Vol. 6 / No.1 / Septiembre 2022, pp. 1-15
SahuarUS

Un viaje con velocidad aleatoria y procesos estocásticos ergódicos

E. Gordienko[1] y J. Ruiz de Chávez [2],
Departamento de Matemáticas Universidad Autónoma Metropolitana-I
[1]gord@xanum.uam.mx, [2]jrch@xanum.uam.mx

Resumen

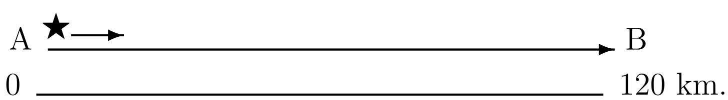
El objetivo del artículo es doble:

- *Dar un ejemplo donde se muestra la importancia de la selección del modelo adecuado incluso en fenómenos estocásticos muy sencillos;*
- *Dar una imagen preliminar de algunos resultados de Teoría Ergódica de procesos estacionarios y markovianos.*

Palabras Clave: Ergodicidad, Proceso estocástico, Velocidad aleatoria.

DOI: 10.36788/sah.v6i1.126
Recibido: 23 de abril de 2022.
Aceptado: 20 de junio de 2022.

1. Un "modelo" de viaje con velocidad aleatoria



Denotemos por V, la variable aleatoria (abreviación: **v.a.**) que indica la velocidad del objeto ★ (por ejemplo un coche). Supongamos que la velocidad promedio (valor esperado de V) es

$$\mathbb{E}V = 60\,\mathrm{km/h}.$$

Sea T la v.a. que representa el tiempo utilizado para viajar de A a B. ¿Cuál es el tiempo esperado del viaje $\mathbb{E}T$? Pareciera ser:

$$\mathbb{E}T = \frac{120}{60} = 2\,(\text{horas}). \tag{1}$$

¿Es correcto el resultado en (1)?

Consideremos, por ejemplo, el caso en donde la v.a. V (la velocidad) tiene una densidad de probabilidad f_V que es continua en el intervalo $[0, \infty)$. (Notemos que $f_V = 0$ para $x < 0$, pues $V \geq 0$.) Además, supondremos que:

$$\lim_{x \to 0^+} f_V(x) = \alpha > 0, \quad \text{(el límite por la derecha), y también} \tag{2}$$

$$\mathbb{E}V = \int_0^\infty x f_V(x) dx = 60 \quad \text{(km/h)}. \tag{3}$$

Las condiciones (2) y (3) se cumplen, por ejemplo, si f_V es uniforme en el intervalo $[0, 120]$, o cuando la v.a. V es exponencial de parámetro $1/60$.

Vamos, ahora, a tratar de comprobar la igualdad (1). De los cursos de Física elementales que se estudian en la preparatoria sabemos que el tiempo T que se ocupa para recorrer la distancia S, con la velocidad V, es

$$T = \frac{S}{V} = \frac{120}{V}. \tag{4}$$

Por otro lado, si la v.a. V tiene la densidad f_V y $T = g(V) = \frac{120}{V}$, entonces el *tiempo promedio de viaje* es

$$\mathbb{E}T = \int_0^\infty g(x) f_V(x) dx = \int_0^\infty \frac{120}{x} f_V(x) dx. \tag{5}$$

De la continuidad de f_V y (2) existe un número $\gamma > 0$ tal que

$$f_V(x) \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{para toda } x \in [0, \gamma]. \tag{6}$$

De (5) y (6) se sigue que

$$\mathbb{E}T \geq 120 \int_0^\gamma \frac{1}{x} f_V(x) dx \geq 60\alpha \int_0^\gamma \frac{1}{x} dx. \tag{7}$$

Como la función $1/x$ no es acotada en cero, la última integral en (7) es impropia, entonces se calcula como sigue. Para $0 < \varepsilon < \gamma$,

$$\int_0^\gamma \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\gamma \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln(\gamma) - \ln(\varepsilon)] = \infty, \tag{8}$$

ya que $\ln(\varepsilon) \to -\infty$ cuando $\varepsilon \to 0^+$. De (7) y (8) se obtiene que

$$\mathbb{E}T = \infty. \tag{9}$$

Por tanto, en lugar de la igualdad "intuitiva"(1), hemos obtenido un **resultado absurdo** (9), que significa que en promedio un viaje va a durar un tiempo infinito. Como no se han

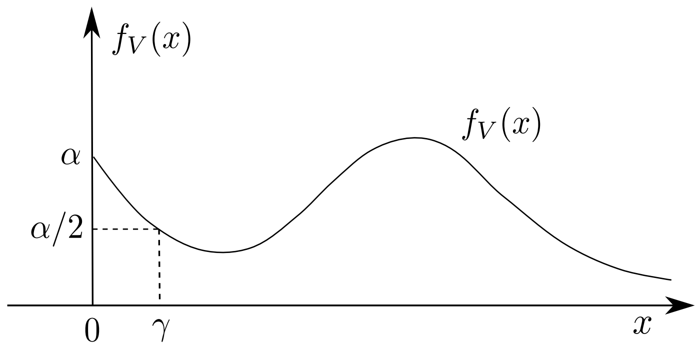


Figura 1: Densidad de V.

