SahuarUS
Revista electrónica de Matemáticas
Vol.5 / No.2 / Septiembre 2021, pp. 28-44
SahuarUS
REVISTAS UNISON

Cuádricas en $\mathbb{R}^3$: Una aplicación en Geometría de Poisson

C. Giottonini–Maldonado[1] y J. C. Ruíz–Pantaleón[2]
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México
[1]a8122338@unison.mx, [2]jose.ruiz@unison.mx

Resumen

Mostramos que, bajo ciertas hipótesis, las cuádricas en el espacio euclideano 3–dimensional ayudan a describir una clase importante de transformaciones que actúan sobre corchetes de Poisson definidas en este espacio, llamadas transformaciones gauge.

Palabras Clave: Cuádrica, Cuerpo rígido, Estructura de Poisson, Transformación gauge.

DOI: 10.36788/sah.v5i2.122
Recibido: 17 de julio del 2021.
Aceptado: 16 de septiembre del 2021.

1. Introducción

Resolver, o estudiar, un problema reduciéndolo a otro más sencillo de tratar es quizá de las ideas más antiguas y fundamentales en Matemáticas, y en la ciencia en general. Bajo esta idea, presentamos en este artículo una manera de reducir un problema de interés en Geometría de Poisson, una rama de la Geometría Diferencial, al estudio de cuádricas, objetos bien conocidos y estudiados en Geometría Analítica, Álgebra Lineal y Cálculo, por ejemplo. Concretamente, mostramos que el estudio de una clase de transformaciones que actúan sobre los denominados corchetes de Poisson, llamadas transformaciones gauge, se puede reducir bajo ciertas hipótesis al estudio de cuádricas en el espacio euclideano de dimensión tres, $\mathbb{R}^3$. Uno de los principales resultados obtenidos es el Teorema 1:

Teorema 1 *La transformación gauge de un corchete de Poisson lineal en $\mathbb{R}^3$ mediante un campo vectorial afín está definida en $\mathbb{R}^3$ salvo una cuádrica, pudiendo ser ésta imaginaria o degenerada.*

Luego, en el contexto de este resultado, para transformaciones gauge del llamado corchete de Poisson del cuerpo rígido obtenemos el Teorema 3, en el cual se presentan algunas condiciones para determinar las cuádricas mencionadas en el teorema anterior. Aún más, en Observaciones 11 se presenta una versión más general del Teorema 1 que involucra la noción de variedad algebraica en sentido clásico.

La Geometría de Poisson trata del estudio (de la geometría) de los denominados corchetes de Poisson en variedades diferenciales (Dufour and Zung, 2005; Laurent-Gengoux et al., 2013), cuyo origen, como objetos algebraicos, se remonta al trabajo de Siméon Denis Poisson en 1809 (Poisson, 1809) en el que aborda un análisis de ciertos sistemas mecánicos. Actualmente, los corchetes de Poisson se pueden entender como objetos que codifican la evolución temporal de sistemas mecánicos (clásicos y/o cuánticos) y que dotan de una geometría especial a las mismas (Lichnerowicz, 1977; Weinstein, 1983). Este contexto geométrico proporciona una manera de describir la dinámica hamiltoniana de forma rigurosa y cuyas aplicaciones, como es sabido, son casi omnipresentes en todos los ámbitos científicos. Un ejemplo cásico es el llamado cuerpo rígido (Marsden and Ratiu, 1999). El estudio de los corchetes de Poisson ha tomado cada vez más relavancia en las últimas décadas por las múltiples conexiones que se han encontrado con otras áreas de la matemática y de la física.

En Geometría de Poisson se plantea de manera natural la pregunta de si es posible transformar un corchete de Poisson y obtener otro. La respuesta en general es que no. Sin embargo, existe un tipo especial de transformaciones, que se llaman transformaciones gauge (Ševera and Weinstein, 2001; Bursztyn, 2005; Evangelista-Alvarado et al., 2021), con la propiedad de transformar corchetes de Poisson en corchetes de Poisson. No solamente esto, ya que en general tales transformaciones están asociadas a una clase especial de 2–formas diferenciales, preservan en cierto sentido la geometría generada por los corchetes de Poisson. Esto último solo es el reflejo de un hecho más profundo: las transformaciones gauge están fuertemente relacionadas con el concepto de simetría. Concepto que ha jugado un rol central en el desarrollo de la física moderna. Por ejemplo, en Teoría Cuántica de Campos. Un tratamiento de las transformaciones gauge desde esta perspectiva y sus implicaciones en física queda fuera del alcance de este artículo. Sin embargo, no solo lo mencionamos para dejar entrever la relavancia de las transformaciones gauge sino porque es un tema de investigación actual, incluso en el espacio $\mathbb{R}^3$ para el estudio del cuerpo rígido (de la Cruz et al., 2017).

En este artículo, nos centramos en el estudio de las transformaciones gauge de corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$. Entre las ventajas de trabajar en este espacio se encuentra que los corchetes de Poisson están completamente caracterizados por campos vectoriales y matriciales "especiales" (Lema 1). Esto permite utilizar herramientas del cálculo vectorial y matricial para estudiar ciertas propiedades y transformaciones de los corchetes de Poisson. En particular, las mencionadas transformaciones gauge, las cuales se corresponden con campos vectoriales que hacen que se satisfaga una condición de invertibilidad (Definición 1). Un primer resultado obtenido es la Proposición 1, en la cual se describe el dominio de definición y se da una fórmula explícita de las transformaciones gauge de corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$. Como consecuencia, en el Corolario 1 se presenta una clase de transformaciones gauge definidas en todo el espacio $\mathbb{R}^3$ que dejan invariante a los corchetes de Poisson. Luego, utilizando la Proposición 1 y otros resultados auxiliares, se deduce el Teorema 1 mencionado previamente. Finalmente, aplicando estos resultados al corchete de Poisson del cuerpo rígido obtenemos el Teorema 3 descrito en líneas anteriores.

