

El Método de Soluciones Fundamentales y su uso en problemas Dirichlet para el operador de Laplace

Centeno Mora Jesús Felipe¹,
Universidad Autónoma de Querétaro.
¹centeno17@hotmail.com

Resumen

En esta trabajo se hace una exposición del Método de Soluciones Fundamentales (MFS, por sus siglas en inglés), el cual es un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales parciales elípticas con condiciones en la frontera. La exposición se concentra en el caso particular del operador de Laplace, se presentan además ejemplos de prueba para tal operador con condiciones en la frontera del tipo Dirichlet sobre dominios circulares con variantes en cuanto a la configuración, como lo son la elección de diferentes fronteras virtuales y la variación en la distribución tanto de los puntos de colocación como de las ubicaciones de las fuentes puntuales. Se obtuvieron datos con el propósito de observar el impacto que cada configuración tuvo en la exactitud y en la estabilidad numérica del método.

Palabras Clave: Condición Dirichlet, condiciones en la frontera, estabilidad numérica del método, exactitud, Método de Soluciones Fundamentales, MFS, operador de Laplace, operador elíptico.

DOI:10.36788/sah.v7i1.134

Recibido:23 de enero de 2023

Aceptado 05 de junio de 2023

Introducción

“El método de soluciones fundamentales (MFS por sus siglas en inglés) es una técnica para la solución numérica de ciertos problemas elípticos con valores en la frontera que pertenece a la clase de métodos conocida generalmente como métodos de frontera.”

[Fairweather & Karageorghis, 1998, p. 69].

Entre los antecedentes del MFS se pueden mencionar los llamados métodos de Trefftz, en los cuales, dado una ecuación diferencial parcial elíptica con condiciones en la frontera, la solución se aproxima a través de combinaciones lineales de soluciones particulares de la ecuación dada, todo lo anterior suponiendo que dichas combinaciones lineales son densas en el espacio de soluciones. Esta manera de abordar los problemas elípticos fue presentada por Erich Trefftz en el año 1926. Posteriormente Mergelyan demostró en 1952 que funciones holomorfas en dominios acotados simplemente conexos en \mathbb{C} pueden ser aproximadas mediante polinomios, mientras que si los dominios son múltiplemente conexos (i. e. conexos pero no

simplemente conexos) entonces las funciones se pueden aproximar usando funciones racionales. El trabajo de Mergelyan fue la culminación de los avances realizados por Runge, Walsh, Lavrent'ev y Keldysh en el tema de aproximaciones polinómicas y racionales desde finales del siglo XIX. El Método de Soluciones Fundamentales representa una continuación de toda la labor mencionada, ya que las soluciones particulares de la ecuación diferencial parcial bajo consideración son las soluciones fundamentales, denotadas por $\phi(x, s)$, con $x, s \in \mathbb{R}^n$ del correspondiente operador diferencial [Smyrlis, 2009].

Definición 1. Si \mathcal{L} denota un operador diferencial parcial en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y tenemos la ecuación $\mathcal{L}u = 0$ en Ω , decimos que una **solución fundamental** de dicha ecuación diferencial es una función $\phi(x, s)$ [esta notación se usará de aquí en adelante] tal que:

$$\mathcal{L}_x \phi(\cdot, s) = \delta_s, \quad s \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

donde $\mathcal{L}_x \phi$ indica que la función ϕ se deriva con respecto a x y δ_s es la medida de Dirac con masa unitaria en s .

Nótese que la función ϕ está definida en todas partes, excepto cuando $x = s$, donde es singular. Por lo tanto se dice que s es la singularidad de la solución fundamental.

En particular, si \mathcal{L} es elíptico con coeficientes constantes, entonces $\phi(\cdot, s)$ es real-analítica en $\mathbb{R}^n \setminus \{s\}$ y satisface que $\mathcal{L}_x \phi(x, s) = 0$ para todo x en $\mathbb{R}^n \setminus \{s\}$ (para la justificación de estos hechos, véase [Rudin, 1973, pp. 201 - 204]). Felix Browder demostró en 1962 que las soluciones fundamentales de operadores elípticos con singularidades en un conjunto abierto arbitrario U fuera de un dominio conexo $\bar{\Omega}$, son densas, en el sentido de la norma uniforme, en el espacio $\mathcal{X} = \{u \in C^m(\Omega) : \mathcal{L}u = 0 \text{ en } \Omega\} \cap C(\bar{\Omega})$. Posteriormente Weinstock amplió los resultados de Browder a dominios acotados que satisfacen una condición de regularidad más débil, a saber, la condición de segmento. Por lo mencionado acerca de la naturaleza de los operadores elípticos y que, a diferencia de otras clases de operadores, ha permitido avances importantes en el análisis teórico de sus soluciones fundamentales, se explica que el MFS esté tan enfocado en la resolución de problemas del tipo elíptico.

En el Método de Soluciones Fundamentales, las singularidades de las soluciones fundamentales son ubicadas *fuera* del dominio Ω , debido a lo cual debe recalcar lo siguiente: **la combinación lineal de soluciones fundamentales que se usa en el MFS es solución exacta de la ecuación diferencial en consideración, en el dominio Ω ; cuando se habla de una solución aproximada se está haciendo referencia al problema con condiciones en la frontera, es decir, a la ecuación acompañada de las condiciones de frontera estipuladas.** Cabe mencionar que las soluciones fundamentales fueron introducidas por Laurent Schwartz, mientras que los autores Malgrange y Ehrenpreis demostraron la existencia de dicho tipo de soluciones para operadores diferenciales parciales con coeficientes constantes [Smyrlis, 2009]. El MFS fue introducido por Kupradze y Aleksidze en 1963 e inicialmente se conoció como Método de series generalizadas de Fourier. En esta versión inicial del método, para la solución de problemas de Laplace, como el siguiente

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con condiciones tipo Dirichlet en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, sin agujeros, las singularidades eran colocadas sobre una *frontera virtual*, es decir, una frontera prescrita $\partial\Omega'$ de un dominio Ω' , satisfaciendo que $\bar{\Omega} \subset \Omega'$. La función $\phi(x, y) = e_1(x - y)$, donde

$$e_1(x) = \begin{cases} -\frac{\log|x|}{2\pi}, & \text{si } n = 2 \\ -\frac{|x|^{2-n}}{(2-n)\omega_{n-1}}, & \text{si } n > 2 \end{cases} \quad (2)$$

es una solución fundamental del operador Laplaciano (más precisamente de $-\Delta$, el cual es un operador elíptico de acuerdo a la definición), donde ω_{n-1} es el área de la superficie de la esfera unitaria S^{n-1} en \mathbb{R}^n y $|\cdot|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^n .

Las primeras innovaciones técnicas realizadas al MFS fueron llevadas a cabo por Mathon y Johnston en 1977. En el tratamiento que realizaron dichos autores los coeficientes de la combinación lineal que sirve como aproximación a la solución se elegían de manera tal que se minimizara la distancia (L^2) de la solución aproximada a los datos de frontera. La ubicación de las singularidades no era preestablecida, sino que también se determinaba a través del proceso de minimización, esto implicaba que se tuviera que resolver un problema de optimización no lineal.

En las décadas más recientes se han formulado varias maneras de implementar el MFS, pero hay dos que son las de uso más extendido:

- En la primera versión las singularidades se ubican en una superficie fija. Esto da origen a la necesidad de resolver un sistema lineal. *Ésta es la versión que se utiliza en el presente trabajo.*
- En la versión alternativa la ubicación de las singularidades se determina como parte de la solución del problema discreto. Esto conduce a un proceso de optimización no lineal. [Smyrlis, 2009].

“Los primeros usos del método fueron para la solución de varios problemas de potencial lineal en dos y tres variables espaciales. Desde entonces ha sido aplicado a una variedad de problemas más complicados tales como problemas de potencial plano involucrando condiciones en la frontera no lineales tipo radiación, problemas de frontera libre, problemas biarmónicos, problemas elastostáticos y problemas de dispersión de ondas.” [Fairweather & Karageorghis, 1998, p. 71].

El Método de Soluciones Fundamentales se ha convertido, por su relativa facilidad de implementación, en una opción viable ante otros métodos clásicos, como lo son: el método de diferencias finitas (FDM), el método de elemento finito (FEM), el método de volumen finito (FVM) y el método de elemento de frontera (BEM). Todos estos métodos son conocidos como métodos ‘dependientes de malla’, mientras que el MFS pertenece a los métodos ‘libres de malla’. [Tsai et al., 2006].