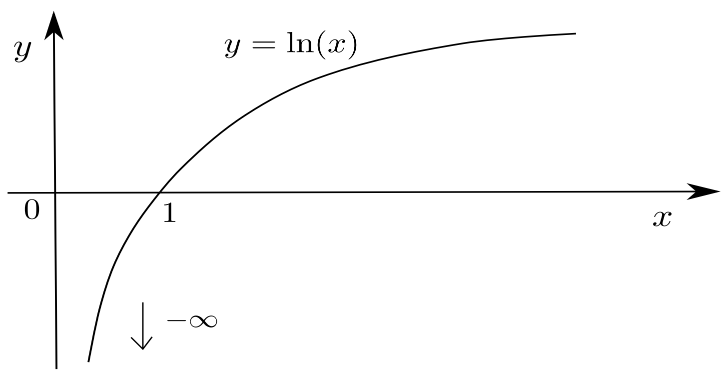


Figura 2: Gráfica del Logaritmo.

cometido errores matemáticos, hay que concluir que el modelo anterior de "viaje con velocidad aleatoria" *no es adecuado a la realidad.* La fuente del desajuste es *el uso de la ecuación* (4), que es cierta solamente cuando durante todo el movimiento la velocidad V es *constante*, es decir, no depende del tiempo t que va transcurriendo.

"El resultado"(9) es una consecuencia de (4) y el hecho de que debido a (2) la velocidad V puede tomar valores arbitrariamente cercanos a cero. Por ejemplo, si un valor de V es 1 cm/h, entonces de (4), el viaje va a durar $12,000,000$ horas.

En realidad, la velocidad V es una v.a. que depende del tiempo.

Imaginemos que el movimiento (o viaje) comienza en algún momento t_0, que vamos a suponer por simplicidad que $t_0 = 0$. Denotemos por $t \in [0, T]$ *el tiempo que transcurre* durante el viaje.

Para movimientos reales (de un coche, por ejemplo) en cada instante t la velocidad es una *variable aleatoria,* es decir V depende de algunos "factores aleatorios"que denotamos por ω. Sin embargo, esta v.a. depende del tiempo t, es decir, $V = V(t, \omega)$. En otras palabras, la velocidad es *un proceso estocástico.*

2. Procesos estocásticos. Promedios con respecto a factores aleatorios y el tiempo

Definición 1 *Sea $X(t,\omega)$ una colección de v.a.'s, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, que dependen del tiempo $t \in [0,\infty)$ (ω es el parámetro que es responsable de la "aleatoriedad", $\omega \in \Omega$). La colección $\{X(t,\cdot)\}_{t\geq 0}$ se llama proceso estocástico o aleatorio en tiempo continuo (se denota por $X(t)$). Cuando $t = n = 0, 1, 2\dots$, se dice que el proceso $X(n,\omega)$ es en tiempo discreto (se denota por X_n).*

Ejemplo 1 *(a) $X(n,\omega) = X_n$, $n = 1, 2, \dots$, donde las X_n, $n = 1, 2, \dots$, son v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas.*

(b) El movimiento browniano $B(t) \equiv B_t$. ($t \geq 0$) el cual es uno de los procesos más estudiados. Fue descubierto por Robert Brown en 1823, posteriormente A. Einstein publicó tres artículos sobre el mismo tema en los años 1905-1906 y un libro en 1926 (1). Se tienen registrados hasta la fecha en Mathematical Reviews *más de 5000 artículos y 60 libros. Ha sido utilizado para modelar fenómenos físicos como una idealización matemática del movimiento real de partículas en suspensión en un líquido, y otro ejemplo es la descripción de las fluctuaciones de los precios de las acciones en la bolsa de valores, esta última hecha en 1900 por Louis Bachellier, alumno de Henry Poincaré. Para terminar, citaremos la observación de Jean Perrin (6) Sec. 13, trabajo que le hizo acreedor al premio nobel de Física en 1926 "El movimiento browniano es un caso en donde resulta natural pensar en las funciones continuas sin derivadas que los matemáticos han imaginado y que se veían como meras curiosidades matemáticas". Para una revisión más exahustiva hasta los años 1950 se puede consultar el artículo de J. P. Kahane (4).*

