

Un recorrido por el concepto de curvatura

José Luis Cisneros Molina¹

Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, Universidad Nacional Autónoma de México

¹jlcisneros@im.unam.mx

Resumen

La curvatura es uno de los conceptos más importantes en geometría diferencial. En este artículo daremos un recorrido por las ideas detrás de este concepto. Veremos diferentes maneras de definir la curvatura de curvas y diferentes tipos de curvaturas para superficies y variedades de dimensiones superiores.

Palabras Clave: Curvatura normal, curvaturas principales, curvatura Gaussiana, curvatura media, curvatura seccional, curvatura escalar, Teorema Egregio de Gauss, Teorema de Gauss-Bonnet.

DOI: 10.36788/sah.v5i2.120

Recibido: 8 de julio de 2021.

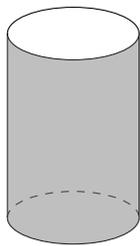
Aceptado: 14 de septiembre de 2021.

1. Introducción

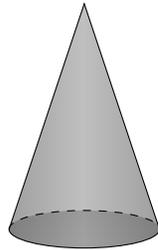
El objetivo de este artículo es presentar diferentes nociones de curvatura en geometría diferencial a partir de su significado geométrico en ejemplos, así como la expresión analítica de dichos conceptos. Es una introducción a la geometría diferencial, dirigido a estudiantes de ciencias e ingenierías quienes hayan cursado cálculo de varias variables. Comenzando con la idea intuitiva de que una línea recta no se curva, y de que una circunferencia de radio pequeño se curva más que una circunferencia de radio mayor, se definirá de manera geométrica y analítica la curvatura de curvas planas y en el espacio. Posteriormente, usando la curvatura de curvas planas, introduciremos las curvaturas normales de una superficie, y entre ellas, especificaremos a las curvaturas principales. A partir de éstas últimas, presentaremos la curvatura Gaussiana y la curvatura media de una superficie. Definiremos curvaturas análogas para el caso de hipersuperficies y finalmente definiremos la curvatura seccional y la curvatura escalar de una variedad Riemanniana. Terminamos enunciando algunos teoremas clásicos que involucran a las curvaturas Gaussiana y media de una superficie. Dado que nuestro objetivo es concentrarnos en el aspecto geométrico de la curvatura, no mencionaremos nada acerca de su desarrollo histórico, lo cual también es un tema apasionante, para ello recomendamos el artículo (Naveira, 2007).

2. Motivación

Podemos comprobar empíricamente que a partir de una *hoja de papel* se pueden formar un *cono* o un *cilindro*. Pero es imposible obtener un pedazo de *esfera*, sin doblar, estirar o cortar la hoja. La razón de esto es que un plano, un cono y un cilindro tienen la misma “curvatura Gaussiana”, mientras que en un plano y una esfera dicha curvatura es diferente. Es por esto que es imposible construir el mapa perfecto, es decir, al representar a la superficie de la Tierra en un plano, siempre habrá distorsiones en las distancias. Es posible construir mapas que preserven los ángulos de las trayectorias recorridas, como el *Mapa de Mercator*, o mapas que preserven las áreas, pero no se puede construir un mapa que preserve todas estas propiedades, ni que preserve todas las distancias.¹



(a) Cilindro



(b) Cono



(c) Esfera

3. Curvas en el plano

Comenzaremos considerando curvas en el plano Euclidiano \mathbb{R}^2 . Recordemos que \mathbb{R}^2 consiste de todas las parejas ordenadas de números reales $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Sea $I = [0, 1]$. Una función $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de la forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, donde las funciones $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son llamadas las *funciones coordenadas* de α . La función α es *diferenciable* cuando todas sus funciones coordenadas son diferenciables.

Una *curva parametrizada diferenciable* en \mathbb{R}^2 es una función diferenciable $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$. A su imagen $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ se le denomina la *traza* de α . Podemos pensar a una curva parametrizada como una partícula moviéndose a lo largo de la traza de α , tal que al tiempo t se encuentra en el punto $\alpha(t)$. El *vector tangente* o *vector velocidad* de la curva α en el punto $\alpha(t)$, denotado por $\alpha'(t)$, es el vector dado por las derivadas de las funciones coordenadas, es decir $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. Una curva parametrizada diferenciable es *regular* si el *vector tangente* es distinto del *vector cero* para toda $t \in I$.

Dadas una función diferenciable $h: I \rightarrow I$ tal que $h'(t) > 0$ para toda $t \in I$ y una curva parametrizada diferenciable regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, la composición $\beta(t) = \alpha(h(t))$ es otra curva parametrizada regular. Decimos que β es una *reparametrización* de α .

¹Para saber más sobre las matemáticas involucradas al hacer mapas, recomiendo el video **Mapas**, de la serie *Aventuras Matemáticas* del Instituto de Matemáticas de la UNAM <https://www.matem.unam.mx/~video/mapas/map.html>.

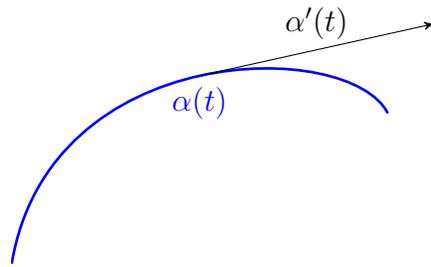


Figura 1: Curva parametrizada y vector tangente.

Dada una curva parametrizada diferenciable regular $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, siempre es posible encontrar una reparametrización β tal que la norma del vector velocidad es 1 en todo punto, es decir, $\|\beta'(t)\| = 1$ para toda $t \in I$ (ver (do Carmo, 1994, §1.5, Observación 2)). En este caso decimos que β está *parametrizada por longitud de arco*, ya que el parámetro nos da la longitud recorrida.

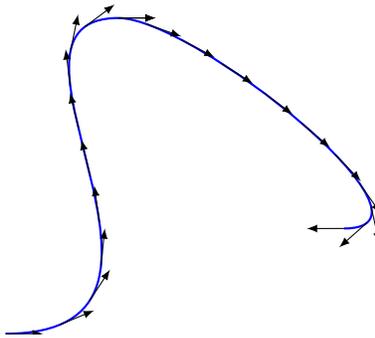


Figura 2: Curva parametrizada por longitud de arco.

3.1. Curvatura

El problema que nos planteamos es el siguiente:

Dada una curva parametrizada diferenciable regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$,

¿Cómo podemos medir qué tanto se curva?

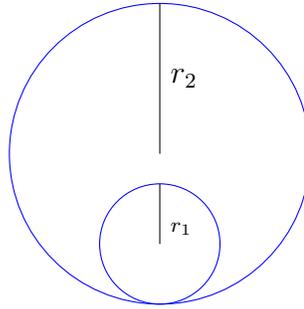
Daremos dos respuestas, una geométrica y una analítica.

Respuesta geométrica

Partimos de dos ideas intuitivas:

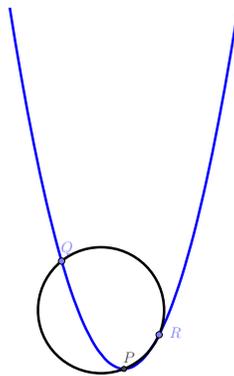
1. *Una recta no se curva.* Entonces diremos que una *recta* tiene *curvatura cero*.