Observaciones 1. *Presentamos una idea intuitiva del porqué las transformaciones gauge están relacionadas con el concepto de simetría (interna): en un racimo de uvas perfectamen-*

*te esféricas, si cada una de las uvas es rotada respecto a algún eje de simetría (distinto, en general), es claro que el racimo permanece sin cambios. Aún más, si cada una de las uvas es de un solo color, desde una perspectiva externa parecería que no hay ningún tipo de "movimiento" o "acción" sobre el racimo. Notemos que una rotación no deforma, no cambia de posición y tampoco destruye las uvas. Si pensamos en la acción de rotar cada uva (*simetría interna*) como una transformación sobre todo el racimo, esta transformación es lo que entenderíamos como una transformación gauge del racimo. Para el caso de un corchete de Poisson en una variedad diferencial M, en particular en $\mathbb{R}^3$, el racimo vendría a ser M y cada una de las uvas subvariedades (puntos y superficies en el caso de $\mathbb{R}^3$) generadas de alguna manera por el corchete de Poisson y que constituyen a M. Una transformación gauge sobre el corchete de Poisson sería equivalente a una "transformación" sobre las subvariedades que no las deforma, no las "cambia de posición" y tampoco las destruye, y que además da lugar a un, posiblemente diferente, corchete de Poisson en M.*

2. Preliminares

En esta sección se recuerdan brevemente las nociones de cuádrica, campo vectorial y campo matricial en el espacio euclideano 3–dimensional, herramientas necesarias para el desarrollo del presente trabajo.

Primero, en esta y en las demás secciones, se fijarán coordenadas (x, y, z) para el espacio euclideano (real) de dimensión tres,

$$\mathbb{R}^3 = \big\{X = (x, y, z)^\top \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\big\}. \tag{1}$$

Además, se denotará por $C^\infty_{\mathbb{R}^3} := \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es de clase } C^\infty\}$ al espacio de funciones suaves en $\mathbb{R}^3$ y por $\mathrm{M}_3(\mathbb{R}^3)$ al espacio de matrices reales de tamaño 3×3.

Cuádricas. Una *cuádrica*, o superficie cuádrica, en $\mathbb{R}^3$ es una superficie determinada por una ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \tag{2}$$

con $A, B, \ldots, J \in \mathbb{R}$. En otras palabras, es la superficie generada por los ceros de un polinomio de grado dos, o polinomio cuadrático, en $\mathbb{R}^3$.

Si no existen soluciones (reales) a la ecuación (2), la cuádrica se dirá *imaginaria*.

Ejemplo 1. *La esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ es la cuádrica determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.*

En notación vectorial, la ecuación (2) se puede escribir como

$$\big\langle S_u X + \ell, X\big\rangle + J = 0, \tag{3}$$

con X en (1), donde S_u y ℓ son, respectivamente, la matriz simétrica 3×3 y el vector en $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$S_u := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2A & D & E \\ D & 2B & F \\ E & F & 2C \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \ell := \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}, \tag{4}$$

y $\langle\, , \,\rangle$ denota el producto escalar (punto) de vectores,

$$\langle v, w\rangle := v^\top w, \quad v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Si la matriz S en (24), dependiente de S_u y ℓ, tiene determinante cero, la correspondiente cuádrica se dirá *degenerada*.

La expresión en el lado izquierdo de la ecuación (3) resulta de particular interés ya que, como es sabido, las cuádricas se pueden clasificar en función de S_u y ℓ (Zwillinger, 2018). Para los propósitos de este artículo, referimos a la clasificación presentada en el Apéndice A.

Observaciones 2. *La ecuación de una cuádrica en $\mathbb{R}^n$ se escribe de manera análaga a la ecuación* (3).

Campos Vectoriales. Un *campo vectorial* suave en $\mathbb{R}^3$ es una función vectorial

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \psi(x, y, z) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top, \quad \psi_i = \psi_i(x, y, z), \end{aligned}$$

tal que $\psi_i \in C^\infty_{\mathbb{R}^3}$, con $i = 1, 2, 3$. Es decir, tal que cada una de las funciones ψ_i, llamadas las componentes del campo vectorial ψ, son funciones suaves en $\mathbb{R}^3$.

Si todas las componentes de un campo vectorial son funciones polinomiales, se dirá que el campo vectorial es polinomial. En particular, si todas las componentes son funciones lineales, el campo vectorial se dirá lineal.

Ejemplo 2. *El campo vectorial $\psi = (x, y, z)^\top$ es un campo vectorial lineal en $\mathbb{R}^3$.*

Recordamos que, además de las operaciones usuales (por ejemplo, el rotacional), los campos vectoriales heredan las operaciones usuales para vectores en $\mathbb{R}^3$, tales como el producto escalar y vectorial. En particular, la multiplicación de un campo vectorial por una función escalar se define por

$$f\psi := (f\psi_1, f\psi_2, f\psi_3)^\top, \quad f \in C^\infty_{\mathbb{R}^3}.$$

Campos Matriciales. Un (3×3)–*campo matricial* suave en $\mathbb{R}^3$ es una función matricial

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathrm{M}_3(\mathbb{R}^3) \\ (x, y, z) &\longmapsto \mathcal{M}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ij}(x, y, z), \end{aligned}$$

tal que $\mu_{ij} \in C^\infty_{\mathbb{R}^3}$, con $i, j = 1, 2, 3$. Es decir, tal que cada una de las funciones μ_{ij}, llamadas las componentes del campo matricial $\mathcal{M}$, son funciones suaves en $\mathbb{R}^3$.

Observaciones 3. *En general, un* $(k \times l)$*–campo matricial en* $\mathbb{R}^n$ *es una función matricial de* $\mathbb{R}^n$ *al espacio de matrices reales de tamaño* $k \times l$*. En particular, los campos vectoriales son una clase especial de campos matriciales.*

De particular interés serán los (3×3)–campos matriciales *antisimétricos* en $\mathbb{R}^3$, es decir, funciones matriciales de tipo

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_{12} & \mu_{13} \\ -\mu_{12} & 0 & \mu_{23} \\ -\mu_{13} & -\mu_{23} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Para este artículo, lo importante de esta clase de campos matriciales es que están en biyección con el espacio de campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$. Concretamente, cada campo vectorial $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top$ en $\mathbb{R}^3$ induce un único (3×3)–campo matricial antisimétrico, que denotaremos por $[\psi]_\times$, definido por

$$[\psi]_\times := \begin{pmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Recíprocamente, dado un (3×3)–campo matricial antisimétrico como en (5), las funciones $\psi_1 := -\mu_{23}$, $\psi_2 := \mu_{13}$ y $\psi_3 := -\mu_{12}$ definen un único campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ mediante la fórmula $\psi := (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top$.