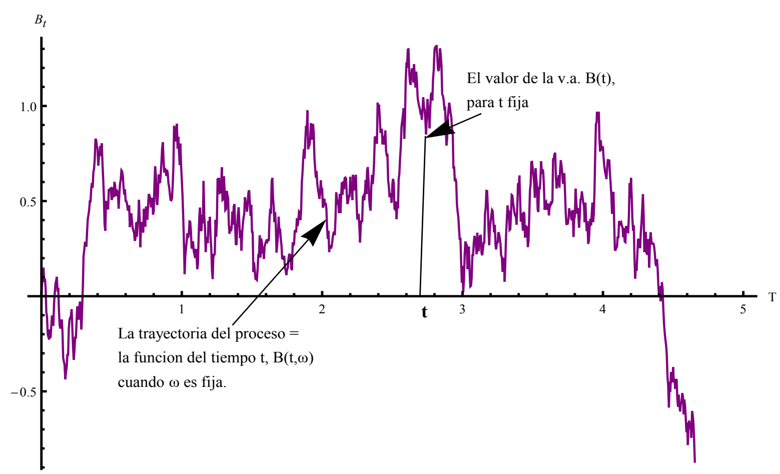


Figura 3: Esta figura muestra una simulación en Mathematica de una trayectoria del movimiento browniano.

Sea $X(t)$ un proceso estocástico. Al fijar un $t \geq 0$, $X(t)$ es una v.a. con *promedio* (valor esperado) $\mathbb{E}X(t)$. Aquí se supone que dicho promedio es finito, y, por ejemplo, cuando $X(t)$ tiene una densidad f_t,

$$\mathbb{E}X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x)dx, \; t \geq 0. \tag{10}$$

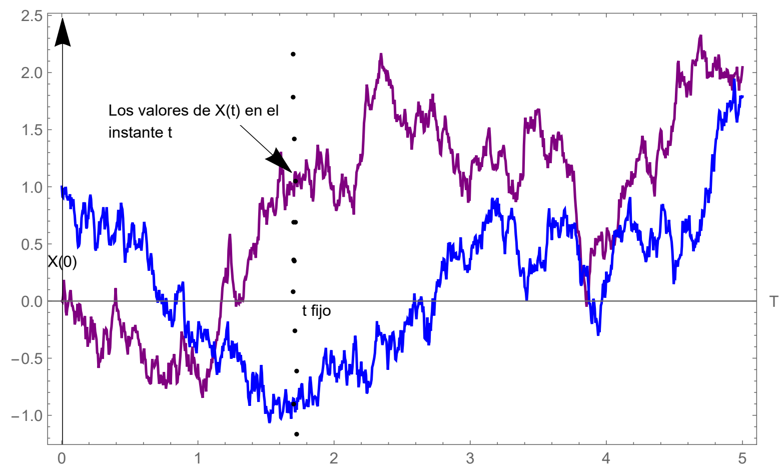


Figura 4: Esta figura muestra los valores del proceso en el instante t (y dos trayectorias).

Al número $\mathbb{E}X(t)$ en (10) vamos a llamarlo *el promedio* de $X(t)$ con respecto a *factores aleatorios* $\omega \in \Omega$, en el instante t. Este nombre se debe a que (10) es un caso particular de la siguiente definición de promedio (consultar por ejemplo (8)):

$$\mathbb{E}X(t) = \int_{\Omega} X(t, \omega)dP(\omega), \; (t \text{ es fijo}). \tag{11}$$

Al fijar un "factor aleatorio" $\omega \in \Omega$, obtenemos una función del tiempo $X(t, \omega) \equiv X(t)$, que se llama **trayectoria del proceso** $X(t)$.

En la Figura 4 están trazadas dos trayectorias (para dos diferentes ω's) del proceso $X(t)$.

De nuevo, fijemos un $\omega \in \Omega$ y observemos la trayectoria $X(t) = X(t, \omega)$ (definida para todas las $t \geq 0$).

Sea $T > 0$ un número fijo. *El promedio* de $X(t)$ con *respecto al tiempo* en el intervalo $[0, T]$ es la siguiente v.a.:

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(t)dt.$$

Esta es en efecto una v.a. puesto que la trayectoria $X(t)$ depende de $\omega \in \Omega$.

