para la existencia, unicidad y estabilidad de los equilibrios positivos. En general, los resultados recientes consideran casos especiales de $f(x)$.

Referencias

- [1] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [2] Z. Bartosiewicz, “Stability and stabilization of linear positive systems on time scales,” *Positivity*, vol. 24, no. 5, pp. 1361–1372, 2020. DOI: 10.1007/s11117-020-00735-z
- [3] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. SIAM, 1994.
- [4] N. P. Bhatia and G. P. Szegö, *Stability theory of dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [5] S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel, “Robust control: the parametric approach,” in *Advances in control education 1994*. Elsevier, 1995, pp. 49–52.
- [6] V. S. Bokharaie, O. Mason, and F. Wirth, “Stability and positivity of equilibria for subhomogeneous cooperative systems,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 74, no. 17, pp. 6416–6426, 2011. DOI: 10.1016/j.na.2011.06.023
- [7] E. B. Castelan and J. C. Hennes, “On invariant polyhedra of continuous-time linear systems,” *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 38, no. 11, pp. 1680–1685, 1993. DOI: 10.1109/9.262058
- [8] B. Du, S. Xu, Z. Shu, and Y. Chen, “On positively invariant polyhedrons for continuous-time positive linear systems,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 17, pp. 12 571–12 587, 2020. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2020.05.013
- [9] A. C. Enthoven and K. J. Arrow, “A Theorem on Expectations and the Stability of Equilibrium,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 288–293, 1956. DOI: 10.2307/1911633
- [10] A. Fall, A. Iggidr, G. Sallet, and J.-J. Tewa, “Epidemiological models and Lyapunov functions,” *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 2, no. 1, pp. 62–83, 2007. DOI: 10.1051/mmnp:2008011
- [11] L. Farina and S. Rinaldi, *Positive linear systems: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2000, vol. 50.
- [12] Z. Horváth, Y. Song, and T. Terlaky, “A Novel Unified Approach to Invariance for a Dynamical System,” *arXiv preprint arXiv:1405.5167*, 2014. DOI: 10.48550/arXiv.1405.5167
- [13] W. Leontief, *Input-output economics*. Oxford University Press, 1986.
- [14] H. Leyva, G. Quiroz, F. Carrillo, and R. Femat, “Rapid insulin stabilization via sliding modes control for T1DM therapy,” in *Memorias del Congreso Nacional de Control Automática AMCA*, 2013.

- [15] H. Leyva, F. A. Carrillo, G. Quiroz, and R. Femat, “Robust stabilization of positive linear systems via sliding positive control,” *Journal of Process Control*, vol. 41, pp. 47–55, 2016. DOI: 10.1016/j.jprocont.2016.03.001
- [16] D. G. Luenberger, *Introduction to dynamic systems: theory, models, and applications*. Wiley New York, 1979, vol. 1.
- [17] M. W. McConley, B. D. Appleby, M. A. Dahleh, and E. Feron, “A control Lyapunov function approach to robust stabilization of nonlinear systems,” in *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, vol. 1. IEEE, 1997, pp. 329–333.
- [18] G. Quiroz and R. Femat, “On hyperglycemic glucose basal levels in Type 1 Diabetes Mellitus from dynamic analysis,” *Mathematical biosciences*, vol. 210, no. 2, pp. 554–575, 2007. DOI: 10.1016/j.mbs.2007.06.004
- [19] A. Rantzer, “Scalable control of positive systems,” *European Journal of Control*, vol. 24, pp. 72–80, 2015. DOI: 10.1016/j.ejcon.2015.04.004
- [20] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*. Princeton university press, 1997, vol. 11.
- [21] J. T. Sorensen, “A physiologic model of glucose metabolism in man and its use to design and assess improved insulin therapies for diabetes,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1985.
- [22] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*. Springer New York, NY, 1995.

Como citar este artículo: Leyva Castellanos, H. , Carrillo Navarro, F. A. , Quiroz Compeán, G., y Femat Flores, R. (2023). Estabilidad de sistemas lineales positivos por politopos invariantes. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365, 7(1): 1–19. <https://doi.org/10.36788/sah.v7i1.136>.