Por tanto, en el espacio $\mathbb{R}^3$, los (3×3)–campos matriciales antisimétricos están parametrizados por campos vectoriales y podemos expresarlos (siempre) como en (6). Además, por definición, es claro que

$$f[\psi]_\times = [f\psi]_\times, \quad \text{para toda} \quad f \in C^\infty_{\mathbb{R}^3}. \tag{7}$$

Observaciones 4. *En Álgebra Lineal, dado un vector* $v \in \mathbb{R}^3$*, a la matriz* $[v]_\times$ *definida de manera idéntica a* (6) *se le conoce como la matriz del producto cruz por el vector* v *(Liu and Trenkler, 2008). Esto se debe a que el producto (usual) de* $[v]_\times$ *con cualquier vector* $w \in \mathbb{R}^3$ *es igual al producto cruz de* v *y* w*.*

3. Corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$

En esta sección se presenta la definición de un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$. Enseguida, se muestra que estos objetos están en correspondencia con una clase especial de campos vectoriales y campos matriciales en $\mathbb{R}^3$.

Algebraicamente, un *corchete de Poisson* en $\mathbb{R}^3$ (Dufour and Zung, 2005; Laurent-Gengoux et al., 2013) es una operación binaria $\{\,,\,\}$ en el espacio de funciones suaves en $\mathbb{R}^3$,

$$\{\,,\,\} : C^\infty_{\mathbb{R}^3} \times C^\infty_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow C^\infty_{\mathbb{R}^3},$$

que satisface los siguientes axiomas:

(a) $\mathbb{R}$–linealidad,
$$\{cf,g\} = c\,\{f,g\}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

(b) Antisimetría,
$$\{g,f\} = -\{f,g\}.$$

(c) Identidad de Jacobi,
$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$$

(d) Regla de Leibniz,
$$\{f,gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h.$$

Para cualesquiera $f,g,h\in C^\infty_{\mathbb{R}^3}$.

Observaciones 5. *Notemos que (a) y (b) implican que un corchete de Poisson es una operación* $\mathbb{R}$*–bilineal:* $\{f,cg\} = -\{cg,f\} = -c\{g,f\} = c\{f,g\}$.

La existencia de corchetes de Poisson se asegura notando que la operación $\{f,g\}=0$, para toda $f,g\in C^\infty_{\mathbb{R}^3}$, define un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$, llamado corchete de Poisson trivial.

Ejemplo 3. *La operación binaria en el espacio* $C^\infty_{\mathbb{R}^3}$ *dada por*
$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$
define un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$.

Observaciones 6. *Los axiomas que definen a un corchete de Poisson en* $\mathbb{R}^n$*, o de manera más general, en un variedad diferencial real, son idénticos a los incisos (a)–(d).*

La identidad de Jacobi refleja en cierto modo la no asociatividad de los corchetes de Poisson. En general, la no asociatividad de una operación binaria.

Ejemplo 4. *El producto vectorial (cruz)* $\times : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$*, como operación binaria en* $\mathbb{R}^3$*, no es asociativa. Pero sí satisface la siguiente identidad (de Jacobi):* $u\times(v\times w)+v\times(w\times u)+w\times(u\times v)=0$*, para cualesquiera* $u,v,w\in\mathbb{R}^3$.

La regla de Leibniz asegura que, si fijamos una función $H\in C^\infty_{\mathbb{R}^3}$, la operación unaria $\mathrm{ad}_H : C^\infty_{\mathbb{R}^3}\to C^\infty_{\mathbb{R}^3}$ definida por $\mathrm{ad}_H(f) := \{H,f\}$ actúa como una derivada sobre el producto (usual) de dos funciones:
$$\mathrm{ad}_H(fg) = \mathrm{ad}_H(f)\,g + f\,\mathrm{ad}_H(g), \quad f,g\in C^\infty_{\mathbb{R}^3}. \tag{8}$$

Observaciones 7. *En un contexto más general, la identidad (8) dice que* ad_H *es una derivación del producto puntual de funciones. Por tanto, define un campo vectorial llamado campo hamiltoniano de* H *con respecto al corchete de Poisson* $\{\ ,\ \}$ *(Marsden and Ratiu, 1999; Dufour and Zung, 2005; Laurent-Gengoux et al., 2013).*

Si bien los corchetes de Poisson se pueden definir y estudiar en variedades diferenciales, entre las ventajas de restringirse al espacio $\mathbb{R}^3$ se encuentra que podemos caracterizarlos completamente en términos de campos vectoriales y matriciales "especiales".

Lema 1. *Existe una biyección entre:*

(I) *Corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$.*

(II) *Campos vectoriales ψ en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación*

$$\langle \psi, \operatorname{rot} \psi \rangle = 0. \tag{9}$$

(III) (3×3)*–Campos matriciales antisimétricos $[\psi]_\times$ en $\mathbb{R}^3$, ver (6), tales que el campo vectorial ψ satisface (9).*

Demostración. *Primero, probaremos que existe una biyección entre (II) y (I). Sea $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que satisface (9). Entonces, la operación binaria en $C^\infty_{\mathbb{R}^3}$ dada por*

$$\{f, g\}_\psi := \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle, \quad f, g \in C^\infty_{\mathbb{R}^3}; \tag{10}$$

donde ∇ denota el operador gradiente para funciones escalares, define un único corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$. En efecto, la $\mathbb{R}$–linealidad y antisimetría se siguen directamente de las propiedades de ∇, $\times$ y $\langle\, , \rangle$. La identidad de Jacobi, usando el hecho de que es suficiente verificarla para funciones coordenadas (Dufour and Zung, 2005; Laurent-Gengoux et al., 2013), en este caso (x, y, z), se sigue de

$$\{x, \{y, z\}_\psi\}_\psi + \{y, \{z, x\}_\psi\}_\psi + \{z, \{x, y\}_\psi\}_\psi = -\langle \psi, \operatorname{rot} \psi \rangle. \tag{11}$$