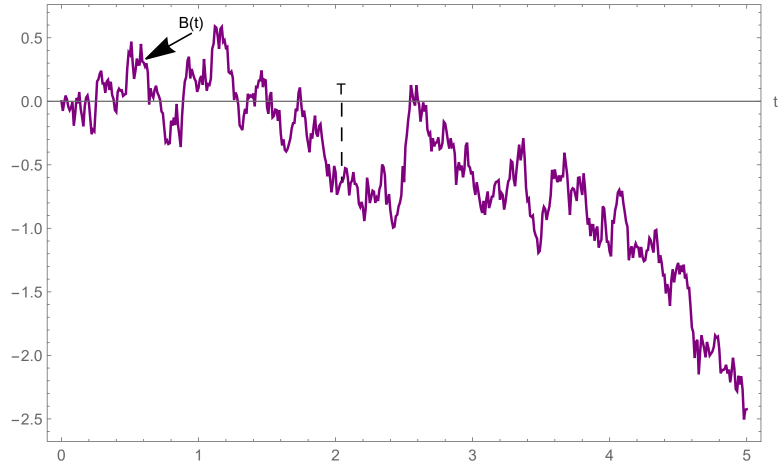


Figura 5: Esta figura muestra una simulación en Mathematica de una trayectoria del movimiento browniano.

Al suponer que el siguiente límite existe

$$\mu_X \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt, \tag{12}$$

la v.a. μ_X es llamada *promedio* de $X(t)$ *con respecto al tiempo*. De entre algunas definiciones de ergodicidad diferentes vamos, por el momento, a utilizar la siguiente.

Definición 2 *Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo* $X(t)$, $t \geq 0$ es ergódico, *si*

(a) *existe una constante* m_X *tal que* $\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}X(0) = m_X$ *para toda* $t \geq 0$*;*

(b) *con probabilidad 1, el límite en (12) existe y además,*

$$\mu_X = m_X. \tag{13}$$

En otras palabras, el promedio (con rerspecto a ω*) en (11)* no depende *del tiempo* t *y dicho promedio coincide con el promedio tomado con respecto al tiempo* μ_X*. Como consecuencia el último promedio* μ_X *debe ser una v.a. constante (con probabilidad 1).*

En la Sección 5 se presentarán condiciones que son suficientes para que un proceso sea ergódico. Ahora damos un ejemplo muy sencillo.

Ejemplo 2 *Sea* $X(t) = \operatorname{sen}(\xi t)$, $t \geq 0$ *donde* ξ *es una v.a. con densidad uniforme en el intervalo* $[-1, 1]$*. Entonces para* $t > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X(t) =& \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(xt)dx = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \operatorname{sen}(y)dy\\ =& -\frac{1}{2t}[\cos(t) - \cos(-t)] = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, es evidente que para cada $\xi = x$, $\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(xt)dt \to 0$ *cuando* $T \to \infty$.

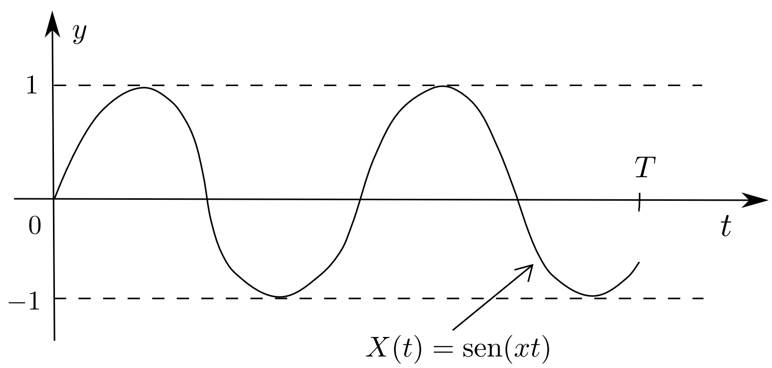


Figura 6: Gráfica de $\operatorname{sen}(xt)$.

3. La recuperación del modelo de movimiento con velocidad aleatoria

Sea ahora T el tiempo (como en la Sección 1) de un viaje. De una manera bastante realista vamos a aceptar las siguientes hipótesis.

$\mathbf{H_1}$. La velocidad $V(t,\omega)$ es un proceso *estocástico*.

$\mathbf{H_2}$. $V(t,\omega)$ es un proceso *ergódico*.