-
2. Sean C_{r_1} y C_{r_2} dos circunferencias de radios r_1 y r_2 respectivamente. Si $r_1 < r_2$, entonces C_{r_1} se curva más que C_{r_2} .

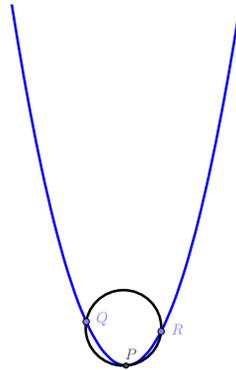


Es decir, la curvatura de una circunferencia es inversamente proporcional a su radio. Entonces diremos que *la curvatura de la circunferencia C_r de radio r es $\frac{1}{r}$* . Esto es compatible con el inciso 1, si consideramos a las rectas como circunferencias de radio infinito.

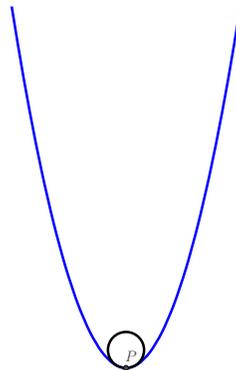
Dada una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada regular, es decir, con $\alpha'(t) \neq 0$ para toda $t \in I$, queremos asociarle una función $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ que en cada punto $\alpha(t)$ la cantidad $\kappa(t)$ indique “cuánto se curva la curva en dicho punto”. La idea es encontrar la circunferencia que *mejor aproxima* a la curva α en el punto $P = \alpha(t_0)$. Tomamos dos puntos $Q = \alpha(t_1)$ y $R = \alpha(t_2)$ cercanos al punto $P = \alpha(t_0)$ y trazamos la circunferencia que pasa por Q , P y R .



Hacemos tender t_1 y t_2 a t_0 , es decir hacemos tender los puntos Q y R al punto P .



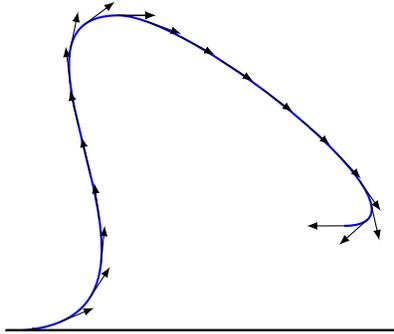
Si $\alpha''(t_0) \neq 0$, en el límite, obtenemos una circunferencia de radio r_P la cual es llamada *círculo osculador* a α en P , para una demostración ver (Spivak, 1979, Chapter 1, Theorem 1). Entonces definimos la *curvatura* de la curva α en el punto $P = \alpha(t_0)$ por $\kappa(t_0) = \frac{1}{r_P}$. Si $\alpha''(t_0) = 0$ definimos $\kappa(t_0) = 0$.



A esta noción de curvatura podemos asignar un *signo* que indica la dirección en que se desvía la curva. Asignamos el signo *positivo* cuando el centro del círculo osculador queda a la izquierda de la dirección de avance de la curva, y *negativo* en el caso contrario.

Respuesta analítica

Fijemos una recta en el plano, digamos el eje x . Dada una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular parametrizada por longitud de arco, sea $\theta(t)$ el ángulo entre el vector tangente $\alpha'(t)$ a la curva α en el punto $\alpha(t)$ y el eje x .



Intuitivamente, si la trayectoria es una recta, el ángulo no cambia y se mantiene *constante*. Por otro lado, si la trayectoria se curva mucho, el ángulo *cambia muy rápido*. Por lo tanto, definimos la curvatura como la razón de cambio del ángulo:

$$\kappa(t) = \frac{d\theta}{dt}(t).$$

Esta definición no sólo nos da una magnitud, que mide la razón de la desviación de la curva de una recta, sino también un *signo* el cual indica la dirección de la desviación. El signo de la curvatura en un punto es:

Positivo si a partir de dicho punto la curva continúa hacia el lado izquierdo de la recta tangente que pasa por dicho punto, como se ilustra en la Figuras 3.

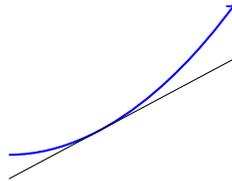


Figura 3: Curvatura positiva.

Negativo si a partir de dicho punto la curva continúa hacia el lado derecho de la recta tangente que pasa por dicho punto, como se muestra en la Figura 4.

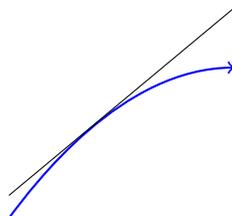


Figura 4: Curvatura negativa.

Las dos nociones de curvatura coinciden si asignamos un signo a la noción geométrica como se indicó.

4. Curvas en el espacio

Ahora consideraremos curvas en el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ y definiremos su curvatura de manera analítica.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable regular dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Supongamos además que la curva α está parametrizada por longitud de arco, es decir, $\|\alpha'(t)\| = 1$ para toda $t \in I$. Como ejemplo, en la Figura 5 se muestra la curva en el espacio llamada *hélice* dada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, donde pedimos que $a^2 + b^2 = 1$ para que esté parametrizada por longitud de arco.

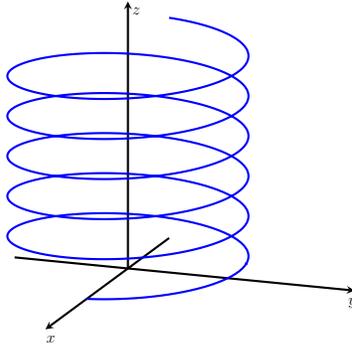


Figura 5: Curva en el espacio: Hélice.

Denotemos por $T(t) = \alpha'(t)$ al vector tangente. Como $\|T(t)\| = \|\alpha'(t)\| = 1$ es *constante*, $T'(t)$ mide la razón de cambio del *ángulo* que las tangentes cercanas hacen con la tangente en t . Por lo tanto definimos la curvatura de α en el punto $\alpha(t)$ por

$$k(t) = \|T'(t)\| = \|\alpha''(t)\|.$$

Si la curva yace en un plano, las dos definiciones de curvatura coinciden salvo signo, es decir:

$$k(t) = |\kappa(t)|.$$

El vector $\alpha''(t)$ es ortogonal al vector tangente $\alpha'(t)$, por esta razón, al vector unitario $n(t)$ en la dirección del vector $\alpha''(t)$ se le llama el *vector normal* a la curva α en el punto $\alpha(t)$. Además tenemos que $\alpha''(t) = k(t)n(t)$.

5. Superficies

El siguiente paso es estudiar superficies en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 . Así como en las secciones anteriores trabajamos con curvas parametrizadas regulares, que son curvas que en

cada punto tienen un vector tangente no cero, ahora trabajaremos con superficies regulares, que son aquellas que tienen en cada punto un plano tangente bien definido.