La regla de Leibniz se sigue de la igualdad

$$\{f, gh\}_\psi = \big\langle \psi, \nabla f \times \nabla(gh) \big\rangle = \big\langle \psi, \nabla f \times (g\nabla h + h\nabla g) \big\rangle = g\big\langle \psi, \nabla f \times \nabla h \big\rangle + h\big\langle \psi, \nabla f \times \nabla g \big\rangle.$$

Ahora, sea $\widetilde{\psi} = (\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2, \widetilde{\psi}_3)^\top$ otro campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que satisface (9). Si $\{f, g\}_{\widetilde{\psi}} = \{f, g\}_\psi$ para todo $f, g \in C^\infty_{\mathbb{R}^3}$, entonces, en particular, se tiene que $\widetilde{\psi}_1 = \{y, z\}_{\widetilde{\psi}} = \{y, z\}_\psi = \psi_1$. De manera análoga se muestra que debe ser $\widetilde{\psi}_2 = \psi_2$ y $\widetilde{\psi}_3 = \psi_3$. Lo que prueba que la asignación $\psi \mapsto \{\, , \}_\psi$ es inyectiva. Aún más, es sobreyectiva. En efecto, si $\{\, , \}$ es un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$, entonces las funciones

$$\psi_1 := \{y, z\}, \quad \psi_2 := \{z, x\}, \quad \psi_3 := \{x, y\},$$

determinan de manera única un campo vectorial $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top$ en $\mathbb{R}^3$ que satisface (9) debido a la identidad de Jacobi para $\{\, , \}$ y a que se cumple una igualdad idéntica a (11). Aún más, el corchete de Poisson $\{\, , \}$ se expresa como en (10) en términos de esta ψ. Lo que muestra la biyección entre (II) y (I). Finalmente, la correspondencia entre (II) y (III) se sigue de la biyección entre campos vectoriales y (3×3)–campos matriciales antisimétricos en $\mathbb{R}^3$ dada por la fórmula (6). $\square$

Ejemplo 5. *El campo vectorial* $\psi = (x, y, z)^\top$ *en* $\mathbb{R}^3$ *del Ejemplo 2 tiene rotacional nulo,* $\operatorname{rot}\psi = 0$. *Por tanto, satisface de manera automática la ecuación* (9). *Utilizando la fórmula* (10)*, el correspondiente corchete de Poisson está dado por*

$$\{f, g\}_\psi = x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}\right) + z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Ejemplo 6. *Para el corchete de Poisson del Ejemplo 3 se tiene que* $\{y, z\} = 1$, $\{z, x\} = 1$, $\{x, y\} = 1$. *Por tanto, induce el campo vectorial constante* $\psi = (1, 1, 1)^\top$ *en* $\mathbb{R}^3$ *que claramente satisface la ecuación* (9) *por tener rotacional cero.*

Observaciones 8. *La ecuación* (9) *codifica la identidad de Jacobi para la operación definida en* (10). *En términos coordenados, esta ecuación se traduce en un sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.*

Caracterizar a los corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$ en términos de campos vectoriales permite utilizar herramientas del cálculo vectorial para estudiar ciertas propiedades y/u objetos asociados. En la siguiente sección aprovecharemos esta observación para estudiar una clase especial de transformaciones de los corchetes de Poisson, llamadas transformaciones gauge.

4. Transformaciones Gauge de Corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$

Es usual que al tener un determinado objeto algebraico, o geométrico, surja la pregunta de si es posible transformarlo y obtener un (otro) objeto de la misma naturaleza. Para el caso de los corchetes de Poisson en variedades diferenciales existe un tipo especial de transformaciones, que se llaman transformaciones gauge, con la propiedad de transformar corchetes de Poisson en corchetes de Poisson y que en cierto modo actúan como una especie de simetría sobre las correspondientes variedades diferenciales (ver Observaciones 1). El primer objetivo de esta sección es presentar una descripción de estas transformaciones en el espacio euclideano 3–dimensional. Luego, utilizando esta descripción, se mostrará que el estudio de transformaciones gauge "afines" de corchetes de Poisson lineales se reduce al estudio de cuádricas en $\mathbb{R}^3$.

Antes de presentar la definición de una transformación gauge recordamos que, como consecuencia del Lema 1, el estudio de los corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$ se reduce al estudio de campos vectoriales que satisfacen la ecuación (9), cuyo conjunto denotaremos por

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3) := \{\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid \langle \psi, \operatorname{rot}\psi\rangle = 0\}.$$

Así, para cualquier corchete de Poisson $\{\,,\,\}$ en $\mathbb{R}^3$ existe un único campo vectorial $\psi \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$ tal que la actuación de $\{\,,\,\}$ es dada por la fórmula (10). Por tanto, podemos considerar a los corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$ parametrizados por la familia de campos vectoriales $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$, lo cual escribiremos por

$$\{\,,\,\} = \{\,,\,\}_\psi.$$

Luego, de manera natural, una transformación entre corchetes de Poisson se corresponderá con una transformación entre campos vectoriales en $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$, y los correspondientes campos matriciales (ver (iii) del Lema 1).

Definición 1. *Sea $\{\,,\,\}_\psi$ un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$. Dado un campo vectorial ϕ en $\mathbb{R}^3$ tal que el (3×3)–campo matricial*

$$I - [\phi]_\times\,[\psi]_\times \quad \textit{es invertible en un abierto} \quad U_{\phi,\psi} \subseteq \mathbb{R}^3, \tag{12}$$

con I la matriz identidad, el corchete de Poisson $\{\,,\,\}_{\Gamma_\phi(\psi)}$ correspondiente al (3×3)–campo matricial antisimétrico

$$\big[\Gamma_\phi(\psi)\big]_\times := [\psi]_\times\big(I - [\phi]_\times\,[\psi]_\times\big)^{-1} \tag{13}$$

se llama la transformación gauge *de $\{\,,\,\}_\psi$ asociada a ϕ en el abierto $U_{\phi,\psi}$.*

Por simplicidad, nos referiremos al corchete de Poisson $\{\,,\,\}_{\Gamma_\phi(\psi)}$ como la *transformación ϕ–gauge* de $\{\,,\,\}_\psi$.