Planteamiento

En la formulación del MFS que se usa en la presente investigación, los coeficientes, c_j , de la combinación lineal de soluciones fundamentales, que representa la aproximación a la solución del problema dado, se obtienen por medio de la colocación de los datos de frontera. En el caso de un problema con condición Dirichlet, lo anterior se realiza al elegir M puntos $\{s_j\}_{j=1}^M$ sobre $\partial\Omega'$ (la frontera virtual), en los cuales se ubican las llamadas *fuentes puntuales* (singularidades); y N puntos $\{x_k\}_{k=1}^N$, los *puntos de colocación*, sobre la frontera real $\partial\Omega$, y se requiere que la solución aproximada $u_{M,N}$ satisfaga:

$$u_{M,N}(x_k; c) = \sum_{j=1}^M c_j \phi(x_k, s_j) = f(x_k), \quad k = 1, \dots, N \quad (3)$$

donde los $c = \{c_j\}_{j=1}^N$, son los coeficientes por determinar y $f(x_k)$ es la condición de frontera evaluada en el punto x_k . La igualdad (3) determina un sistema lineal no homogéneo $M \times N$. Si se cumple que $M = N$, el sistema tiene solución única si la matriz del sistema no es singular. En esta investigación el MFS se implementará usando el mismo número de fuentes puntuales, s_j , que de puntos de colocación x_k , por consecuencia la matriz del sistema será siempre una matriz cuadrada, y por ello en lo subsecuente se denotará con u_N a la solución aproximada.

Es importante mencionar que, teóricamente, el hecho de ubicar las fuentes puntuales ‘más lejos’ del dominio, Ω , nos da como resultado un peor condicionamiento, es decir, la estabilidad del problema se ve disminuida; sin embargo la exactitud de la solución aproximada se incrementa. La cuestión relacionada con el condicionamiento tiene importancia significativa, ya que si se quiere sacrificar estabilidad con el objetivo de aumentar la exactitud, entonces se deben tomar en cuenta otros factores tales como la precisión de la computadora en la cual realicemos los cálculos.

“Bogomolny (1985) mejoró los fundamentos teóricos del MFS cuando se consideran ubicaciones *a priori* de las fuentes puntuales. Como resultado, el MFS se vuelve más fácil y más eficiente en implementaciones prácticas. Sin embargo, el mal condicionamiento y la ubicación de las fuentes puntuales son cuestiones problemáticas desde el punto de vista numérico.” [Tsai et al., 2006, p. 103].

Sin embargo, para el orden del error, se cuenta con resultados para ciertas configuraciones [Fairweather & Karageorghis, 1998, pág. 5], por ejemplo: para los dominios circulares de radio r , con frontera virtual igualmente circular, de radio R , en los que tanto las singularidades como los puntos de colocación sean distribuidos uniformemente, se sabe que:

$$\sup_{P \in \Omega} |u(P) - u_N(P)| = O\left(\left(\frac{r}{R}\right)^N\right) \quad (4)$$

Planteamiento del problema elíptico

Se considera ahora el **problema elíptico**:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, & \text{en } \Omega \\ Bu = f, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

donde \mathcal{L} es un operador diferencial parcial elíptico, u es la variable dependiente por ser determinada, Ω es un subconjunto abierto acotado en \mathbb{R}^n , B es el operador diferencial asociado con la función f de la condición de frontera y $\partial\Omega$ denota la frontera del dominio Ω . La forma del operador B que especifica la **condición de frontera** se expresa a través de:

$$Bu(x) = \begin{cases} a(x) + u(x), & x \in \partial\Omega_1 \text{ (condición tipo Dirichlet),} \\ a(x) + \frac{\partial u}{\partial n}(x), & x \in \partial\Omega_2 \text{ (condición tipo Neumann),} \\ a(x) + b(x)u(x) + c(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x), & x \in \partial\Omega_3 \text{ (condición tipo Robin),} \end{cases} \quad (6)$$

donde a , b y c son funciones prescritas, y $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$. El objetivo del Método de Soluciones Fundamentales es aproximar la solución a (5) a través de una función que tiene la forma:

$$u_N(x; c) = \sum_{j=1}^N c_j \phi(x, s_j)$$

es decir, una función que es combinación lineal de soluciones fundamentales $\phi(x, s_j)$ de la ecuación diferencial dada, donde las s_j son las ubicaciones de las singularidades de dichas funciones.

El presente trabajo de investigación se basa fundamentalmente en el análisis teórico presentado por Yiorgos Smyrlis [Smyrlis, 2009], ya que en su propuesta se estudia la aproximación a través de soluciones fundamentales usando normas más adecuadas, como lo son las normas de los espacios $C^\ell(\bar{\Omega})$. Tales normas corresponden a las formulaciones clásicas de los problemas elípticos con valores en la frontera. Otra ventaja es que los dominios incluidos en las justificaciones pueden poseer agujeros.

Metodología

Antes de exponer los pasos que se seguirán en la implementación del MFS, cabe mencionar que Bogomolny (1985) propuso ubicar a las fuentes puntuales, *i. e.* las singularidades de las soluciones fundamentales, uniformemente distribuidas sobre la frontera de un círculo que *abarque* al dominio computacional Ω . Por otro lado Heise (1976) propone ubicarlas sobre una frontera virtual, denotada por $\partial\Omega'$, que sea equidistante de la frontera real, $\partial\Omega$. El autor Tsai (véase [Tsai et al., 2006]) sugiere seguir el método de Heise, que generalmente proporciona mejores resultados en dominios con formas básicas; de manera que, siguiendo tal recomendación, el procedimiento para ubicar a las fuentes puntuales que se siguió en los primeros experimentos numéricos en esta investigación es el siguiente: considerando el dominio computacional en cuestión, Ω , y siendo $\partial\Omega$ su frontera, entonces:

- I. Los puntos de colocación se distribuyen uniformemente sobre $\partial\Omega$.
- II. Se localiza el centro geométrico, x_c , del dominio Ω (el centro geométrico también es conocido como **centroide**).
- III. Las fuentes puntuales se ubican de acuerdo a la ecuación siguiente

$$s = x_k + \lambda(x_k - x_c) \quad (7)$$

donde s_j y x_k son las coordenadas de las ubicaciones de las fuentes puntuales y de los puntos de colocación, respectivamente; λ es un parámetro escalar que determina la ‘cercanía’ de las fuentes puntuales, s_j , a la frontera real, $\partial\Omega$.

La figura 1 muestra de manera esquemática el resultado de aplicar el procedimiento anterior a cierto dominio (en este caso un dominio rectangular):

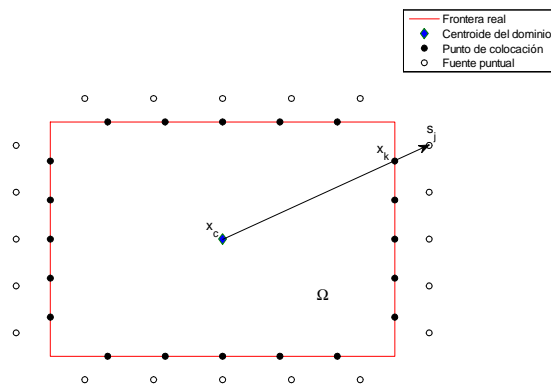


Figura 1: Esquema del procedimiento de ubicación de las fuentes puntuales

Sin embargo, uno de los propósitos de este trabajo es explorar distintas variantes en cuanto a las configuraciones de las fronteras virtuales, de manera que cuando se usó una frontera virtual de distinta forma a la de la frontera real, se usó el procedimiento siguiente:

- I. Los puntos de colocación se distribuyen uniformemente sobre $\partial\Omega$.
- II. Se localiza el centro geométrico, x_c , del dominio Ω .
- III. Las fuentes puntuales no se obtienen a través de una transformación homotética sino de una transformación proyectiva de los puntos de colocación, con x_c como foco de la proyección y con $\lambda > 1$; de manera que la ecuación (7) sigue siendo válida para cada una de las fuentes puntuales consideradas de manera individual.

Una vez que fueron realizados los experimentos con distribución uniforme de los puntos de colocación, se procedió al uso de distribuciones no uniformes. La distribución en estos casos se basó en el concepto de "nodos de Chebyshev". El lector puede encontrar una breve explicación al respecto en la siguiente sección. El procedimiento que se siguió fue el siguiente:

- I. Los puntos de colocación se distribuyen uniformemente sobre $\partial\Omega$ (o en función del experimento, la distribución uniforme se realiza sobre la frontera virtual).
- II. Las fuentes puntuales se distribuyen de forma no uniforme, basados en el concepto de nodos de Chebyshev (o dependiendo del experimento, se usa la distribución no uniforme de los puntos de colocación). Cabe destacar que en este caso la ecuación (7) deja de ser válida (*i. e.* un punto de colocación específico no se encuentra sobre el mismo radio-vector que su correspondiente fuente puntual).