Así como definimos una curva en \mathbb{R}^3 como una función de una variable real cuya imagen es un conjunto de \mathbb{R}^3 , para definir una superficie es razonable considerar ahora funciones de dos variables reales $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces F se puede escribir como una terna de funciones coordenadas, es decir

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Como pedimos que F sea diferenciable, todas y cada una de sus funciones coordenadas son diferenciables, es decir, las derivadas parciales de todos los órdenes existen. Entonces podemos definir la *derivada parcial* $\frac{\partial F}{\partial u}$ de F con respecto a u , también denotada por F_u , por

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = F_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right).$$

Análogamente podemos definir las restantes derivadas parciales de F : $\frac{\partial F}{\partial v} = F_v$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = F_{uu}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = F_{uv}$, etc.

Una *superficie parametrizada diferenciable regular* en \mathbb{R}^3 es una función diferenciable $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, con U un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 , tal que los dos vectores dados por las derivadas parciales $F_u(u, v)$ y $F_v(u, v)$ son linealmente independientes para todo punto (u, v) en U , o equivalentemente, que la *matriz Jacobiana* DF_q de F , dada por

$$DF_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} = (F_u(q) \quad F_v(q)),$$

tenga rango 2 para toda $q = (u, v)$ en U . A su vez, esto es equivalente a que el producto cruz $F_u(u, v) \times F_v(u, v)$ sea distinto de cero, es decir, que haya un vector normal bien definido en el punto $p = F(u, v)$. La *traza* de F es el conjunto imagen $S = F(U)$. El *plano tangente* $T_p S$ a la superficie F en el punto $p = F(u, v)$ es el plano generado por los vectores $F_u(u, v)$ y $F_v(u, v)$.

En general, si A es un subconjunto arbitrario de \mathbb{R}^2 , se dice que una aplicación $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada, si F puede ser extendida a una aplicación diferenciable de U en \mathbb{R}^3 , siendo U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene a A .

Ejemplo 1 (Coordenadas esféricas en la esfera.). Usando las coordenadas esféricas podemos ver a la *esfera* de radio $a > 0$ como una superficie parametrizada regular dada por la aplicación $F: [0, 2\pi] \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(\phi, \theta) = (a \cos \theta \cos \phi, a \cos \theta \sin \phi, a \sin \theta).$$

Las líneas $\phi = \text{constante}$ son llamadas *meridianos* y las líneas $\theta = \text{constante}$ son llamadas *paralelos* o *círculos de latitud*. El círculo $\theta = 0$ también es llamado *ecuador*; este es el único círculo máximo, de entre todos los paralelos. Todos los meridianos son círculos máximos.

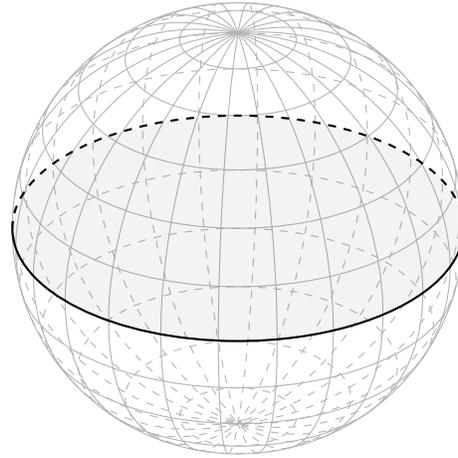


Figura 6: Coordenadas esféricas en la esfera.

Observaciones 1. La superficie parametrizada F del Ejemplo 1 está definida sobre el rectángulo cerrado $[0, 2\pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$, la cual admite una extensión diferenciable a un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene a $[0, 2\pi] \times (-\pi/2, \pi/2)$. Sin embargo, cualquier extensión recubrirá más de una vez partes substanciales de la esfera, en tanto que F solamente cubre dos veces a una semicircunferencia que va desde el polo norte al polo sur.

Existen ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^3 a los que quisiéramos denominar superficies, pero que no encajan dentro del contexto de las superficies parametrizadas regulares descritas anteriormente. Tales subconjuntos no pueden ser descritos como la imagen biyectiva de una sola superficie parametrizada regular definida sobre un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 ; como vimos, la esfera es un ejemplo de esto.

Introduciremos el concepto de superficie regular; intuitivamente se combinan convenientemente varias superficies parametrizadas para describir a ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^3 que son los que queremos definir como superficies. La definición de superficie regular es un poco más complicada, pero es la que se generaliza a dimensiones superiores para dar el concepto de variedad diferenciable.

Definición 1. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie regular* si para cada $p \in S$, existe una vecindad V en \mathbb{R}^3 y una aplicación $F: U \rightarrow V \cap S$ de un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, llamada *parametrización* de S , tal que

1. La aplicación F es diferenciable.
2. La aplicación F es un *homeomorfismo*: F es continua (por la condición 1) y admite una inversa $F^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que es continua.
3. Cada aplicación $F: U \rightarrow S$ es una superficie parametrizada regular.

Ejemplo 2. La esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, es una superficie regular. Podemos cubrir a la esfera mediante seis superficies parametrizadas regulares cuyas trazas son hemisferios: $F_i: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $i = 1, \dots, 6$, dadas por

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), & (x, y) \in U, & \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \\ F_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), & (x, y) \in U, & \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, \\ F_3(x, z) &= (x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), & (x, z) \in U, & \quad U = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}, \\ F_4(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), & (x, z) \in U, & \quad U = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}, \\ F_5(y, z) &= (+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), & (y, z) \in U, & \quad U = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}, \\ F_6(y, z) &= (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), & (y, z) \in U, & \quad U = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}. \end{aligned}$$

Hay otra manera más práctica de obtener superficies regulares en \mathbb{R}^3 , para ello necesitamos algunas definiciones.

Definición 2. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. El *gradiente* de f en el punto (x, y, z) , denotado por $\nabla f(x, y, z)$ se define como

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

Un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es un *punto crítico* de f si $\nabla f(x, y, z) = 0$. La imagen $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ de un punto crítico es llamado un *valor crítico* de f . Un punto $a \in \mathbb{R}$ que no es un valor crítico es llamado un *valor regular* de f .

Teorema 1. Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f , entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular en \mathbb{R}^3 .

Para una demostración ver (do Carmo, 1994, §2.2, Proposition 2).

Ejemplo 3. Consideremos la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. El gradiente está dado por $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Es fácil ver que $1 \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f y por el Teorema 1 el conjunto

$$f^{-1}(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

es una superficie regular que es precisamente la esfera unitaria \mathbb{S}^2 .

De ahora en adelante, en vez de decir superficie regular, solamente diremos superficie.