Observaciones 9. *La antisimetría de la matriz $[\Gamma_\phi(\psi)]_\times$ definida en (13) se sigue de (i) la identidad de Weinstein–Aronszajn (Howland, 1970): sean P y Q matrices (reales) de dimensiones adecuadas, entonces $I+QP$ es invertible si y sólo si $I+PQ$ es invertible. (ii) La igualdad $P(I+QP)^{-1} = (I+PQ)^{-1}P$. Basta con tomar $P=[\psi]_\times$ y $Q=-[\phi]_\times$ y calcular $[P(I+QP)^{-1}]^\top$.*

Ejemplo 7. *Si ϕ es el campo vectorial trivial en $\mathbb{R}^3$, $\phi\equiv 0$, entonces la trasformación ϕ–gauge de cualquier corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$ es igual a él mismo.*

Observaciones 10. *En un contexto más general, las transformaciones gauge son transformaciones inducidas por una 2–forma diferencial que, en el dominio donde están definidas, dejan invariante en cierto sentido una geometría generada por los corchetes de Poisson en variedades diferenciales. Este estudio queda fuera del alcance de este artículo, el lector interesado puede consultar (Ševera and Weinstein, 2001; Bursztyn, 2005; Evangelista-Alvarado et al., 2021) (ver también, Observaciones 1). En particular, en (Evangelista-Alvarado et al., 2021) se presentan fórmulas análogas a (15) y (14) válidas en variedades diferenciales 3–dimensionales.*

Para este artículo, lo importante de la Definición 1 es que proporciona un mecanismo para construir un corchete de Poisson a partir de uno dado. Sin embargo, en esencia, tal mecanismo involucra el determinar la invertibilidad y la inversa de una matriz de tipo $I+M$, lo que en general es un problema no trivial. Afortunadamente, para el caso particular (12) que ocupa a la Definición 1 se pueden obtener expresiones explícitas que dan lugar al siguiente resultado.

Proposición 1. *Sea $\{\,,\,\}_\psi$ un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$. Dado un campo vectorial ϕ en $\mathbb{R}^3$, la transformación ϕ–gauge de $\{\,,\,\}_\psi$ está bien definida en el abierto*

$$U_{\phi,\psi} = \big\{\langle\phi,\psi\rangle + 1 \neq 0\big\} \subseteq \mathbb{R}^3. \tag{14}$$

Aún más, está dada en este abierto por

$$\{f,g\}_{\Gamma_\phi(\psi)} = \frac{1}{\langle\phi,\psi\rangle+1}\,\{f,g\}_\psi, \quad f,g\in C^\infty_{\mathbb{R}^3}. \tag{15}$$

Demostración. *Sea $\delta := \langle \phi, \psi \rangle + 1 \in C^\infty_{\mathbb{R}^3}$. Primero, por cálculo directo, tenemos que*

$$I - [\phi]_\times [\psi]_\times = \delta I - \psi\, \phi^\top.$$

Luego, se puede verificar que

$$\det(\delta I - \psi\, \phi^\top) = \delta^2.$$

En consecuencia, la condición (12) *equivale a pedir $\delta \neq 0$. Es decir, se cumple en el abierto $U_{\phi,\psi} = \{\delta \neq 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Lo que prueba* (14)*. Ahora, en el abierto $U_{\phi,\psi}$, por la fórmula de Sherman–Morrison (Golub and Van Loan, 2013), tenemos que*

$$\big(\delta I - \psi\, \phi^\top\big)^{-1} = \delta^{-1} I + \tfrac{\delta^{-2}}{1-\delta^{-1}\langle \phi,\psi\rangle}\, \psi\, \phi^\top = \delta^{-1}(I + \psi\, \phi^\top)$$

Luego, es claro que

$$[\psi]_\times \big(\delta I - \psi\, \phi^\top\big)^{-1} = \delta^{-1} [\psi]_\times.$$

Por tanto, usando (7)*, el (*3×3*)–campo matricial antisimétrico en* (13) *es dado por*

$$\big[\Gamma_\phi(\psi)\big]_\times = \tfrac{1}{\delta} [\psi]_\times = \big[\tfrac{1}{\delta}\psi\big]_\times.$$

Lo que implica que

$$\Gamma_\phi(\psi) = \tfrac{1}{\delta}\psi.$$

Ahora, ya que $\operatorname{rot}(\delta^{-1}\psi) = \delta^{-1} \operatorname{rot}\psi + \delta^{-2}\, \psi \times \nabla\delta$*, el campo vectorial $\Gamma_\phi(\psi)$ satisface la ecuación* (9)*, pues ψ lo hace por hipótesis. Por lo tanto, del Lema 1, se sigue que $\Gamma_\phi(\psi)$ induce un corchete de Poisson que, por* (10)*, está definido en $U_{\phi,\psi}$ por*

$$\{f, g\}_{\Gamma_\phi(\psi)} = \langle \Gamma_\phi(\psi), \nabla f \times \nabla g \rangle = \langle \tfrac{1}{\delta}\psi, \nabla f \times \nabla g \rangle = \tfrac{1}{\delta} \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle = \tfrac{1}{\delta}\{f, g\}_\psi,$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty_{\mathbb{R}^3}$. Lo que prueba (15)*.* □

En otras palabras, la Proposición 1 nos dice que la transformación ϕ–gauge de un corchete de Poisson $\{\ ,\ \}_\psi$ en $\mathbb{R}^3$ es un múltiplo de ella misma por una función escalar. Lo que resuelve el problema de determinar de manera explícita la transformación gauge de un corchete de Poisson dado. Aún más, nos dice que es el corchete de Poisson parametrizado por el campo vectorial

$$\Gamma_\phi(\psi) = \frac{1}{\langle \phi, \psi \rangle + 1}\, \psi, \tag{16}$$

definido en el abierto $U_{\phi,\psi}$ en (14). En consecuencia, bajo un abuso de notación, se tiene inducida una transformación $C^\infty_{\mathbb{R}^3}$–lineal $\Gamma_\phi : \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3) \to \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$ entre campos vectoriales en $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$ definida por la fórmula (16).