Una vez explicada la metodología seguida para ubicar a las fuentes puntuales, ahora se continúa con la exposición de los pasos por seguir en la implementación del Método de Soluciones Fundamentales. A grandes rasgos la implementación numérica del MFS consiste en:

1. Si la ecuación diferencial correspondiente a nuestro problema es $\mathcal{L}u = 0$ en Ω , determinar una función, $\phi(x, s)$, tal que $\mathcal{L}_x\phi(\cdot, s) = \delta_s$, con $s \in \mathbb{R}^n$ (*i. e.* determinar la solución fundamental para la ecuación dada).
2. Seleccionar $\{x_k\}_{k=1}^N$ de puntos sobre $\partial\Omega$ (*frontera real*). Éstos son los puntos de colocación.
3. De acuerdo a la configuración específica del experimento, determinar la ubicación de las fuentes puntuales $\{s_j\}_{j=1}^N$ usando alguno de los procedimientos de los párrafos inmediatos anteriores de esta misma sección.
4. Se toma una de las s_j y se obtiene $\phi(x, s_j)$; el resultado de dicha sustitución debe ser acompañado por un coeficiente c_j que queda por determinar. Se realiza el mismo procedimiento para las demás s_j y finalmente se obtiene $w(x) := \sum_{j=1}^N c_j\phi(x, s_j)$.
5. Se toma uno de los x_k (ver el paso 2) y se sustituye en la condición de frontera, se obtiene después $w(x_k)$ y se establece una ecuación entre los resultados correspondientes. Se realiza el mismo procedimiento para las demás x_k . De esta manera, se obtiene el sistema lineal (3).
6. Se soluciona el sistema lineal (3), obtenido en el paso 5. De esta manera quedan determinados los coeficientes c_j de la combinación lineal del paso 4; dicha combinación lineal de soluciones fundamentales es la aproximación, $u_N(x; c) = \sum_{j=1}^N c_j\phi(x, s_j)$, a la solución del problema que está en cuestión.

En el presente trabajo se analizará la exactitud del MFS, así como su estabilidad numérica; para ello se seleccionarán *ejemplos de prueba*, es decir, problemas con soluciones exactas conocidas [dichas soluciones se denominarán *soluciones de prueba*], se aplicará el método, se tomarán puntos en el dominio del problema [denominados de aquí en adelante como *puntos de prueba*], se evaluará tanto la aproximación como la solución exacta en dichos puntos y se determinará el error relativo y el **número de condición** de la matriz del sistema. De esta manera se pretende observar cómo varía la exactitud y la estabilidad numérica del método con respecto a los siguientes factores: la distancia de la frontera virtual, $\partial\Omega'$, al dominio del problema (Ω), la cantidad de términos, N , usados en la aproximación, la configuración de la frontera virtual usada y la manera en que se distribuyen los puntos de colocación y las fuentes puntuales.

Ejemplos de prueba y resultados

Operador Laplaciano

Denotemos por Ω un dominio plano (i. e. un conjunto abierto, conexo y no vacío en \mathbb{R}^2). La ecuación de Laplace se expresa de la forma siguiente:

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (8)$$

Una función $u \in C^2(\Omega)$ que satisfaga (8) es llamada *función armónica en Ω* [Pinchover, 2005].

Para el operador Laplaciano la solución aproximada al problema con valores en la frontera, expresada como combinación lineal de soluciones fundamentales (ver [Tsai et al., 2006], [Smyrlis, 2009]), es de la forma:

$$u_N(x; c) = \sum_{i=1}^N c_i \left[\frac{-1}{2\pi} \ln \left(\frac{|x - s_i|}{R} \right) \right], \quad R > 0, \quad x \in \Omega \quad (9)$$

donde N es el número de puntos de colocación usados (que en este trabajo coincide con el número de fuentes puntuales); los c_j son los coeficientes por determinar, y los s_j son las ubicaciones de las fuentes puntuales, determinadas a partir de las directivas expuestas en la sección de Metodología.

Problemas con condición en la frontera tipo Dirichlet

El problema de Laplace con condición en la frontera tipo Dirichlet es de la forma:

$$\begin{cases} \Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

Para la implementación numérica se requiere tener los valores de la función desconocida u en N puntos diferentes ubicados en la frontera $\partial\Omega$.

En los ejemplos de prueba siguientes se usa el procedimiento expuesto en la Metodología, en la implementación del MFS.

Nodos de Chebyshev

Cuando se quiere aproximar una función, $f(x)$, a través del uso de una interpolación polinomial, dentro de un intervalo $[a, b]$, y se usan nodos uniformemente espaciados dentro de dicho intervalo, se observa un fenómeno conocido como **fenómeno de Runge**. Este fenómeno consiste en la presencia de grandes oscilaciones cerca de los extremos del intervalo. Si la cantidad de nodos es aumentada, entonces las oscilaciones incrementan aún más su amplitud. Este fenómeno es indeseado ya que significa una sensible disminución de la exactitud de la aproximación en las regiones cercanas a los extremos del intervalo.

Al usar nodos de Chebyshev para construir un polinomio de interpolación, el error debido al fenómeno de Runge es mucho más pequeño. Bajo la condición de usar nodos de Chebyshev, el error de hecho tenderá a ser cero conforme aumenta el número de nodos usados. Los **nodos de Chebyshev**, en el intervalo $[-1, 1]$, son los valores de abscisas que se obtienen al aplicar la siguiente fórmula

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \text{ para } k = 0, 1, \dots, n-1$$

donde n es la cantidad de nodos deseados. [Mathews & Fink, 1999, pp. 232 - 240].

Si se quiere obtener los nodos de Chebyshev en el intervalo $[a, b]$, lo que se hace es aplicar una transformación afín a las abscisas obtenidas mediante la fórmula anterior, de manera que

$$x_k = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) + \frac{a+b}{2}, \text{ para } k = 0, 1, \dots, n-1$$

ésta es la fórmula que se usó en los ejemplos de prueba de este sección, pero se usó para determinar los valores del parámetro t que determinan la ubicación de los puntos de colocación, de acuerdo a las ecuaciones paramétricas que generan las respectivas fronteras de los dominios.

Dominio circular

OBSERVACIONES PRELIMINARES:

1. Los dominios utilizados en la presente investigación son todos circulares; bibliografía, resultados numéricos y teóricos para otro tipo de dominios pueden encontrarse en [Smyrlis, 2009, pág. 1402 y 1403].
2. En los experimentos se calcula en unos casos, el error relativo cuando la distancia de las singularidades al dominio se deja fija y lo que cambia es la cantidad de puntos utilizados; en otros casos se calcula el error relativo que se obtiene al variar la distancia de las singularidades al dominio, dejando fija la cantidad de puntos usados. Esto tiene como finalidad comparar el efecto por separado de ambos factores y reportarlo en las conclusiones.

- Solución de prueba: $f(x, y) = x + y + 3$

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$

Esquemas de las configuraciones usadas en los experimentos

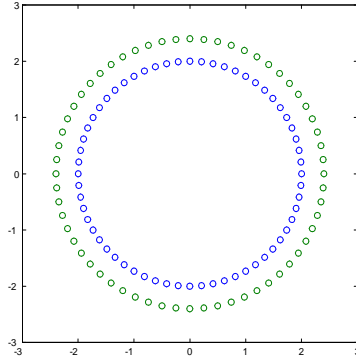


Figura 2: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar distribuciones uniformes. Dominio circular con frontera virtual circular.

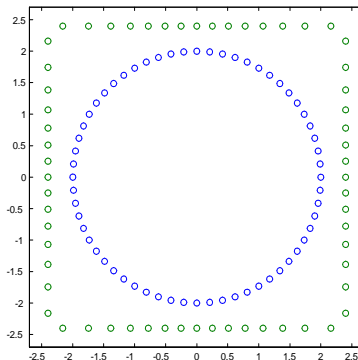


Figura 3: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar distribuciones uniformes. Dominio circular con frontera virtual cuadrada.

Comportamiento del error relativo al interior del dominio

Experimento 0.0a

Se usaron en el experimento los valores de $N = 10, 15, 20, 25$ y 30 términos en la solución aproximada; en todos los casos se mantuvo el parámetro λ (el parámetro que determina la ubicación de la frontera virtual) en un valor $\lambda = 1,2$, lo que implica que las fuentes puntuales se ubicaron sobre una circunferencia de radio $2,4$ ($2 \times 1,2 = 2,4$). Se presenta en la figura

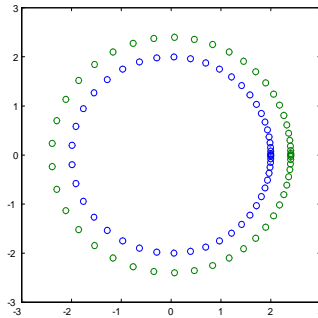


Figura 4: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar NODOS DE CHEBYSHEV. Dominio circular con frontera virtual circular.