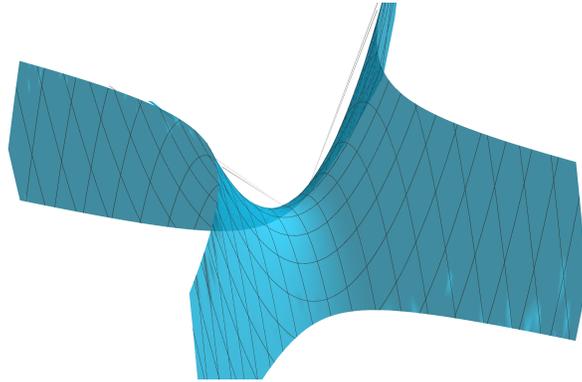
Usando el hecho de que sabemos calcular curvatura de curvas planas, definiremos las curvaturas normales en un punto de una superficie en \mathbb{R}^3 . Entre las curvaturas normales definiremos las curvaturas principales, y con ellas, otros dos tipos de curvaturas: la curvatura Gaussiana y la curvatura media.

5.1. Curvatura normal

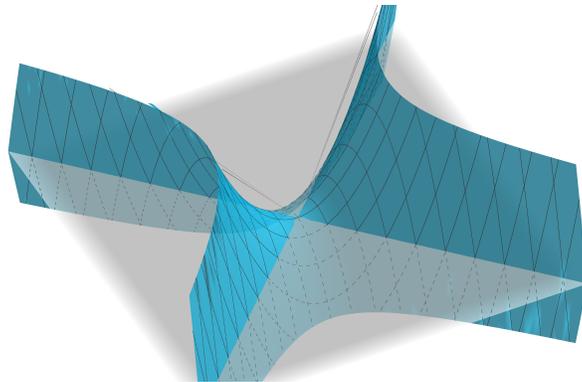
Describiremos el proceso para definir las curvaturas normales de una superficie arbitraria S y lo iremos ilustrando en el ejemplo de la superficie conocida como *paraboloide hiperbólico* o *silla de montar*, la cual está dada por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x^2 + y^2 = 0\}.$$

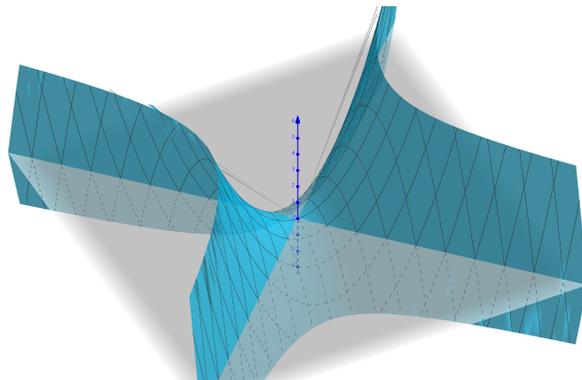
Sea S una superficie y sea $p \in S$.



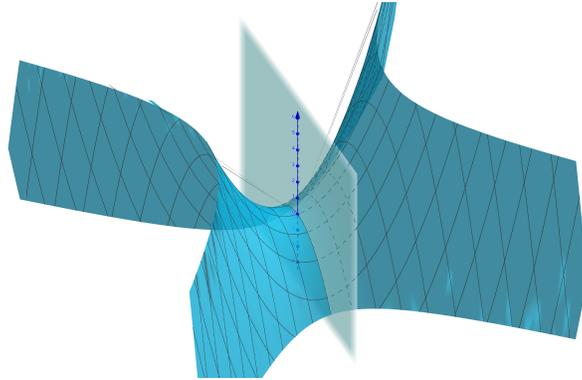
Tomemos el plano tangente $T_p S$ a S en p .



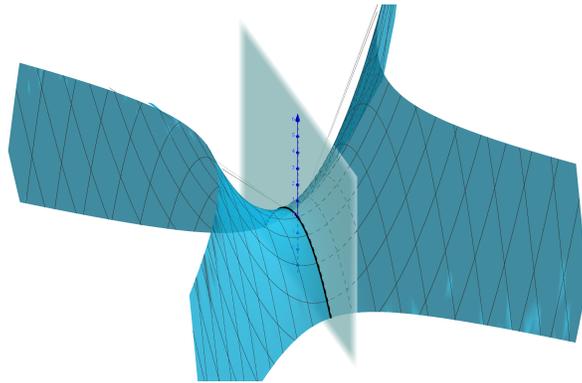
Tomemos un vector unitario normal N a $T_p S$.



Sea v en $T_p S$ y P_v el plano normal a S generado por N y v .



La intersección $P_v \cap S$ es una curva plana α_v contenida en S .



La *curvatura normal* de S en p en la dirección de v es

$$\kappa_v = \text{curvatura de } \alpha_v \text{ en el tiempo } t_0, \text{ tal que } \alpha(t_0) = p.$$

Con signo positivo (+) si $\alpha_v''(t_0)$ tiene el mismo sentido que N , es decir, $\langle \alpha_v''(t_0), N \rangle > 0$, y signo negativo (-) si $\alpha_v''(t_0)$ tiene el sentido opuesto que N , es decir, $\langle \alpha_v''(t_0), N \rangle < 0$.

Si tomamos vectores tangentes v en $T_p S$ distintos obtenemos curvaturas normales distintas como se muestra en la Figura 7:

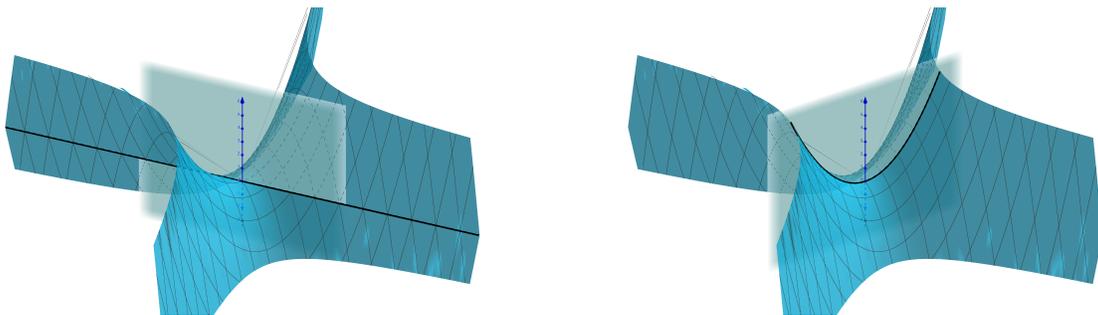


Figura 7: Otras dos curvaturas normales de S en el punto p .

5.2. Curvatura normal y curvatura geodésica

En la literatura a veces se da una definición alternativa de la curvatura normal, por ejemplo en (do Carmo, 1994, §3.2, Definición 3). Sea S una superficie, $p \in S$ y N un vector unitario normal a S en p . Sea C una curva regular en S que pasa por p , parametrizada por $\alpha(s)$, donde s es la longitud de arco de C y $\alpha(0) = p$. Sea n el vector normal a C en p y θ el ángulo entre los vectores N y n . Sea $k = \|\alpha''(0)\|$ la curvatura de C en p . El número $\kappa_C = k \cos \theta$ se denomina la *curvatura normal de $C \subset S$ en p* . Es decir, κ_C es la longitud de la proyección u del vector $kn = \alpha''(0)$ sobre la recta determinada por el vector normal N , esto se muestra en la Figura 8.