Por lo anterior, el estudio de las transformaciones gauge de corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^3$ se reduce al estudio de transformaciones Γ_ϕ de campos vectoriales en $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^3)$. Aún más, por la definición de Γ_ϕ, es claro que todo se reduce al estudio de la ecuación

$$\langle \phi, \psi \rangle + 1 = 0, \tag{17}$$

por ser $U_{\phi,\psi} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\langle \phi, \psi \rangle + 1 = 0\}$. □

Ejemplo 8. *Sea* $\{\,,\,\}_\psi$ *un corchete de Poisson en* $\mathbb{R}^3$*. Entonces, la transformación* ψ*–gauge de* $\{\,,\,\}_\psi$ *está bien definida en todo* $\mathbb{R}^3$ *y es igual al corchete de Poisson* $1/(\|\psi\|^2+1)\,\{\,,\,\}_\psi$*.*

Corolario 1. *Sea* $\{\,,\,\}_\psi$ *un corchete de Poisson en* $\mathbb{R}^3$*. Si* ϕ *es un campo vectorial en* $\mathbb{R}^3$ *ortogonal a* ψ*, es decir,* $\langle\phi,\psi\rangle=0$*, entonces la transformación* ϕ*–gauge de* $\{\,,\,\}_\psi$ *está bien definida en todo* $\mathbb{R}^3$ *y es igual* $\{\,,\,\}_\psi$*.*

En general, dar una descripción de la superficie (de nivel) generada por la ecuación (17), y por tanto del abierto $U_{\phi,\psi}$ en (14), es un problema complicado que depende claramente de las propiedades de los campos vectoriales ψ y ϕ. Como veremos a continuación, para el caso en que ψ es un campo vectorial lineal y ϕ es un campo vectorial afín la ecuación (17) es la ecuación de una cuádrica en $\mathbb{R}^3$.

5. Caso: Corchetes de Poisson lineales en $\mathbb{R}^3$

En este apartado, utilizando el estudio realizado previamente en esta sección, se muestra que las cuádricas en $\mathbb{R}^3$ determinan el dominio de definición de las transformaciones gauge dadas por campos vectoriales afines de corchetes de Poisson lineales. Luego, aplicando este resultado y una clasificación conocida de cuádricas en $\mathbb{R}^3$, se describen para el corchete de Poisson (lineal) del cuerpo rígido (Marsden and Ratiu, 1999) las transformaciones gauge dadas por campos vectoriales afines y se presentan algunas condiciones que ayudan a determinar el dominio en el que están definidas.

Un corchete de Poisson $\{\,,\,\}_\psi$ en $\mathbb{R}^3$ se dice *lineal* si ψ es un campo vectorial lineal, es decir, si es de la forma

$$\psi = LX = \big(l_{11}x+l_{12}y+l_{13}z,\ l_{21}x+l_{22}y+l_{23}z,\ l_{31}x+l_{32}y+l_{33}z\big)^\top, \tag{18}$$

donde $L=[l_{ij}]$ es una matriz real de tamaño 3×3, con $l_{ij}\in\mathbb{R}$ e $i,j=1,2,3$.

Sea ϕ un campo vectorial *afín* en $\mathbb{R}^3$, es decir, la suma de un campo vectorial lineal y uno constante en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\phi &= MX + c \qquad (19)\\ &= \big(m_{11}x+m_{12}y+m_{13}z+c_1, m_{21}x+m_{22}y+m_{23}z+c_2, m_{31}x+m_{32}y+m_{33}z+c_3\big)^\top,\end{aligned}$$

donde $M=[m_{ij}]$ es una matriz real de tamaño 3×3, con $m_{ij}\in\mathbb{R}$, y $c=(c_1,c_2,c_3)^\top$ es un campo vectorial constante (vector) en $\mathbb{R}^3$.

A continuación, presentamos el resultado principal de este artículo.

Teorema 1. *La transformación gauge de un corchete de Poisson lineal en* $\mathbb{R}^3$ *mediante un campo vectorial afín está definida en* $\mathbb{R}^3$ *salvo una* ***cuádrica****, pudiendo ser ésta imaginaria o degenerada.*

La demostración de este teorema se basa en el siguiente lema.

Lema 2. *Si ψ es un campo vectorial lineal y ϕ es un campo vectorial afín en $\mathbb{R}^3$, entonces la ecuación* (17) *es la ecuación de una cuádrica en $\mathbb{R}^3$.*

Demostración. *Por cálculo directo, usando* (18) *y* (19)*, tenemos que*

$$\langle \phi, \psi \rangle + 1 = \big\langle MX + c, LX \big\rangle + 1 = \big\langle \tfrac{1}{2}(L^\top M + M^\top L)X + L^\top c, X \big\rangle + 1.$$

Luego, la ecuación (17) *es igual a la ecuación* (3) *tomando $S_u = \frac{1}{2}(L^\top M + M^\top L)$, $\ell = L^\top c$ y $J = 1$. Lo que prueba la afirmación de este lema.* □

Ahora, presentamos la demostración del Teorema 1.

Demostración (del Teorema 1)**.** *Sean $\{\,,\,\}_\psi$ un corchete de Poisson lineal y ϕ un campo vectorial afín en $\mathbb{R}^3$. Por el Lema 2, el abierto $U_{\phi,\psi}$ en* (14) *en el que está definida la transformación ϕ–gauge de $\{\,,\,\}_\psi$ es el complemento de una cuádrica en $\mathbb{R}^3$.* □

En otras palabras, el Teorema 1 permite reducir el estudio de las transformaciones gauge de corchetes de Poisson lineales en $\mathbb{R}^3$, mediante campos vectoriales afines, al estudio de cuádricas en $\mathbb{R}^3$. El hecho de que las cuádricas puedan ser *imaginarias* equivale a que tales transformaciones pueden estar definidas en *todo el espacio* $\mathbb{R}^3$. Todo esto da una respuesta particular al problema de describir de manera explícita el abierto $U_{\phi,\psi}$ en (14) en el que está definida una transformación gauge.