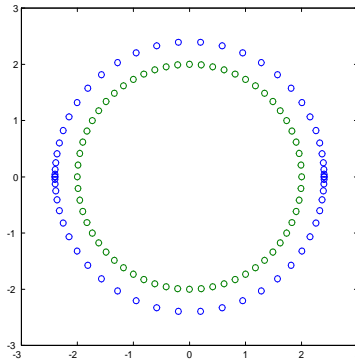


Figura 5: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar NODOS DE CHEBYSHEV. Dominio circular (distribución uniforme) con frontera virtual circular (distribución no uniforme simétrica).

8 el comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio:

Se observa que el error disminuye al incrementarse el número de términos incluidos en la aproximación; de hecho, al tomarse el valor máximo de error relativo en cada una de las gráficas y calcular la variación porcentual entre dos valores consecutivos, se observaron disminuciones alrededor del 70% por cada incremento de 5 términos usados en la solución aproximada [véase el cuadro 1].

Experimento 0.0c

En el experimento se usaron los valores $\lambda = 1,2, 1,3, 1,4, 1,5$ y $1,6$; en todos los casos se mantuvo la cantidad de términos usados en la aproximación en 10. Entonces en este experimento el objetivo fue observar el comportamiento del error al cambiar la distancia de la frontera virtual con respecto al dominio del problema, manteniendo fija la cantidad de términos en la combinación lineal de soluciones fundamentales. Se presenta en la figura 9 el

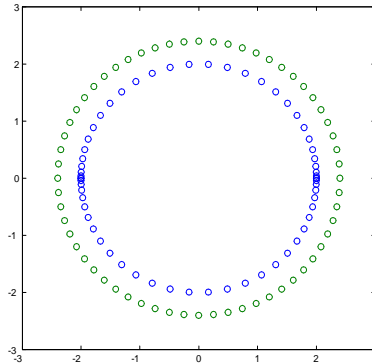


Figura 6: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar NODOS DE CHEBYSHEV. Dominio circular (distribución no uniforme simétrica) con frontera virtual circular (distribución uniforme).

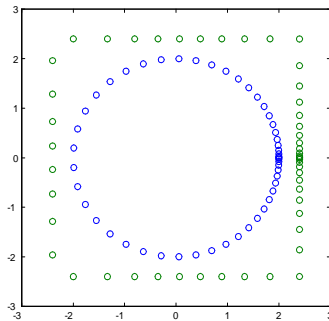


Figura 7: Distribución de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales al usar NODOS DE CHEBYSHEV. Dominio circular con frontera virtual cuadrada.

Gráfica ($\lambda = 1,2$)	Valor máximo de error relativo sobre la gráfica	Variación porcentual
10 términos	0.0362493251182666	
15 términos	0.00953803573420945	-73.6876874173774
20 términos	0.00284544375165032	-70.1674031116831
25 términos	0.000912127443548269	-67.9442813438415
30 términos	0.000305176460177167	-66.5423442375552

Cuadro 1: Experimento 0.0a. Cuadro comparativo. Dominio circular

comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio:

Se observa que el error disminuye al incrementarse el valor del parámetro λ . De igual manera que en el primer experimento, se tomó el máximo valor de error relativo en cada una

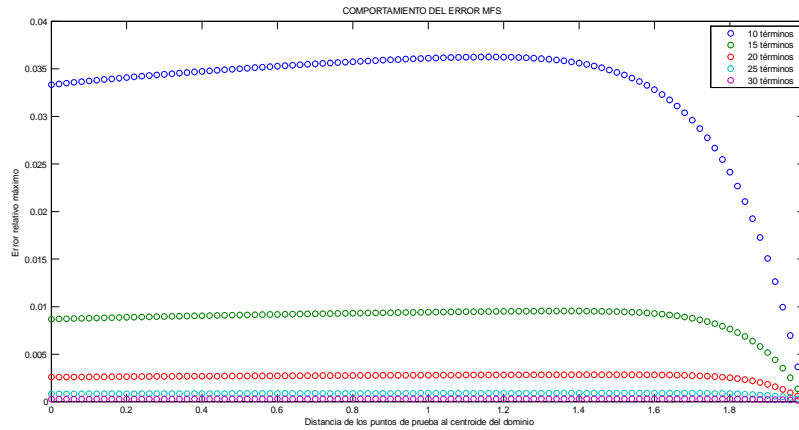


Figura 8: Experimento 0.0a. Comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. Número de términos en la solución aproximada: 10, 15, 20, 25 y 30. Lambda= 1.2

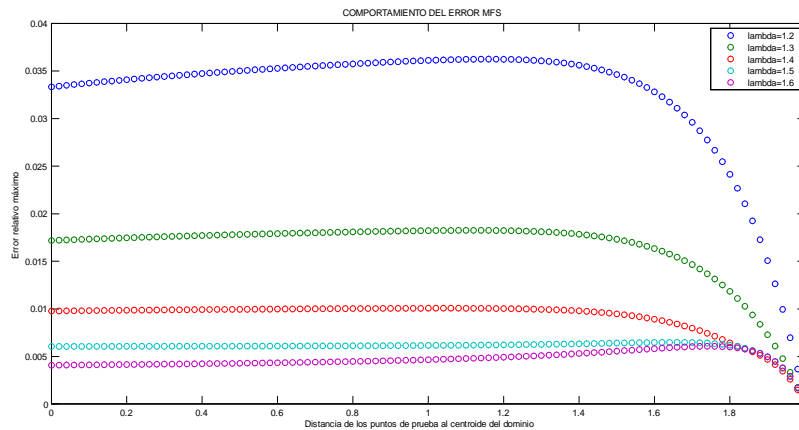


Figura 9: Experimento 0.0c. Comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. Valores de lambda: 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6. Número de términos en la aproximación: 10

de las gráficas, observándose una disminución porcentual, en tal valor, de alrededor del 50 %, en el paso de $\lambda = 1,2$ a $\lambda = 1,3$, sin embargo, la disminución fue decreciendo hasta llegar a un valor de aproximadamente 6.3 %, en el paso de $\lambda = 1,5$ a $\lambda = 1,6$ [véase el cuadro 2].

Experimento 0.1a

En el experimento, se tuvo como objetivo observar el comportamiento del error relativo máximo, pero esta vez utilizando una frontera virtual de forma cuadrada. Se usaron



Gráfica (10 términos)	Valor máximo de error relativo sobre la gráfica	Variación porcentual
$\lambda = 1,2$	0.0362493251182666	
$\lambda = 1,3$	0.0182478238784219	-49.6602383109568
$\lambda = 1,4$	0.0100611333666954	-44.8639277004821
$\lambda = 1,5$	0.00647995374155604	-35.5941969420052
$\lambda = 1,6$	0.00606802537479935	-6.35696462021003

Cuadro 2: Experimento 0.0c. Cuadro comparativo. Dominio circular

10, 15, 20, 25 y 30 términos en la solución aproximada; en todos los casos se mantuvo el parámetro λ (el parámetro que determina la ubicación de la frontera virtual) en un valor $\lambda = 1,2$, lo que implica que las fuentes puntuales se ubicaron sobre un cuadrado de lado 4,8 ($4 \times 1,2 = 4,8$). Se presenta en la figura 10 el comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio:

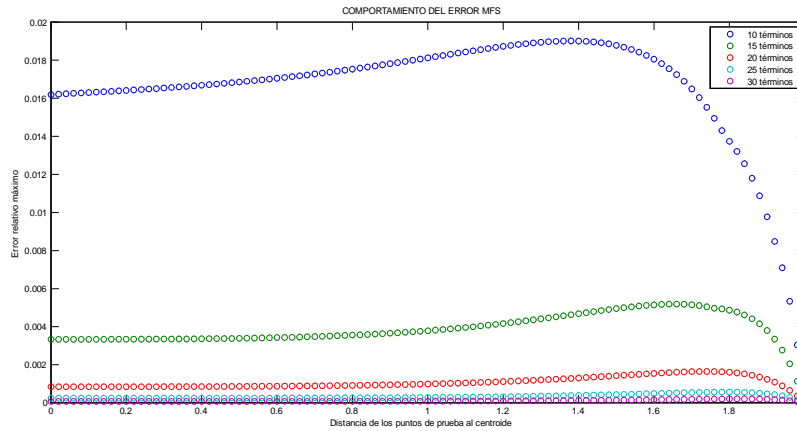


Figura 10: Experimento 0.1a. Comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular, frontera virtual cuadrada. Número de términos en la solución aproximada: 10, 15, 20, 25 y 30. Lambda= 1.2

Se observa que el error disminuye al incrementarse el número de términos incluidos en la aproximación; en este experimento la disminución porcentual entre dos valores consecutivos de error relativo máximo se encuentra alrededor del 65 %, como puede verse en el cuadro 3.