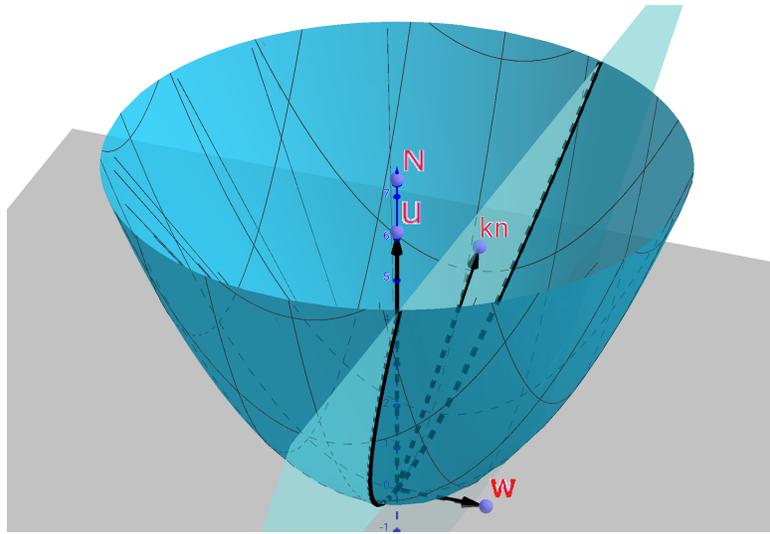


Figura 8: Curvaturas normal y geodésica.

Si C es una curva que pasa por p obtenida por la intersección de S con un plano normal, tenemos que θ es cero y la curvatura normal de C coincide con la curvatura k de C , como en nuestra primera definición de curvatura normal. De hecho, se puede demostrar que todas las curvas contenidas en S que tienen en un punto dado $p \in S$ la misma recta tangente, tienen en ese punto la misma curvatura normal (do Carmo, 1994, §3.2, Proposición 2). Por lo tanto, las dos definiciones de curvatura normal son equivalentes.

Por otro lado, consideremos la proyección w del vector $kn = \alpha''(0)$ sobre el espacio tangente T_pS (ver Figura 8), a la longitud de w se le denota por κ_g y se le llama la *curvatura geodésica* de C en p , es decir, $k_g = k \sin \theta$. Por lo tanto tenemos que $k^2 = \kappa_C^2 + \kappa_g^2$.

5.3. Curvaturas principales

A cada vector unitario $v \in T_pS$ le asociamos la curvatura normal κ_v de S en p en la dirección de v . Esto nos da una función continua (en la sección 5.5 se explica porqué es

continua)

$$\begin{aligned} k: \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \kappa_v, \end{aligned} \tag{1}$$

donde \mathbb{S}^1 es la circunferencia unitaria en $T_p S$. El máximo κ_1 y el mínimo κ_2 de las curvaturas normales son llamadas las *curvaturas principales* de S en p . Los vectores unitarios e_1 y e_2 en cuyas direcciones se alcanzan κ_1 y κ_2 son llamados las *direcciones principales* en p .

En el ejemplo de la silla de montar las curvaturas principales se muestran en la Figura 9:

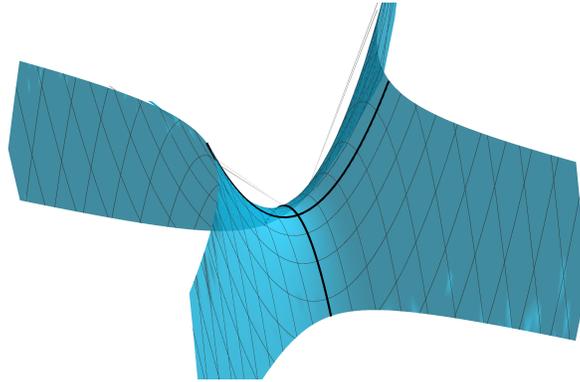


Figura 9: Curvaturas principales.

5.4. Curvatura media y curvatura Gaussiana

A partir de las curvaturas principales definimos:

Curvatura Gaussiana: La *curvatura Gaussiana* $K(p)$ de una superficie S en un punto $p \in S$ es el producto de las curvaturas principales de S en p :

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Curvatura media La *curvatura media* $H(p)$ de una superficie S en un punto $p \in S$ es el promedio de las curvaturas principales de S en p :

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

La curvatura Gaussiana define diferentes tipos de puntos en una superficie.

Punto silla o punto hiperbólico. Un punto p en una superficie S es un *punto hiperbólico* si $K(p) < 0$. Esto es equivalente a que las curvaturas principales κ_1 y κ_2 en p tienen signos opuestos, y a su vez esto implica que S cruza el plano tangente en cualquier vecindad de p .

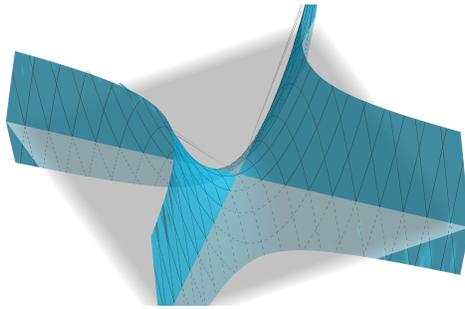


Figura 10: Punto hiperbólico.

Punto plano o punto parabólico. Un punto p en una superficie S es un *punto parabólico* si $K(p) = 0$. Esto es equivalente a que alguna curvatura principal κ_1, κ_2 (o ambas) sea cero.

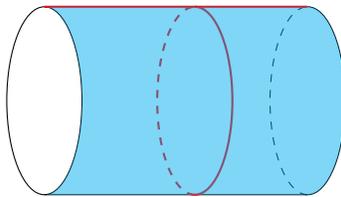


Figura 11: Punto parabólico.

Punto elíptico. Un punto p en una superficie S es un *punto elíptico* si $K(p) > 0$. Esto es equivalente a que las curvaturas principales κ_1 y κ_2 tengan el mismo signo, y a su vez esto implica que S está en un lado del plano tangente a p , del mismo lado que n si $\kappa_1, \kappa_2 > 0$, del lado opuesto que n si $\kappa_1, \kappa_2 < 0$.

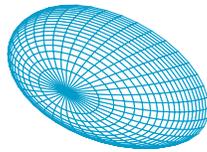
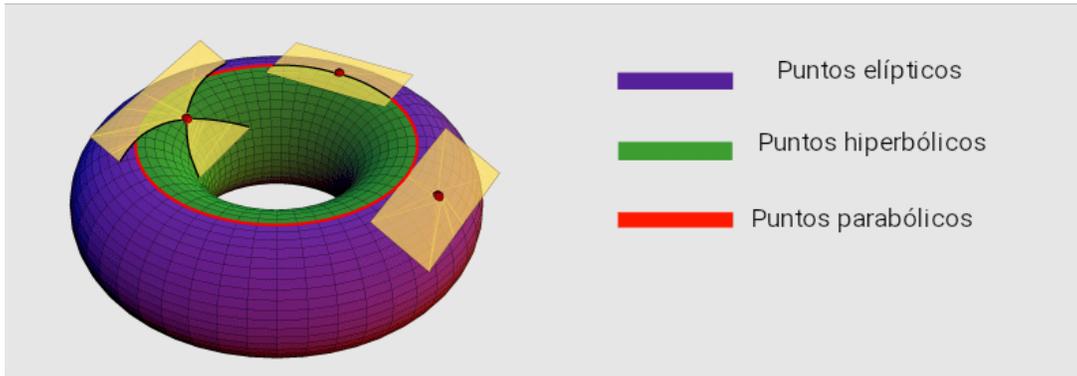


Figura 12: Punto elíptico.