A continuación, aplicamos el Teorema 1 a un corchete de Poisson lineal bastante conocido: el corchete de Poisson del cuerpo rígido.

Observaciones 11. *De manera más general, si ψ y ϕ son campos vectoriales polinomiales en $\mathbb{R}^3$, entonces la ecuación* (17) *define una variedad algebraica en $\mathbb{R}^3$, en sentido clásico. Así, el Teorema 1 se puede generalizar de la siguiente manera:* la transformación gauge de un corchete de Poisson polinomial en $\mathbb{R}^3$ mediante un campo vectorial polinomial está definida en $\mathbb{R}^3$ salvo una variedad algebraica.

Corchete de Poisson del Cuerpo Rígido. El corchete de Poisson lineal en $\mathbb{R}^3$

$$\{\,,\,\}_{\mathrm{rig}} = \{\,,\,\}_\psi$$

correspondiente al campo vectorial del Ejemplo 2,

$$\psi = (x, y, z)^\top, \tag{20}$$

se llama corchete de Poisson del *cuerpo rígido* (Marsden and Ratiu, 1999), con expresión explícita dada en el Ejemplo 5. Se llama así porque codifica las ecuaciones (y la geometría) que determinan la evolución temporal del sistema físico denominado cuerpo rígido. Grosso modo, un cuerpo rígido es un cuerpo ideal que no sufre ningún tipo de deformación bajo la acción de una fuerza externa aplicada sobre él. En otras palabras, la distancia entre dos puntos cualesquiera de un cuerpo rígido permanece constante en el tiempo, independientemente de las fuerzas externas aplicadas sobre él.

Ahora, notemos que la matriz que determina al campo vectorial lineal ψ en (20), en el sentido de (18), es la matriz indentidad ($L = I$). Luego, dado un campo vectorial afín ϕ como en (19), por el Lema 2, la ecuación (17) da lugar a la siguiente ecuación de una cuádrica:

$$\langle MX + c, X\rangle + 1 = 0.$$

De manera más explícita,

$$Q := m_{11}x^2 + m_{22}y^2 + m_{33}z^2 + (m_{12} + m_{21})xy + (m_{13} + m_{31})xz + (m_{23} + m_{32})yz + c_1x + c_2y + c_3z + 1 = 0 \quad (21)$$

Así, de la Proposición 1 se desprende el siguiente resultado.

Teorema 2. *Sea ϕ un campo vectorial afín en $\mathbb{R}^3$ como en* (19)*. Entonces, la transformación ϕ–gauge del corchete de Poisson del cuerpo rígido está dada por*

$$\frac{1}{Q}\{\,,\,\}_{\mathrm{rig}},$$

y está definida en el abierto

$$\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_Q, \tag{22}$$

donde Q es el polinomio cuadrático en $\mathbb{R}^3$ definido en (21) *y Σ_Q es la cuádrica inducida por Q vía la ecuación* (21)*.*

Por ser ϕ un campo vectorial arbitrario, para determinar completamente las transformaciones gauge en este teorema solo falta describir las posibles cuádricas Σ_Q en (22) en términos de la matriz M y el vector c en (19). Esto es lo que presentamos en el siguiente teorema para el caso particular en que M es la suma de una matriz diagonal y una matriz antisimétrica, utilizando la clasificación de cuádricas en el Apéndice A.

Teorema 3. *Sea ϕ un campo vectorial afín en $\mathbb{R}^3$ como en* (19) *tal que M es una matriz que satisface las siguientes condiciones:*

$$m_{21} = -m_{12}, \quad m_{31} = -m_{13} \quad y \quad m_{32} = -m_{23}. \tag{23}$$

Entonces, la transformación ϕ–gauge del corchete de Poisson del cuerpo rígido está definida en el abierto

$$\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma_Q,$$

donde Σ_Q es una cuádrica en $\mathbb{R}^3$. Aún más, asumiendo (23)*, la Tabla 1 presenta algunas condiciones bajo las cuales Σ_Q queda determinada:*

Tabla 1: Cuádricas Σ_Q

$\boldsymbol{\Sigma_Q}$	**Condiciones**
Plano	$m_{33} \neq 0, m_{11} = m_{22} = c_1 = c_2 = 0, 4m_{33} = c_3^2$
”	$m_{33} = c_1 = 0, 4m_{22} = c_2^2 \neq 0$
”	$m_{33} = c_2 = 0, 4m_{11} = c_1^2 \neq 0$
Planos paralelos	$m_{11} \neq 0, m_{22} = m_{33} = c_2 = c_3 = 0, 4m_{11} - c_1^2 \neq 0$
”	$m_{22} \neq 0, m_{11} = m_{33} = c_1 = c_3 = 0, 4m_{22} - c_2^2 \neq 0$
”	$m_{33} \neq 0, m_{11} = m_{22} = c_1 = c_2 = 0, 4m_{33} - c_3^2 \neq 0$
Cilindro Parabólico	$m_{33} \neq 0, m_{11} = m_{22} = 0, \text{nonzero}(c_1, c_2) \geq 1$
”	$m_{11}, c_3 \neq 0, m_{22} = m_{33} = 0$
”	$m_{22}, c_3 \neq 0, m_{11} = m_{33} = 0$
”	$m_{11}, c_2 \neq 0, m_{22} = m_{33} = c_3 = 0$
”	$m_{22}, c_1 \neq 0, m_{11} = m_{33} = c_3 = 0$
Par de planos intersectados	$m_{33} = c_3 = 0, m_{11}c_2^2 + m_{22}c_1^2 = 4m_{11}m_{22} < 0$
Imaginaria	$m_{33} = c_3 = 0, m_{11}c_2^2 + m_{22}c_1^2 = 4m_{11}m_{22} > 0$
Cilindro hiperbólico	$m_{11}m_{22} < 0, m_{33} = c_3 = 0, m_{11}c_2^2 + m_{22}c_1^2 - 4m_{11}m_{22} \neq 0$
Cilindro elíptico	$m_{11}m_{22} > 0, m_{33} = c_3 = 0, m_{11}c_2^2 + m_{22}c_1^2 - 4m_{11}m_{22} \neq 0$
Paraboloide hiperbólico	$c_3 \neq 0, m_{11}m_{22} < 0, m_{33} = 0$
Paraboloide elíptico	$c_3 \neq 0, m_{11}m_{22} > 0, m_{33} = 0$