Experimento 0.1c

En el experimento se usó el parámetro lambda (el parámetro que determina la ubicación de la frontera virtual) con valores de 1,2, 1,3, 1,4, 1,5 y 1,6 ; en todos los casos se mantuvo el número de términos en la solución aproximada en un valor de 10. Se presenta en la figura 11 el comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio:



Gráfica ($\lambda = 1,2$)	Valor máximo de error relativo sobre la gráfica	Variación porcentual
10 términos	0.0190122256152687	
15 términos	0.00518781446479891	-72.7132710826208
20 términos	0.00164807593008317	-68.2317873689214
25 términos	0.000567637420719408	-65.5575686557863
30 términos	0.000208801864135600	-63.2156273504713

Cuadro 3: Experimento 0.1a. Cuadro comparativo. Dominio circular

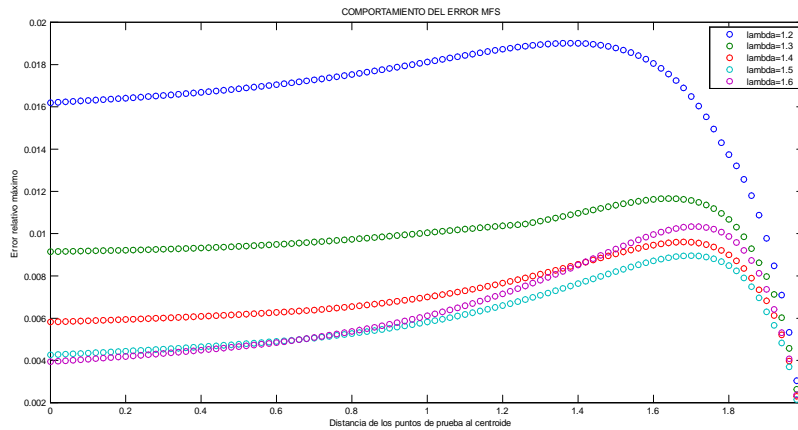


Figura 11: Experimento 0.1c. Comportamiento del error relativo máximo en función de la distancia de los puntos de prueba al centroide del dominio. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular, frontera virtual cuadrada. Número de términos en la solución aproximada: 10. Lambda= 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6

Se observa que en general el error disminuye al incrementarse el parámetro lambda; sin embargo, las disminuciones porcentuales en los valores consecutivos máximos de error relativo son menores, en comparación con los experimentos anteriores. Tales disminuciones van desde un valor de 38.6 %, en el paso de $\lambda = 1,2$ a $\lambda = 1,3$, hasta incluso un aumento de 15.35 % en el error, esto al pasar de $\lambda = 1,5$ a un valor de $\lambda = 1,6$ [véase el cuadro 4].

Gráfica (10 términos)	Valor máximo de error relativo sobre la gráfica	Variación porcentual
$\lambda = 1,2$	0.0190122256152687	
$\lambda = 1,3$	0.0116608238349425	-38.6667080913574
$\lambda = 1,4$	0.00960607295190737	-17.6209752597230
$\lambda = 1,5$	0.00895814247293495	-6.74500893566266
$\lambda = 1,6$	0.0103339560910179	15.3582466704413

Cuadro 4: Experimento 0.1c. Cuadro comparativo. Dominio circular



Variación porcentual del error relativo

Experimento 0.0b

En el experimento, el propósito consistió en repetir el esquema del experimento 0.0a (manteniendo $\lambda = 1,2$ fijo), pero explorando el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo entre los valores máximos de 2 gráficas consecutivas para valores mayores de N . La figura 12 muestra el resultado de este experimento. El dato a destacar es que el último punto en el cual la variación porcentual fue negativa se obtuvo con un $N = 175$ y una disminución porcentual de 9.719%.

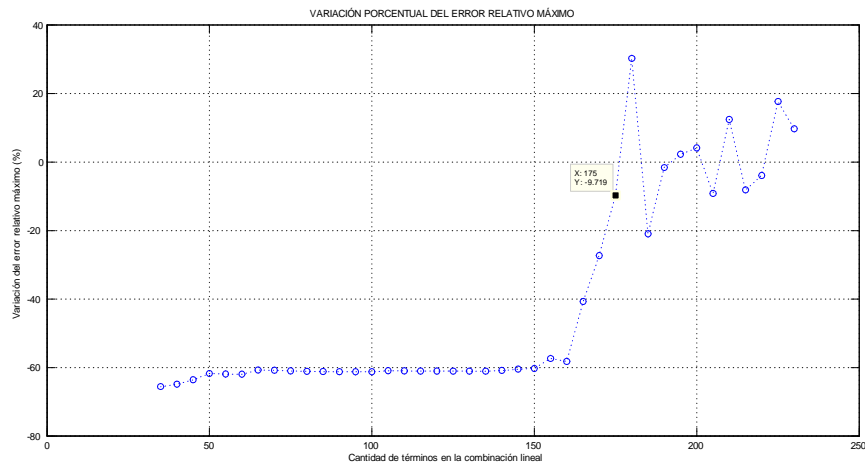


Figura 12: Experimento 0.0b. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N . Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. Lambda= 1.2

Experimento 0.0d

En el experimento, el propósito consistió en repetir el esquema del experimento 0.0c (dejando $N = 10$ fijo), pero explorando el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo entre los valores máximos de 2 gráficas consecutivas para valores mayores de λ . La figura 13 muestra el resultado de este experimento. El dato a destacar es que el último punto en el cual la variación porcentual fue negativa se obtuvo con un $\lambda = 1,65$ y una disminución porcentual de 0.841%.

Experimento 0.0u

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 4, con nodos de Chebyshev en ambas fronteras. Se mantuvo el valor $\lambda = 1,2$ fijo y se varió el valor de N . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 38.75% usando 235 términos en la aproximación al problema con valores en la frontera.

Experimento 0.0v

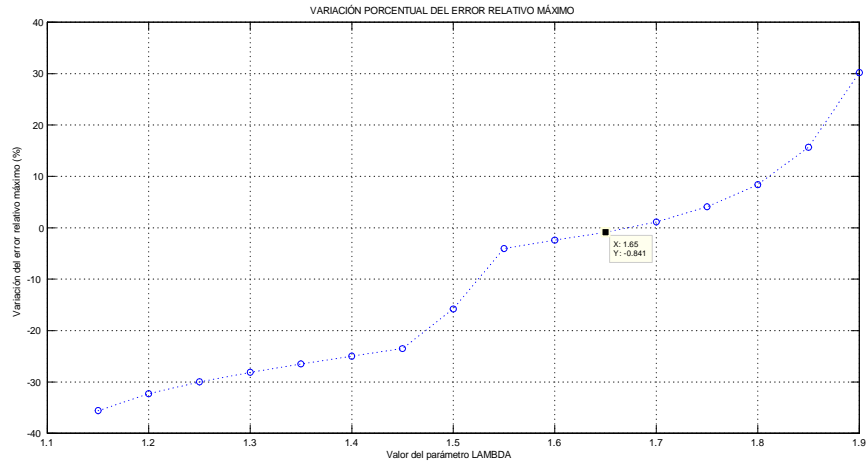


Figura 13: Experimento 0.0d. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. $N = 10$

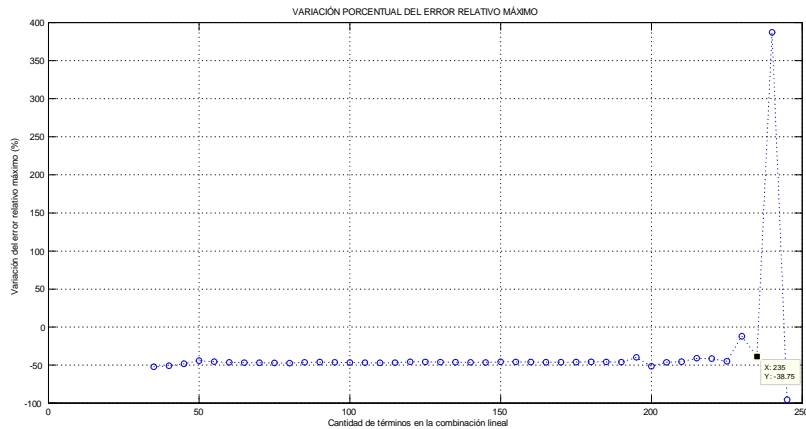


Figura 14: Experimento 0.0u. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N . Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. $\lambda = 1.2$

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 4, con nodos de Chebyshev en ambas fronteras. Se mantuvo el valor $N = 10$ fijo y se varió el valor de λ . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 0.5742% usando el parámetro lambda con un valor de 1.5.