Hay superficies que tienen los tres tipos de puntos. Por ejemplo el toro¹ dado por la parametrización $F: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$$F(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u).$$



5.5. Las aplicaciones de Gauss y Weingarten

Ahora presentaremos una manera analítica de obtener la curvatura Gaussiana y la curvatura media.

Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 . Sea $p \in S$ y V una vecindad abierta de p en S . La *aplicación de Gauss* $N: V \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una aplicación diferenciable que asocia a cada punto $p \in V \subset S$ un *vector normal unitario* como se ilustra en la Figura 13²

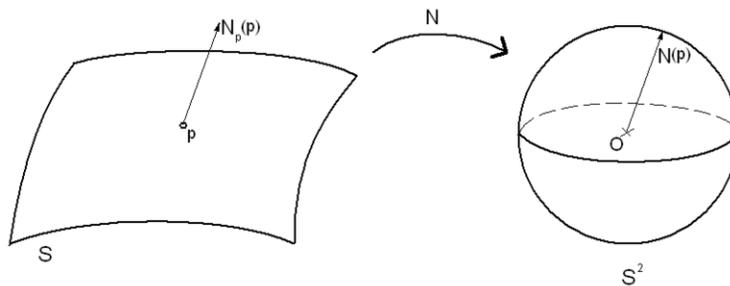


Figura 13: Aplicación de Gauss.

Una manera de dar la aplicación de Gauss es la siguiente. Sea $F: U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de S , con U un abierto de \mathbb{R}^2 y la traza de F es $V = F(U)$. Sean $q \in U$ y $p = F(q)$, entonces la aplicación de Gauss está dada por el producto cruz en \mathbb{R}^3 de las derivadas parciales de F normalizado:

$$N(p) = \frac{F_u(q) \times F_v(q)}{\|F_u(q) \times F_v(q)\|}.$$

La diferencial de la aplicación de Gauss, conocida como *aplicación de Weingarten*, es una aplicación lineal $dN_p: T_pS \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Como T_pS y $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ son planos paralelos, dN_p puede verse como una aplicación lineal de T_pS en sí mismo $dN_p: T_pS \rightarrow T_pS$. Una propiedad muy importante de la aplicación de Weingarten es que es *autoadjunta*, es decir, satisface la siguiente igualdad (do Carmo, 1994, Sección 3.2, Proposición 1)

$$\langle dN_p(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, dN_p(v_2) \rangle, \quad \text{para todo } v_1, v_2 \in T_pS,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior en \mathbb{R}^3 restringido a $T_p S$. Esto implica (ver (do Carmo, 1994, Teorema, Apéndice del Capítulo 3)) que existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$, que corresponde a las direcciones principales, tal que

$$dN_p(e_i) = -\kappa_i e_i, \quad \text{con } i = 1, 2,$$

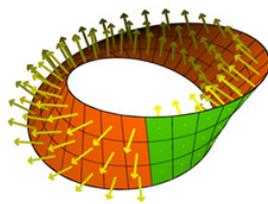
es decir, las *direcciones principales* son *vectores propios* de dN_p con *valor propio* $-\kappa_i$. Por lo tanto, e_1 y e_2 forman una base ortonormal que diagonaliza a dN_p . Entonces $dN_p = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix}$ y

$$K = \det dN_p, \quad H = -\frac{1}{2} \text{traza } dN_p.$$

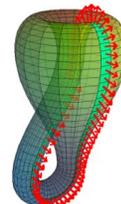
Podemos definir una forma cuadrática $Q: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $Q(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, la cual restringida a la circunferencia unitaria en $T_p S$ da la función $k: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida en (1), es decir, $k(v) = Q|_{\mathbb{S}^1}(v) = \kappa_v$, y por esta razón la función k es continua.

5.6. Superficies orientables y no orientables

Como vimos en la Subsección 5.5, dada una parametrización $F: U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de una superficie S , con U un abierto de \mathbb{R}^2 , la aplicación de Gauss asocia a cada punto $p = F(q)$ en la imagen de F el vector normal dado por el producto cruz de las derivadas parciales de F , es decir, $N(p) = \frac{F_u(q) \times F_v(q)}{\|F_u(q) \times F_v(q)\|}$ para toda $q \in U$. En otras palabras, la aplicación de Gauss define un *campo vectorial normal diferenciable* sobre el subconjunto abierto $V = F(U)$ de S . Un hecho sorprendente es que no todas las superficies admiten un campo vectorial normal diferenciable definido globalmente *sobre toda la superficie*. Un ejemplo de dichas superficies son la *banda de Möbius*³ y la *botella de Klein*⁴ mostradas en la Figura 14. Diremos que dichas superficies son *no orientables*.



(a) Banda de Möbius



(b) Botella de Klein

Figura 14: Superficies no orientables.

Por otro lado, diremos que una superficie S es *orientable* si admite un campo vectorial normal diferenciable N definido en toda la superficie. La elección de dicho campo N es llamada una *orientación* de S . Ejemplos de superficies orientables son la *esfera*⁵ y el *toro*⁶ mostrados en la Figura 15.

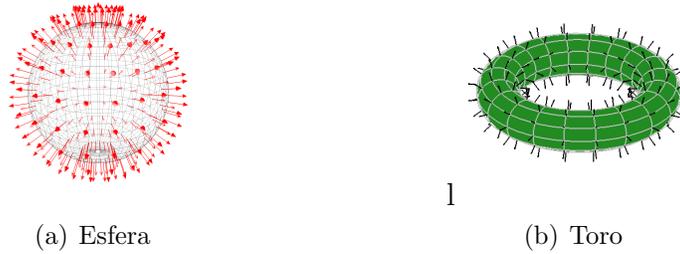


Figura 15: Superficies orientables.

Por lo tanto, si S es una superficie orientable, escoger una orientación es equivalente a dar una aplicación de Gauss global, es decir, definida sobre toda la superficie $N: S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. En este caso, la curvaturas de Gauss $K: S \rightarrow \mathbb{R}$ y media $H: S \rightarrow \mathbb{R}$ también están bien definidas sobre toda la superficie.

6. Dimensiones superiores: variedades Riemannianas

Como mencionamos en la Sección 5, el concepto de superficie regular se puede generalizar a dimensiones superiores para obtener subconjuntos de \mathbb{R}^n tales que en cada punto tengan bien definido un espacio tangente, el cual es un subespacio de \mathbb{R}^n de dimensión $k \leq n$.