En particular (Definición 2, inciso (a)), para cada $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}V(t,\omega) = m_V = 60\,(\text{km/h}).$$

Como la velocidad V depende del tiempo, la ecuación (4) ya no es aplicable, y debe ser reemplazada por la ecuación diferencial

$$ds = V(t,\omega)dt. \tag{14}$$

En un intervalo de tiempo infinitesimal dt la velocidad es constante. Integrando (14) y dividiendo entre T, obtenemos $\frac{1}{T}\int_0^S ds = \frac{1}{T}\int_0^T V(t,\omega)dt$, o bien (ya que $S = 120$),

$$\frac{120}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t,\omega)dt. \tag{15}$$

Ahora supongamos (no rigurosamente) que la distancia S es “relativamente grande”(como $S = 120$ km en nuestro ejemplo). Esto último implica que la v.a. T (el tiempo de viaje) es también “bastante grande” lo que nos permite utilizar la igualdad aproximada:

$$\frac{1}{T}\int_0^T V(t,\omega)dt \approx \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T V(t,\omega)dt = \mu_V. \tag{16}$$

El último límite existe como consecuencia de la Definición 2 (b). Comparando las igualdades (15), (16), y (13) se obtiene que $\frac{120}{T} \approx m_V = 60$, o bien $T \approx \frac{120}{60} = 2$. La última aproximación significa que todos los valores de la v.a. T están cercanos a la constante 2, y esto permite conjeturar que $\mathbb{E}T \approx 2$(h), es decir, el tiempo promedio de viaje es alrededor de dos horas. De tal manera hemos recuperado nuestra conjetura intuitiva (1) (ver la Sección 1). Sin embargo, la afirmación $\mathbb{E}T \approx 2$ es cierta solamente para viajar grandes distancias.

4. Procesos Estocásticos Estacionarios en Sentido Amplio

Sea $X(t,\omega)$ un proceso estocástico ($t \in [0,\infty]$ o $t = 1, 2, \ldots$). En las definiciones de procesos estacionarios vamos a utilizar la siguiente hipótesis:

> $\mathbf{H_3}$. Para cada t, *la esperanza* $\mathbb{E}X(t,\omega)$ y *la varianza* $\mathrm{Var}(X(t,\omega))$ son finitas, es decir, se tiene
>
> $$E|X(t,\omega)|^2 < \infty.$$

Denotaremos: $X_t \equiv X(t,\omega)$, $t \geq 0$.

Definición 3 *La función de covarianza del proceso X_t se define como:*

$$\rho(t,s) := \mathrm{Cov}(X_t, X_s) := E[(X_t - EX_t)(X_s - EX_s)] = EX_tX_s - EX_tEX_s,$$

para $t, s \in [0,\infty]$ o $t, s \in \{0, 1, 2 \ldots\}$.

Definición 4 *Se dice que el proceso estocástico X_t es estacionario en sentido amplio si:*

(a) $EX_t = m_X$, o sea, no depende del tiempo.

(b) La función de covarianza $\rho(t,s)$ depende únicamente del tamaño del incremento de tiempo, es decir, si denotamos por $\tau = |t - s|$, se tiene que:

$$\rho(t,s) = \rho(|t-s|) = \rho(\tau).$$

Ejemplo 3 *(a)* **Proceso Autorregresivo.** *Sea $m \geq 1$ un entero dado y sean*

$$\xi_{1-m}, \xi_{2-m}, \ldots, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$$

v.a. independientes e idénticamente distribuidas, tales que $E\xi_k = 0$*,* $E|\xi_k|^2 < \infty$*. Ahora definamos:*

$$X_n = \xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \alpha_2\xi_{n-2} + \cdots + \alpha_m\xi_{n-m}, \text{ donde } \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m.$$

En el caso particular donde $m = 1$*, tenemos que:*

$$X_n = \xi_n + \alpha\xi_{n-1},$$

y se calcula fácilmente, (consultar, por ejemplo (5))

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \mathrm{Var}(\xi_0)(1+\alpha^2) & si\ \tau = 0, \\ \alpha\mathrm{Var}(\xi_0) & si\ \tau = 1, \\ 0 & si\ \tau > 1. \end{cases} \tag{17}$$

Entonces para $m = 1$*,* X_n *es un proceso estacionario.*

(b) **Incrementos del proceso de Poisson.** *Sea* $N(t)$*,* $t \geq 0$ *un proceso de Poisson con parámetro* $\lambda > 0$*, así que* $\mathbb{E}N(t) = \lambda t$*. Definamos:*

$$X(t) = N(t+1) - N(t), \quad t \geq 0.$$

El proceso $X(t)$ es estacionario puesto que primeramente $\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}(N(t+1) - N(t)) = \lambda(t+1-t) = \lambda$. Ahora, teniendo en cuenta que el proceso de Poisson tiene incrementos independientes, no es difícil probar que:

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \lambda(1-\tau) & \text{si } |\tau| < 1, \\ 0 & \text{si } \tau \geq 1. \end{cases} \tag{18}$$