Experimento 0.0w

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 5, con nodos de Chebyshev sólo en la frontera virtual. Se mantuvo el valor $\lambda = 1,2$ fijo y se varió el



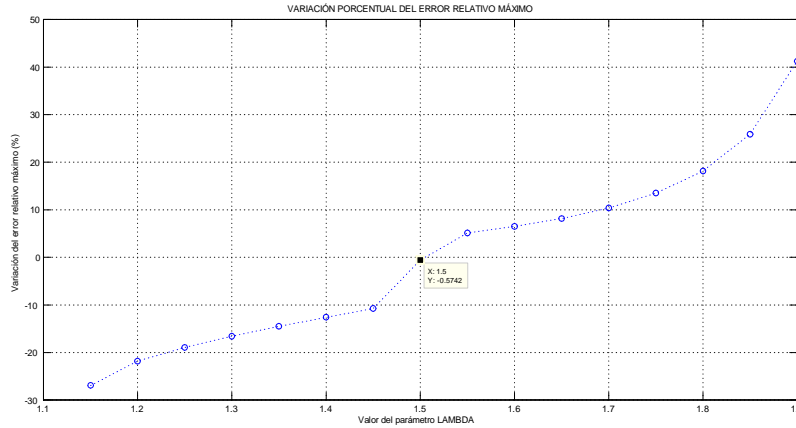


Figura 15: Experimento 0.0v. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. $N= 10$

valor de N . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 98.66 % usando 66 términos en la aproximación al problema con valores en la frontera. Se destaca la inestabilidad observada en el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo.

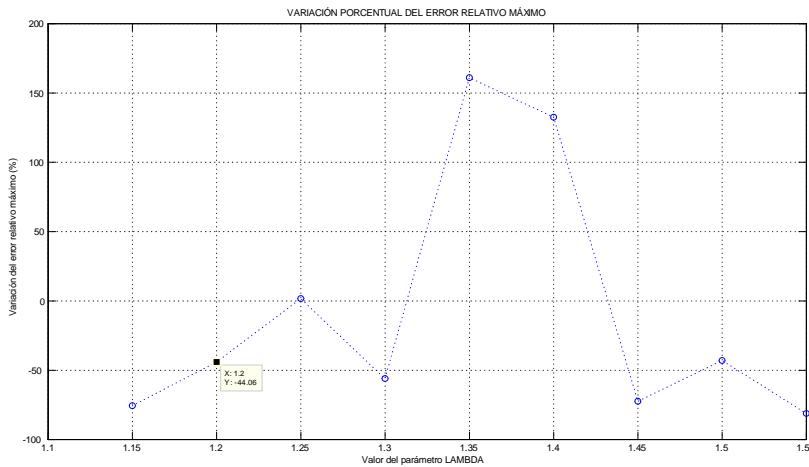


Figura 16: Experimento 0.0w. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N . Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. $\lambda= 1.2$

Experimento 0.0x

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 5, con nodos de Chebyshev sólo en la frontera virtual. Se mantuvo el valor $N = 10$ fijo y se



varió el valor de λ . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 43.72 % usando el parámetro lambda con un valor de 1.1. Se destaca la inestabilidad observada en el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo.

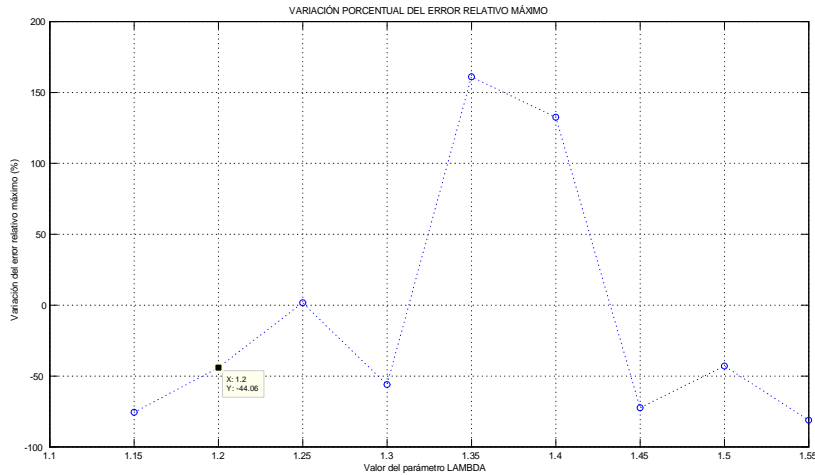


Figura 17: Experimento 0.0x. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. $N=10$

Experimento 0.0y

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 6, con nodos de Chebyshev sólo en la frontera real. Se mantuvo el valor $\lambda = 1,2$ fijo y se varió el valor de N . Se observó que la última variación porcentual negativa se obtuvo al usar 36 términos en la aproximación al problema con valores en la frontera.

Experimento 0.0z

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 6, con nodos de Chebyshev sólo en la frontera real. Se mantuvo el valor $N = 10$ fijo y se varió el valor de λ . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 44.06 % usando el parámetro lambda con un valor de 1.2. Se destaca la inestabilidad observada en el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo.

Experimento 0.1b

En el experimento, el propósito consistió en repetir el esquema del experimento 0.1a (dejando $\lambda = 1,2$ fijo), pero explorando el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo entre los valores máximos de 2 gráficas consecutivas para valores mayores de N . La figura 20 muestra el resultado de este experimento. El dato a destacar es que el último punto en el cual la variación porcentual fue negativa se obtuvo con un $N = 155$ y una disminución porcentual de 56.28 %.

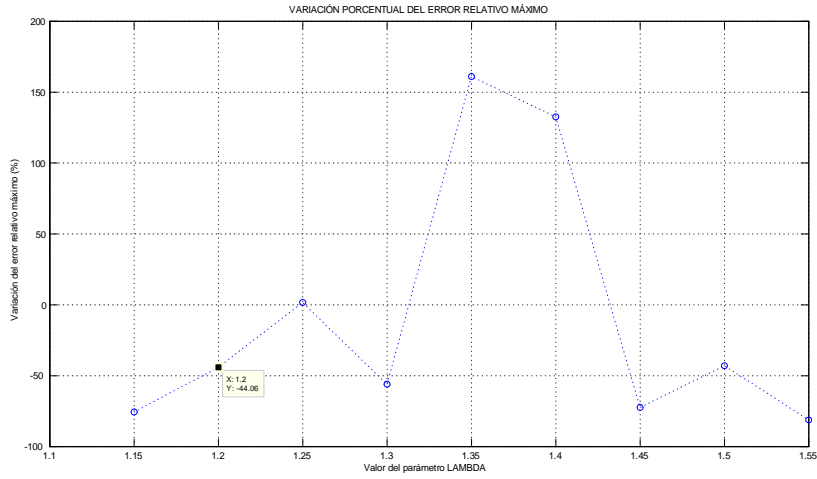


Figura 18: Experimento 0.0y. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. Lambda= 1.2

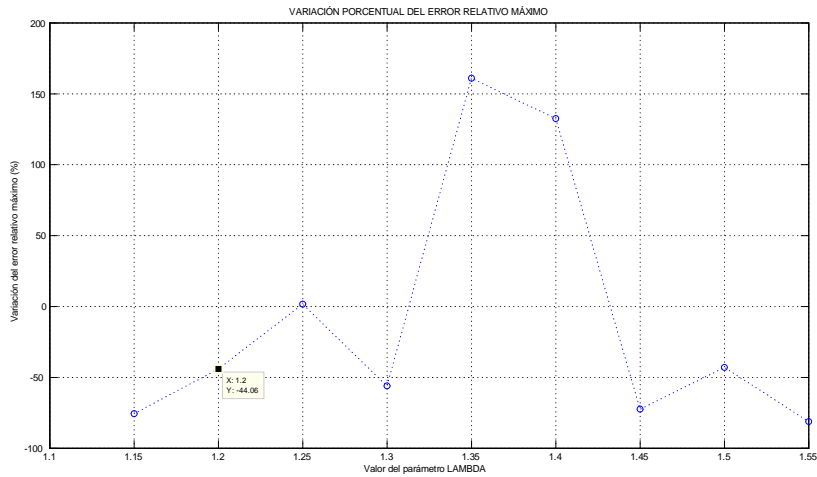


Figura 19: Experimento 0.0z. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. NODOS DE CHEBYSHEV. N= 10