Definición 3. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una *variedad diferenciable de dimensión* $0 < k \leq n$ si para cada $p \in M$, existe una vecindad V en \mathbb{R}^n y una aplicación $F: U \rightarrow V \cap M$ de un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^k sobre $V \cap M \subset \mathbb{R}^n$ de la forma

$$F(u_1, \dots, u_k) = (x_1(u_1, \dots, u_k), \dots, x_n(u_1, \dots, u_k))$$

tal que

1. La aplicación F es diferenciable.
2. La aplicación F es un homeomorfismo.
3. Cada aplicación $F: U \rightarrow M$ tiene matriz Jacobiana

$$DF_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}(q) & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1}(q) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_k}(q) \end{pmatrix} = (F_{u_1}(q) \quad \cdots \quad F_{u_k}(q)),$$

de rango k para todo punto $q = (u_1, \dots, u_k) \in U \subset \mathbb{R}^k$.

Como en el caso de las superficies regulares, la condición 3 es equivalente a que los k vectores en \mathbb{R}^n dados por las derivadas parciales $F_{u_i}(q)$ con $i = 1, \dots, k$, sean linealmente independientes. El *espacio tangente* $T_p M$ a la variedad M en el punto $p = F(q)$ es el subespacio generado por los vectores $F_{u_1}(q), \dots, F_{u_k}(q)$. Como $T_p M$ es un subespacio de \mathbb{R}^n , podemos dotar a $T_p M$ de un producto interior restringiendo el producto interior estandar de \mathbb{R}^n . Una variedad diferenciable M dotada de un producto interior en cada espacio tangente $T_p M$ que varía diferenciablemente es llamada una *variedad Riemanniana*.

En el plano \mathbb{R}^2 , dados dos puntos, la línea de menor longitud que los une es el segmento de recta que pasa por ambos puntos. Análogamente, dados dos puntos en el espacio Euclidiano de dimensión n la línea de menor longitud que los une es una recta. En general, dada una variedad Riemanniana de dimensión k en \mathbb{R}^n , existen curvas de menor longitud que unen dos puntos las cuales son llamadas *geodésicas*. En una superficie S , una curva C es una *geodésica* si la curvatura geodésica κ_g de C en todo punto es cero. Por ejemplo, en la esfera \mathbb{S}^2 las geodésicas son los círculos máximos, como los meridianos o el ecuador en el Ejemplo 1. Ésto es fácil de ver, pues los círculos máximos se obtienen de intersectar a la esfera con planos que pasan por el centro de la esfera, dichos planos son planos normales a la esfera, por lo tanto, la curvatura geodésica de los círculos máximos es cero. Para saber más sobre geodésicas recomiendo el artículo (Simanca, 2002).

7. Hipersuperficies en \mathbb{R}^n

Una *hipersuperficie* en \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable de dimensión $n - 1$ (codimensión 1). Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie. Podemos definir *curvaturas normales* como en el caso de superficies en \mathbb{R}^3 . Sean $p \in S$, un vector normal unitario N en p y un vector tangente unitario $v \in T_p S$. La intersección del plano generado por N y v y S es una curva, cuya curvatura κ_v es la *curvatura normal* de S en p en la dirección de v . La aplicación $v \mapsto \kappa_v$ es la restricción a la esfera unitaria de una forma cuadrática Q en $T_p S$. Existe una *base ortonormal* $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de $T_p S$ que diagonaliza a Q . Las direcciones e_1, \dots, e_{n-1} son llamadas las *direcciones de curvatura principales* en p y las cantidades correspondientes

$$\kappa_1 = \kappa_{e_1}, \dots, \kappa_n = \kappa_{e_{n-1}}$$

son las *curvaturas principales* de S en p .

Como en \mathbb{R}^3 podemos considerar la *aplicación de Gauss*

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

cuya diferencial

$$dN_p: T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^{n-1} \cong T_p S$$

satisface las ecuaciones

$$dN_p(e_i) = -\kappa_i e_i, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Definimos la *curvatura media*

$$H = \frac{1}{n-1}(\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1}) = -\frac{1}{n-1} \text{traza}(dN_p),$$

y la *curvatura de Gauss-Kronecker*

$$\kappa_1 \dots \kappa_{n-1} = (-1)^{n-1} \det(dN_p).$$

Además, tenemos las otras *funciones simétricas elementales* de las curvaturas principales, llamadas *curvaturas medias de orden superior*. Denotemos por H_j a la *curvatura media de orden j -ésimo*, normalizada tal que

$$\prod_{j=1}^{n-1} (1 + t\kappa_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} H_j t^j.$$

Entonces $H_1 = H$, la *curvatura media* y H_{n-1} es la *curvatura de Gauss-Kronecker*.

En dimensiones superiores tenemos curvaturas intermedias. Entre ellas H_2 juega un papel importante. Salvo por una constante, H_2 es igual a la *curvatura escalar*, la cual definiremos en la siguiente sección.

8. Curvatura seccional y curvatura escalar

Sea M una variedad Riemanniana de dimensión k en \mathbb{R}^n . Riemann definió en cada punto $p \in M$ las *curvaturas seccionales*: sean $v, w \in T_p M$ linealmente independientes. Para todo vector unitario

$$u = \lambda v + \mu w$$

existe una única geodésica en M que empieza en p con vector tangente u (ver (do Carmo, 1992, Ch. 3, Proposition 2.7)).

Dichas geodésicas, al variar u generan una superficie cuya curvatura Gaussiana en p es llamada la *curvatura seccional* $K_\pi = K[v, w]$ del plano π generado por v y w .

Sea $\beta = \{e_1, \dots, e_k\}$ una base ortonormal de $T_p M$. Entonces la cantidad

$$s = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} K[e_i, e_j]$$

es independiente de β (ver (do Carmo, 1992, §4.4)), llamada la *curvatura escalar* de M en p .

Si M es una hipersuperficie en \mathbb{R}^n podemos considerar a e_i como las *direcciones principales* en p . Entonces $K[e_i, e_j] = \kappa_i \kappa_j$ por lo que

$$s = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \kappa_i \kappa_j, \quad \text{o} \quad s = (n-1)(n-2)H_2.$$

9. Resultados clásicos sobre curvatura

Ya que hemos visto diferentes tipos de curvaturas, en esta sección enunciaremos algunos resultados clásicos que las involucran. Para ver más resultados relacionados con curvaturas recomiendo el artículo panorámico de Osserman (Osserman, 1990) el cual en parte motivó al presente artículo.

9.1. Cantidades intrínsecas y extrínsecas

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad Riemanniana. Las *cantidades intrínsecas* de M son determinadas mediante mediciones sobre M misma. Las *cantidades extrínsecas* dependen del *encaje* de M en \mathbb{R}^n , es decir, de “cómo está metida” M en \mathbb{R}^n . Para $S \subset \mathbb{R}^3$ las *curvaturas principales* y la *curvatura media* son *extrínsecas*: enrollar una hoja en un cilindro las cambia, pero no cambian las distancias a lo largo de S . Sorprendentemente, el *Teorema Egregio de Gauss* (do Carmo, 1994, §4-3) dice que la *Curvatura Gaussiana* $K = \kappa_1\kappa_2$ es *intrínseca*. Para una discusión sobre propiedades intrínsecas vs. extrínsecas recomiendo el artículo (Palmas, 2020).