5. Leyes de los Grandes Números y Ergodicidad

Empecemos con algo simple. Una moneda simétrica se lanza n veces. Definamos las siguientes variables aleatorias para $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si en el } k\text{-ésimo lanzamiento sale águila} \\ 0 & \text{si en el } k\text{-ésimo lanzamiento sale sol.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Sea} \quad S_n &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \#\text{ de sumandos iguales a } 1 \\ &= \text{al número de veces que ha salido águila en los } n \text{ lanzamientos.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{S_n}{n}$ es la “frecuencia”de veces que sale “águila”. Por simetría de la moneda e intuición, cuando n es “grande”, debe de resultar:

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\#\text{ de águilas en los } n \text{ lanzamientos}}{n} \approx \frac{1}{2} = P(\text{sale “águila” }).$$

Notemos que:

$$\mathbb{E}X_k = 1\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Teorema 1 (Bernoulli, 1714) *Cuando $n \to \infty$ la sucesión de v.a. S_n/n converge en probabilidad a* $1/2 = \mathbb{E}X_1 = P(\text{sale “águila” })$.

El siguiente teorema es un resultado mucho más profundo y general.

Teorema 2 (Kolmogorov, 1932) *Sean $X_1, X_2 \ldots$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas, y $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Supongamos que la esperanza $m = \mathbb{E}X_1$ ($= \mathbb{E}X_k$) es finita. Entonces, con probabilidad 1,*

$$\frac{S_n}{n} \to m, \ \textit{cuando}\, n \to \infty.$$

Existen diferentes versiones del Teorema 2 para procesos estacionarios. Como ejemplo, mencionamos el siguiente resultado.

Teorema 3 *Sea X_t un proceso estacionario tal que su función de covarianza satisface la siguiente condición: existe un $\varepsilon > 0$ tal que para toda τ suficientemente grande*

$$|\rho(\tau)| \leq \frac{1}{\tau^\varepsilon}. \tag{19}$$

Entonces con probabilidad 1 se tiene:

(a) *En tiempo discreto, cuando $n \to \infty$*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to m_X = \mathbb{E}X_0.$$

(b) *En tiempo continuo, cuando $T \to \infty$,*

$$\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt \to m_X = \mathbb{E}X_0. \tag{20}$$

Mas detalles sobre el Teorema 3 se puede consultar en (3; 7).

Nota 1 (a) *El Teorema 3, (b) afirma que si el proceso $X(t)$ es estacionario y se cumple la condición* (19)*, entonces $X(t)$ es un proceso* ergódico *(véase la Definición 2).*

(b) *La condición (19) (que se cumple particularmente para los procesos dados en el Ejemplo 3, (véase* (17) *y* (18)*) expresa una propiedad que $X(t)$, en un sentido “olvida su pasado”.*

Sean X v.a. de cuadrado integrable y no constante, y $X_1 = X_2 = \cdots = X$, entonces X_n, $n > 1$ es un proceso estacionario, sin embargo “no es ergódico”(¡no olvida su pasado!) y además:

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{nX}{n} = X \nrightarrow EX.$$

Ejemplo 4 *Sea* X_n, $n = 1, 2, \ldots$ *un proceso estacionario, en tiempo discreto, donde* X_n *representa la ganancia, (cuando* $X_n > 0$*) o pérdida (cuando* $X_n < 0$*) de un jugador en la* n*-ésima partida de un juego de azar en un casino. En cualquier casino se tiene que* $m_X = EX_1 < 0$ *(juego injusto). Ahora sean* x_0 *el capital inicial del jugador y* $Z_n = x_0 + X_1 + \cdots + X_n$ *la fortuna del jugador después de* n *repeticiones del juego.*

Suponiendo (19) (¡las v.a. podrían ser dependientes!) y teniendo en cuenta que $x_0/n \to 0$*, tenemos que* **con probabilidad** *1,*

$$\frac{Z_n}{n} = \frac{x_0}{n} + \frac{X_1 + X_2 \cdots + X_n}{n} \to m_X < 0, \text{(cuando } n \to \infty\text{)}.$$

Así que para un n *"suficientemente grande"(caso de un jugador insistente)* $Z_n < 0$*, lo que implica la ruina inevitable del jugador.*

6. Ergodicidad de Procesos de Markov

Los *procesos de Markov* se utilizan profusamente para modelar sistemas estocásticos donde la evolución futura del proceso sólo depende del presente, o sea, fijando un estado presente, los estados pasados del proceso no afectan a las predicciones sobre la evolución futura del proceso.

Ejemplo 5 (El proceso de difusión) *Sea* X_t, $t \geq 0$ *el proceso estocástico que representa la posición de una molécula de tinta en el instante* t*. (Esta molécula se desplaza a causa de los golpes de las moléculas de agua.)*

En t=0, se vierte un chorrito de tinta en agua.	En t=3 segundos después, el color no es uniforme.	Para t=7 minutos, la mezcla tiene un color uniforme.