Experimento 0.1d

En el experimento, el propósito consistió en repetir el esquema del experimento 0.1c (dejando $N = 10$ fijo), pero explorando el comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo entre los valores máximos de 2 gráficas consecutivas para valores mayores de λ . La figura 21 muestra el resultado de este experimento. El dato a destacar es que el último punto en el cual la variación porcentual fue negativa se obtuvo con un $\lambda = 1,5$ y una



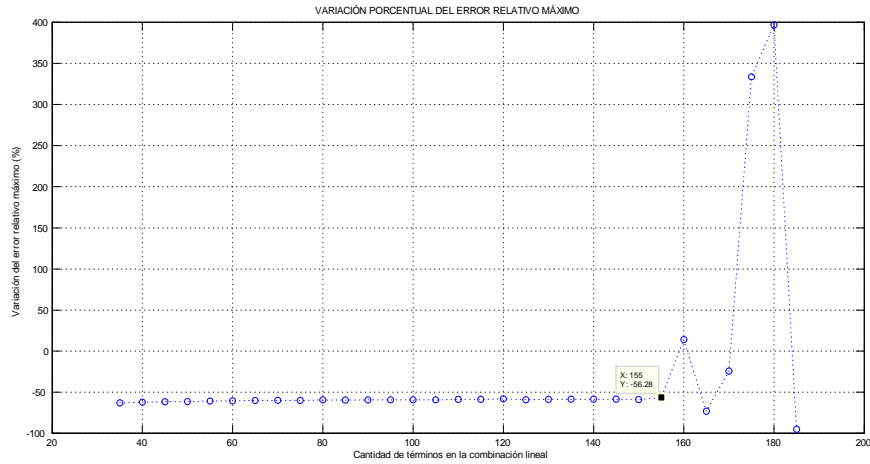


Figura 20: Experimento 0.1b. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual cuadrada. Lambda= 1.2

disminución porcentual de 1.602 %.

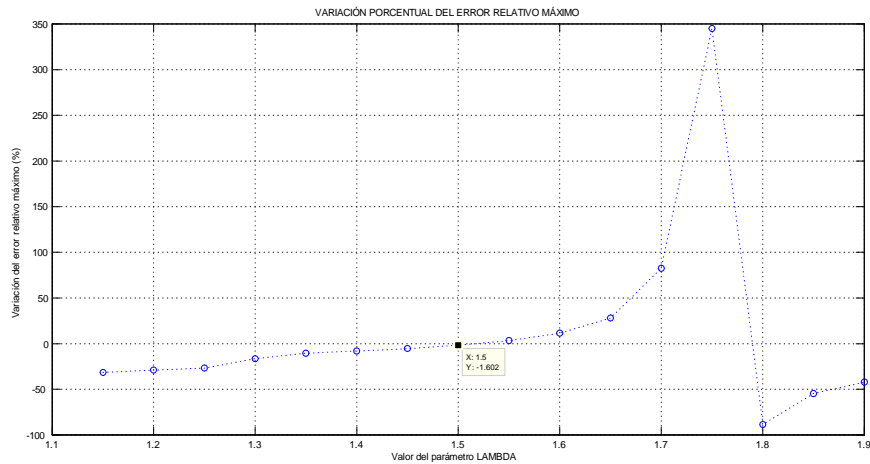


Figura 21: Experimento 0.1d. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual cuadrada. N= 10

Experimento 0.1x

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 7, con nodos de Chebyshev en ambas fronteras. Se mantuvo el valor $\lambda = 1,2$ fijo y se varió el valor de N. Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 25.92% usando 150 términos en la aproximación al problema con valores en la frontera.



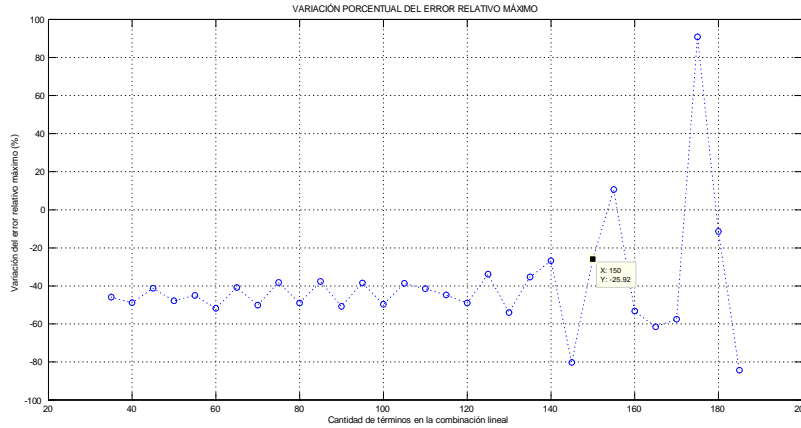


Figura 22: Experimento 0.1x. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de N. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual cuadrada. NODOS DE CHEBYSHEV. Lambda= 1.2

Experimento 0.1y

En este experimento se utilizó la configuración de fronteras mostrada en la figura 7, con nodos de Chebyshev en ambas fronteras. Se mantuvo el valor $N = 10$ fijo y se varió el valor de λ . Se observó que la última variación porcentual negativa fue de 0.7143% usando el parámetro lambda con un valor de 1.35.

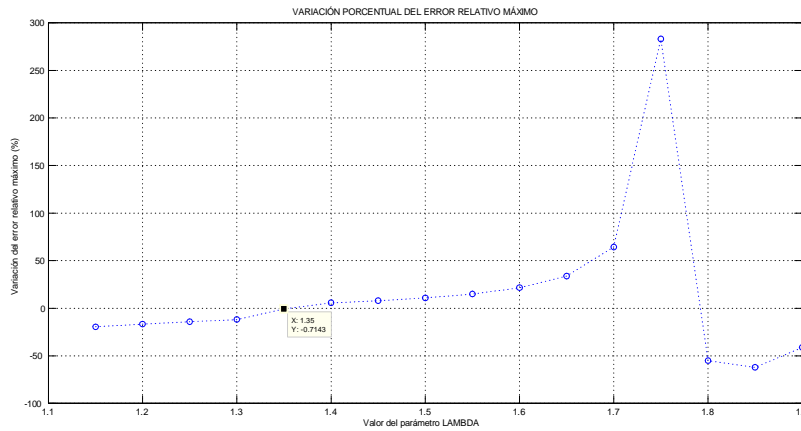


Figura 23: Experimento 0.1y. Comportamiento de la variación porcentual del error relativo máximo en función de lambda. Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual cuadrada. NODOS DE CHEBYSHEV. N= 10

Comportamiento del error relativo con variación conjunta de N y de λ
Experimento 0.0e



Este experimento consistió en tomar puntos de prueba en el interior del dominio Ω , ubicados justo a la mitad de la distancia entre el centroide del dominio y la frontera $\partial\Omega$; se dejó fijo el valor de λ y se varió N , obteniendo el error relativo máximo sobre tales puntos; después se usaron otros valores fijos de λ , variando N para obtener otras curvas del comportamiento del error relativo máximo.

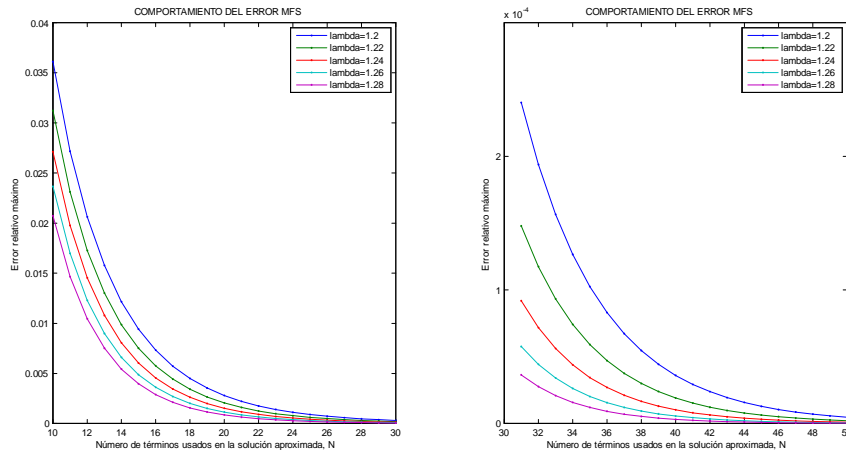


Figura 24: Experimento 0.0e. Comportamiento del error relativo máximo en función del número de términos usados en la solución aproximada (N). Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual: circunferencia. Razón de homotecia= $1/2$. Lambda= 1.2, 1.22, 1.24, 1.26 y 1.28

Experimento 0.1e

Este experimento consistió en tomar puntos de prueba en el interior del dominio Ω , ubicados justo a la mitad de la distancia entre el centroide del dominio y la frontera $\partial\Omega$; se dejó fijo el valor de λ y se varió N , obteniendo el error relativo máximo sobre tales puntos; después se usaron otros valores fijos de λ , variando N para obtener otras curvas del comportamiento del error relativo máximo. La diferencia entre este experimento y el anterior (0.0e), es que en este caso la frontera virtual es un cuadrado.