Demostración (bosquejo)**.** *Por* (23)*, el polinomio cuadrático* Q *en* (21) *es en este caso igual a*

$$Q = m_{11}x^2 + m_{22}y^2 + m_{33}z^2 + c_1x + c_2y + c_3z + 1.$$

Luego, por (3) *y* (4)*, la matriz* S_u *y el vector* ℓ *que determinan a* Q *son dados por*

$$S_u = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \quad y \quad \ell = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la Tabla 1 se obtiene después de varios cálculos siguiendo los criterios y la clasificación en el Apéndice A con S_u *como antes,* $\overline{\ell} = \frac{1}{2}\ell$ *y* $J = 1$*.* □

Cabe mencionar que en este teorema nos limitamos a matrices que satisfacen (23) porque considerar a M de manera general no permite deducir condiciones explícitas que describan a Σ_Q, como en la Tabla 1, más allá de las condiciones generales presentadas en la clasificación en el Apéndice A. Además, aclaramos que las condiciones presentadas en estas tablas no son exhaustivas, se eligieron sólo las más ilustrativas, a nuestro parecer.

Agradecimientos

J. C. Ruíz–Pantaleón agradece a CONACyT la beca posdoctoral durante la realización de este trabajo. También agradece el esfuerzo y la dedicación de C. Giottonini–Maldonado para con este artículo que forma parte de su tesis de licenciatura.

A. Apéndice: Clasificación de Cuádricas en $\mathbb{R}^3$

Dada la ecuación de una cuádrica en $\mathbb{R}^3$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

con $A, B, \ldots, J \in \mathbb{R}$, definamos la siguiente matriz simétrica 3×3 y el vector en $\mathbb{R}^3$:

$$S_u := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2A & D & E \\ D & 2B & F \\ E & F & 2C \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\ell} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}.$$

Consideremos la matriz simétrica por bloques 4×4

$$S = \begin{pmatrix} S_u & \bar{\ell} \\ \bar{\ell}^\top & J \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Definamos

$$\rho_3 := \operatorname{rank} S_u, \quad \rho_4 := \operatorname{rank} S, \quad \Delta := \det S$$

y

$$k := \begin{cases} 1 & \text{si los valores propios no triviales de } S_u \text{ tienen el mismo signo,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tabla 2: Clasificación de cuádricas en $\mathbb{R}^3$

Cuádrica	**Ecuación Canónica**	$\boldsymbol{\rho_3}$	$\boldsymbol{\rho_4}$	**sgn**$(\boldsymbol{\Delta})$	$\boldsymbol{k}$
elipsoide (imaginario)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	3	4	$+$	1
elipsoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	3	4	$-$	1
hiperboloide de una hoja	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	3	4	$+$	0
hiperboloide de dos hojas	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	3	4	$-$	0
paraboloide hiperbólico	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=z$	2	4	$+$	0
paraboloide elíptico	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$	2	4	$-$	1
cono elíptico (imaginario)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	3	3		1
cono elíptico	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	3	3		0
cilindro elíptico (imaginario)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	2	3		1
cilindro elíptico	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	2	3		1
cilindro hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$	2	3		0
cilindro parabólico	$x^2+2az=0$	1	3		
par de planos intersectados (imaginario)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	2	2		1
par de planos intersectados	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	2	2		0
planos paralelos (imaginario)	$x^2=-a^2$	1	2		
planos paralelos	$x^2=a^2$	1	2		
planos coincidentes	$x^2=0$	1	1		

Referencias

Bursztyn, H. (2005). *On Gauge Transformations of Poisson Structures*, pages 89–112. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

de la Cruz, M., Gaspar, N., Jiménez-Lara, L., and Linares, R. (2017). Classification of the classical $SL(2,\mathbb{R})$ gauge transformations in the rigid body. *Annals of Physics*, 379:112–130.

Dufour, J.-P. and Zung, N. T. (2005). *Poisson Structures and Their Normal Forms*. Birkhäuser Basel, Basilea, Suiza.

Evangelista-Alvarado, M. A., Ruíz-Pantaleón, J. C., and Suárez-Serrato, P. (2021). On computational Poisson geometry I: Symbolic foundations. *Journal of Geometric Mechanics*.

Golub, G. H. and Van Loan, C. F. (2013). *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland.

Howland, J. S. (1970). On the Weinstein-Aronszajn formula. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 39:323–339.

Laurent-Gengoux, C., Pichereau, A., and Vanhaecke, P. (2013). *Poisson Structures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin/Heidelberg, Germany.

Lichnerowicz, A. (1977). Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *Journal of Differential Geometry*, 12(2):253–300.

Liu, S. and Trenkler, G. (2008). Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 4(1):160–177.

Marsden, J. E. and Ratiu, T. S. (1999). *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Springer, New York, NY, New York, EE. UU.

Poisson, S. D. (1809). Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique. *Journal de l'École Polytechnique – Mathématiques*, 8:266–344.

Ševera, P. and Weinstein, A. (2001). Poisson geometry with a 3-form background. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 144:145–154.

Weinstein, A. (1983). The local structure of Poisson manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 18(3):523–557.

Zwillinger, D. (2018). *CRC Standard Mathematical Tables and Formulas*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida.

Como citar este artículo: Giottonini Maldonado, C., & Ruiz Pantaleon, J. C. Cuádricas en $\mathbb{R}^3$: Una aplicación en Geometría de Poisson. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365, 5(2), 28–44. https://doi.org/10.36788/sah.v5i2.122