Figura 7: Esta figura muestra cómo se va haciendo la mezcla de la tinta con el agua.

Si en el instante t la posición de la molécula es $X_t = \bar{x}$, entonces en un tiempo futuro $t+\delta$ la molécula se ha desplazado, de manera aleatoria, a un conjunto A con una probabilidad dada por cierta función $p(\bar{x}, A)$. Esta función está definida para cada $\bar{x} \in L$ y $A \subset L$. Esta función se le llama la *probabilidad de transición* del proceso X_t. Lo que es importante aquí es el hecho de que la probabilidad $p(\bar{x}, A)$ (de moverse de $\bar{x}$ al conjunto A) no depende de posiciones $X(s)$ $(s < t)$ en donde la molécula haya estado antes del instante t. Es decir, $X(t)$, $t \geq 0$ es un proceso de Markov con los estados en el conjunto L de dimensión tres.

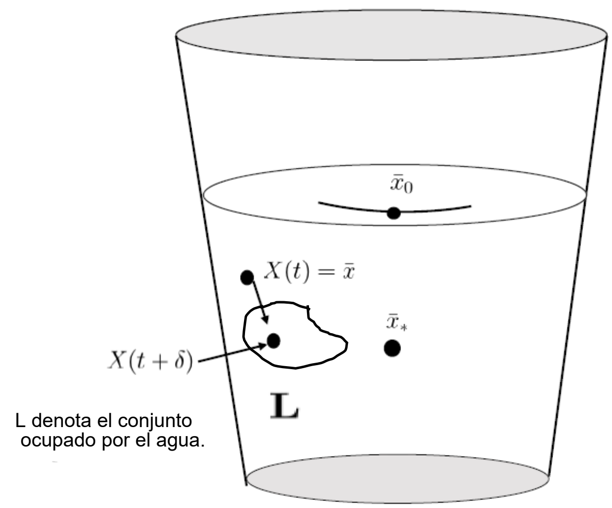


Figura 8: *Esta figura muestra el desplazamiento a causa de los golpes de las moléculas de agua.*

Es claro que X_t **no es un proceso estacionario**, sin embargo, **es ergódico** en el siguiente sentido:

(a) $X(t)$ "olvida su pasado"(sus valores pasados);

(b) conforme aumenta el tiempo t, las distribuciones de los vectores aleatorios de $X(t)$ "se estabilizan" y se aproximan a la distribución uniforme.

Para aclarar lo que se ha dicho, denotemos por $D(X(t))$ la distribución del vector aleatorio $X(t)$ y por U la distribución uniforme en el conjunto L. Se puede demostrar que:

(1) Cuando $t \to \infty$, $D(X(t)) \to U$ (conforme pasa el tiempo el color de la mezcla va siendo azul uniforme).

(2) Para t "grandes" el proceso $X(t)$ *se aproxima a un proceso estacionario*, por eso se comporta como un proceso estacionario.

(3) Con probabilidad 1,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)dt = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}X(t) = \bar{x}_*, \tag{21}$$

donde $\bar{x}_*$ denota el vector de coordenadas del centro del recipiente.

Generalizando la Definición 2, se dice que un proceso de Markov $X(t)$ es *ergódico* si existe un estado $\bar{x}_*$ tal que (21) se cumple con probabilidad 1 (para casi todos los estados iniciales).

Ejemplo 6 (*La transmisión de información con errores*) *(ver (2)) Sea* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *una sucesión de v.a. independientes e idénticamente distribuidas tales que*

$$\xi_1 = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ -1 & \text{con probabilidad } 1-p, \end{cases} \tag{22}$$

donde $p \in (0,1)$ es un parámetro dado.

Ahora utilizando estas v.a. se define el siguiente proceso estocástico a tiempo discreto: (empezando con $n = 0$).

$$X_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1; \tag{23}$$

$$X_n = \prod_{i=1}^{n} \xi_i, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Es fácil probar que X_n es un proceso de Markov. Además, es claro que X_n puede tomar sólo dos valores; -1 y 1.