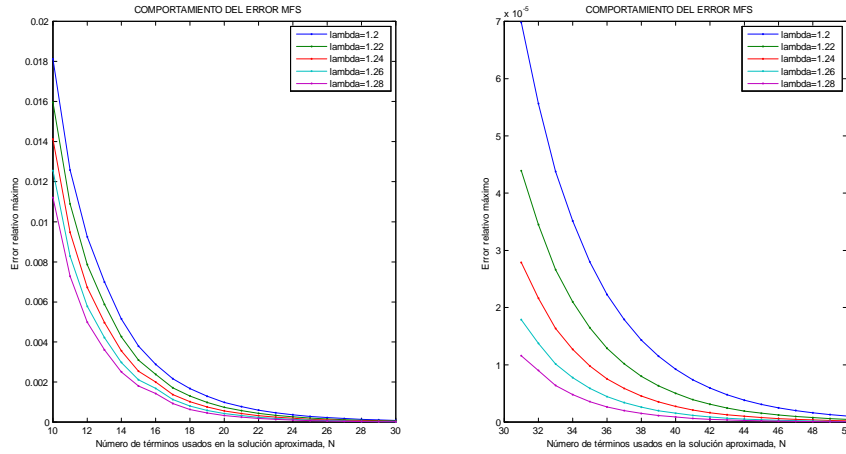


Figura 25: Experimento 0.1e. Comportamiento del error relativo máximo en función del número de términos usados en la solución aproximada (N). Operador Laplaciano, condición Dirichlet, dominio circular. Frontera virtual CUADRADA. Razón de homotecia= $1/2$. Lambda= 1.2, 1.22, 1.24, 1.26 y 1.28

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en los experimentos numéricos que se presentan en el capítulo de *ejemplos de prueba*, se puede concluir lo siguiente:

1. El comportamiento del error relativo en el Método de Soluciones Fundamentales (MFS) al interior del dominio computacional Ω , cualitativamente no presenta variaciones, independientemente de la configuración utilizada, el error relativo presenta un incremento gradual a partir del centroide del dominio, alcanzando un máximo y después disminuye de manera pronunciada al considerar puntos de prueba más cercanos a la frontera del dominio, $\partial\Omega$.
2. Al examinar la variación porcentual del error relativo, se observó que la variación porcentual es más estable en las configuraciones en las cuales se dejó fijo el parámetro λ , mientras que el valor de N , *i. e.* el número de términos usados en la solución aproximada, se incrementa. En cualquier caso, después de un intervalo de valores (ya sea de N o de λ) en el cual la variación porcentual del error relativo es negativa, se presenta un punto a partir del cual la variación puede ser cero e incluso positiva, esto se debe a peores niveles en el condicionamiento de la matriz del sistema y al límite de precisión de la computadora.
3. Los experimentos mostraron que el error relativo disminuye al incrementar N y al incrementar el valor de λ , lo que es consistente con los resultados de los trabajos publicados por otros autores con respecto al uso del Método de Soluciones Fundamentales.

4. Para finalizar; en el cuadro 5 se presentan los valores de N , error relativo y número de condición para dos configuraciones con dominio circular y utilizando una circunferencia como frontera virtual en ambos casos, teniendo como variante en las configuraciones el hecho de que en una de ellas las distribuciones de las fuentes puntuales y de los puntos de colocación son uniformes, mientras que en el otro caso se utiliza la distribución de Chebyshev, tanto de las fuentes puntuales como de los puntos de colocación.

N	DISTRIBUCIÓN UNIFORME		DISTRIBUCIÓN CHEBYSHEV	
	<i>Error relativo</i>	<i>Núm. de condición</i>	<i>Error relativo</i>	<i>Núm. de condición</i>
10	0.0362493251182666	6.20400984003610	0.0835586293179330	24.6137972334419
20	0.00284544375165032	31.4331409849893	0.0136138210545008	1720.00718582358
30	0.000305176460177167	117.921033125207	0.00298299971027662	151727.592011873
40	3.69921115493869e-05	391.600765933839	0.000702064377755314	16074630.6281557
50	5.16279218030927e-06	1218.23141373402	0.000180391851476531	1902780913.43487
60	7.49824821836914e-07	3637.71769353108	4.72634794804972e-05	242360540849.190
70	1.15652029677408e-07	10560.4870877230	1.29020026750458e-05	32496278216458.8
80	1.75908129253443e-08	30031.8748261809	3.54929366726821e-06	4.20780718692759e+15
90	2.65362735507691e-09	84070.0391751296	9.99772892000442e-07	1.54868089879080e+18
100	3.99120369157408e-10	232436.848845377	2.83071678517915e-07	1.55395852536464e+17

Cuadro 5: Cuadro resumen 1. Dominio circular. Lambda= 1.2 en todos los casos

Se observa en el cuadro 5 que los mejores niveles, tanto de error relativo como de número de condición, fueron obtenidos al usar la configuración con distribución uniforme de los puntos de colocación y de las fuentes puntuales.

Agradecimientos

Se agradece a los revisores anónimos por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo y por sus valiosas observaciones.

Referencias

- [Chazarain & Piriou, 1982] Chazarain, J. & Piriou, A. (1982). *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*. Studies in Mathematics and its Applications. The Netherlands: North-Holland Publishing Company.
- [Deville et al., 1993] Deville, R., Godefroy, G., & Zizler, V. (1993). *Smoothness and renormings in Banach spaces*. Number 64 in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman Scientific & Technical.
- [Edwards, 1994] Edwards, R. E. (1994). *Functional Analysis*. USA: Dover.
- [Evans, 1998] Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. USA: American Mathematical Society.
- [Fairweather & Karageorghis, 1998] Fairweather, G. & Karageorghis, A. (1998). The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advances in Computational Mathematics*, (9), 69 – 95.
- [Kirillov & Gvishiani, 1981] Kirillov, A. A. & Gvishiani, A. D. (1981). *Theorems and problems in Functional Analysis*. USA: Springer-Verlag.
- [Kreyszig, 1978] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. USA: John Wiley & Sons.
- [Kupradze, 1967] Kupradze, V. D. (1967). On the approximate solution of problems in mathematical physics. *Russian Mathematical Surveys*, 22(2), 58 – 108.
- [Mathews & Fink, 1999] Mathews, J. H. & Fink, K. D. (1999). *Numerical Methods using MATLAB*. USA: Prentice Hall, 3rd edition.
- [Munkres, 2000] Munkres, J. R. (2000). *Topology*. USA: Prentice Hall, 2nd edition.
- [Pinchover, 2005] Pinchover, Y. & Rubinstein, J. (2005). *An Introduction to Partial Differential Equations*. USA: Cambridge University Press, 1st edition.
- [Renardy & Rogers, 2004] Renardy, M. & Rogers, R. C. (2004). *An Introduction to Partial Differential Equations*. Texts in applied Mathematics. USA: Springer, 2nd edition.
- [Rudin, 1973] Rudin, W. (1973). *Functional Analysis*. USA: McGraw-Hill Book Company.
- [Smyrlis, 2009] Smyrlis, Y. S. (2009). Applicability and applications of the method of fundamental solutions. *Mathematics of Computation*, 78(267), 1399 – 1434.
- [Tsai et al., 2006] Tsai, C. C., Lin, Y. C., Young, D. L., & Atluri, S. N. (2006). Investigations on the accuracy and condition number for the method of fundamental solutions. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 16(2), 103 – 114.

[Vladimirov, 1971] Vladimirov, V. S. (1971). *Equations of Mathematical Physics*. USA: Marcel Dekker, Inc.

[Weinstock, 1973] Weinstock, B. M. (1973). Uniform approximation by solutions of elliptic equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 41(2), 513 – 517.

Como citar este artículo: J. F. Centeno Mora. El Método de Soluciones Fundamentales y su uso en problemas Dirichlet para el operador de Laplace. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365,7 (1), 20–46. <https://doi.org/10.36788/sah.v7i1.134>