Calculemos las probabilidades
$p_n = P(X_n = 1)$ y $1 - p_n = P(X_n = -1)$.
Por un lado,

$$\mathbb{E}X_n = 1 \cdot p_n + (-1)(1 - p_n) = 2p_n - 1. \tag{25}$$

Por otro lado, aplicando (22) y (24) y tomando en cuenta la independencia de las v.a. $\xi_1, \xi_2, \ldots$, obtenemos ($n = 1, 2, \ldots$):

$$\mathbb{E}X_n = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i = \prod_{i=1}^{n} (2p - 1) = (2p - 1)^n. \tag{26}$$

Comparando (25) y (26) se obtiene que cuando $n \to \infty$,

$$p_n = P(X_n = 1) = \frac{(2p-1)^n + 1}{2} \to \frac{1}{2}, \tag{27}$$

$$1 - p_n = P(X_n = -1) = \frac{1 - (2p-1)^n}{2} \to \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Tal convergencia de las distribuciones $D(X_n)$ a la distribución límite, uniforme $D_\infty = (1/2, 1/2)$ permite demostrar que el proceso de Markov X_n es ergódico.

El proceso X_n admite la siguiente interpretación. Supongamos que $X_0 = 1$ significa que alguien recibió una información verdadera. El/ella transmite esta información al receptor 1 correctamente con probabilidad p, e invierte el contenido del mensaje (es decir, manda un mensaje falso) con probabilidad 1- p. El receptor 1 retransmite a un receptor 2 la información que ha recibido, utilizando la misma regla:

- con probabilidad p envía sin cambios la información que ha recibido;

- con probabilidad 1-p el/ella altera el significado del mensaje.

El proceso de transmisión se repite (para el receptor 3,..., receptor n).

Vamos a decir que el n-ésimo receptor recibe la información correcta si $X_n = 1$. En caso contario, si $X_n = -1$ el receptor recibe la información falsa. Entonces, si por ejemplo $X_{n-1} = 1$, entonces de acuerdo a (24),

$$\begin{aligned} P(X_n = 1/X_{n-1} = 1) =& P(\xi_n = 1) = p, \\ P(X_n = -1/X_{n-1} = 1) =& P(\xi_n = -1) = 1 - p. \end{aligned}$$

La probabilidad del error $1 - p$ en la transmisión de la información (intencional o accidental) puede ser pequeña. Por ejemplo, sea $1 - p = 0.001$, es decir $p = 0.999$. Así de (27) se tiene que $P(X_2 = 1) \approx 0.998$, y también todos los n-ésimos receptores con n no muy grande va a recibir la información correcta con una alta probabilidad. Pero, por ejemplo, para $n = 5000$, $P(X_{5000} = 1) \approx 0.5000225$, y, correspondientemente, $P(X_{5000} = -1) = P(\text{el 5000-ésimo receptor va a recibir la información falsa}) \approx 0.4999775$.

Las relaciones límites en (27) y (28) indican que para n suficientemente grande el n-ésimo receptor van a recibir la información correcta o falsa con prácticamente las mismas probabilidades (una incertidumbre máxima). Teniendo en cuenta el "modelo" anterior, uno podría cuestionar la validez de algunos estudios históricos.

Agradecimientos

Los autores de este trabajo desean agradecer a los revisores por sus correcciones, comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar la presentación de este trabajo.

Referencias

[1] A. Einstein, *Investigations on the theory of Brownian movement.* USA: Dover, 1956.

[2] E. Gordienko and X. Popoca, *Introducción a la teoría de probabilidad y métricas probabilísticas con aplicaciones en seguros y finanzas.* México: Aportaciones Matemáticas, Instituto de Matemáticas UNAM, 2018.

[3] T.-C. Hu, A. Rosalsky, and A. Volodin, "On Convergence properties of sums of dependent random variables under second moment and covariance restrictions," *Statistics and Probability Letters*, vol. 78, no. 14, pp. 1999–2005, 2008. DOI: https://doi.org/10.1016/j.spl.2008.01.073

[4] J. Kahane, *Le mouvement brownien. Un essai sur les origines de la théorie mathématique.* Paris Francia: Société Mathématique de France, Séminaires et Congrès 3, 1998.

[5] S. Meyn and R.L.Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability.* New York: Cambridge University Press, 2009.

[6] J. Perrin, "Mouvement brownien et realité moleculaire," *Annales de chimie et de physique 8è série*, vol. 18, pp. 5–114, 1909.

[7] A. Poznyak, "A new version of the strong law of large numbers for dependent vector processes with decreasing correlation," in *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.00CH37187)*, vol. 3, 2000. DOI: 10.1109/CDC.2000.914247 pp. 2881–2882.

[8] A. Shiryaev, *Probability.* New York: Springer-Verlag, 1996.

Como citar este artículo: E. Gordienko and J. Ruiz de Chávez , "Un viaje con velocidad aleatoria y procesos estocásticos ergódicos", Sahuarus. Revista Electrónica de Matemáticas, vol. 6, no. 1, pp 1-15, 2022. https://doi.org/10.36788/sah.v6i1.126