9.2. Teorema de Gauss-Bonnet

Antes de poder enunciar el Teorema de Gauss-Bonnet necesitamos dar algunas definiciones.

Una superficie es *compacta* si es compacta como espacio topológico (cerrado y acotado como subespacio de \mathbb{R}^3). Algunas superficies tienen *frontera*, como la banda de Möbius. Una superficie *cerrada* es una superficie compacta y sin frontera. Ejemplos de superficies cerradas son: la esfera, el toro y la botella de Klein.

Recordemos que dos espacios topológicos son *homeomorfos* si existe un *homeomorfismo* entre ellos, es decir, una aplicación biyectiva continua cuya inversa también es continua. En topología dos espacios homeomorfos son considerados equivalentes.

El *Teorema de clasificación de superficies* (ver por ejemplo (S. William Massey, 1967)) nos dice que toda superficie cerrada orientada es homeomorfa a una superficie de la siguiente lista: la esfera, el toro, el toro con dos hoyos, etc., como se muestra en la Figura 16⁷.

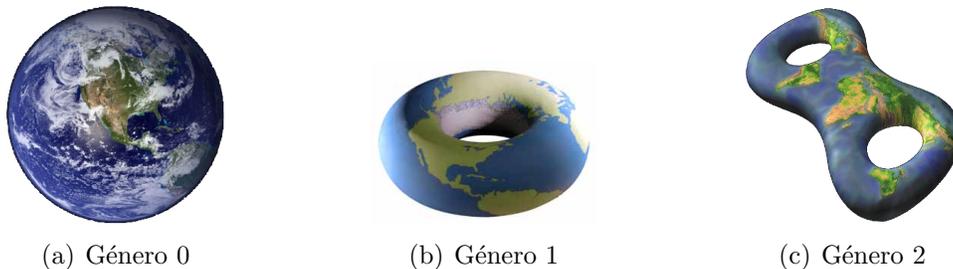


Figura 16: Superficies cerradas orientadas

Distinguimos las superficies de la lista anterior por que tienen diferente *género*, que intuitivamente corresponde al “número de hoyos”.

A toda superficie cerrada orientada S podemos asociarle un número entero $\chi(S)$ llamado la *característica de Euler-Poincaré* de S . Una manera de calcular a $\chi(S)$ es la siguiente. Un resultado muy importante en topología es que las superficies compactas se pueden triangular (ver (Doyle and Moran, 1968)), es decir, podemos encontrar un poliedro P que sea *homeomorfo* a una superficie S dada. En la Figura 17 se muestran triangulaciones de la esfera⁸ y del toro⁹:

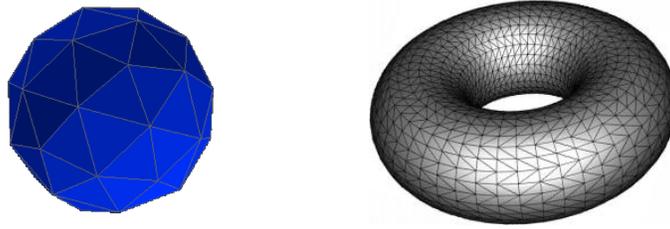


Figura 17: Triangulaciones de la esfera y el toro.

La *característica de Euler-Poincaré* de la superficie S se define como $\chi(S) = V - A + C$, donde V es el número de vértices, A el de aristas y C el de caras de una triangulación P , y no depende de la triangulación, por lo que es un invariante topológico, el cual es *completo*, es decir: dos superficies cerradas orientadas S y S' son homeomorfas si y sólo si $\chi(S) = \chi(S')$. Por ejemplo, la esfera tiene característica de Euler-Poincaré igual a 2 (un tetraedro es una triangulación de la esfera y ahí es fácil calcularla), por lo tanto, toda superficie cerrada y orientada S con $\chi(S) = 2$ es homeomorfa a la esfera. Si denotamos por T_g a la superficie de género g (toro con g hoyos) tenemos que $\chi(T_g) = 2 - 2g$, por lo tanto, la única superficie cerrada y orientada con característica de Euler-Poincaré positiva es la esfera.

Sea S una superficie orientada. Una *curva parametrizada regular a trozos cerrada y simple* $\alpha: I \rightarrow S$ es una curva cerrada, sin autointersecciones, cuya recta tangente no está definida sólo en un número finito de puntos $t_0, \dots, t_k \in I$, los puntos $\alpha(t_i)$, $i = 1, \dots, k$, son llamados los *vértices* de α y las trazas $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ son los *arcos regulares* de α . En cada vértice $\alpha(t_i)$ definimos el *ángulo exterior* θ_i como el ángulo formado por los límites izquierdo y derecho respectivamente cuando $t \rightarrow t_i$, de los vectores tangentes $\alpha'(t)$ con $t \in [t_{i-1}, t_i]$ y $t \in [t_i, t_{i+1}]$ respectivamente. El signo del ángulo θ_i está dado por la orientación de S . El *ángulo interior* η_i en el vértice $\alpha(t_i)$ está dado por $\eta_i = \pi - \theta_i$.

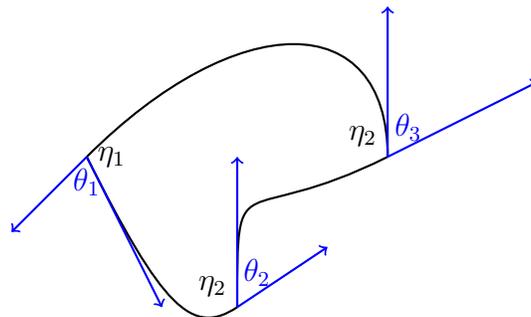


Figura 18: Ángulos exteriores e interiores de una curva parametrizada regular a trozos.

Sea S una superficie orientada. Una subconjunto R de S es una *región simple* si R es homeomorfa a un disco y la frontera ∂R de R es una curva parametrizada regular a trozos cerrada y simple $\alpha: I \rightarrow S$. Intuitivamente la frontera α está *orientada positivamente* si al caminar sobre la curva en la dirección positiva, con la cabeza apuntando en la dirección del

vector normal N que da la orientación a S , la región R queda a la izquierda. Llamaremos *triángulo* a una región simple con sólo tres vértices como la mostrada en la Figura 19.

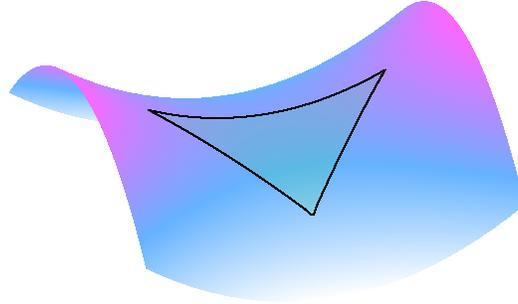


Figura 19: Región simple (triángulo) en una superficie.

Decimos que una región $R \subset S$ es *regular* si R es compacta y su frontera ∂R es la unión de un número finito de curvas regulares a trozos, cerradas y simples que no se cortan. Consideraremos a una superficie cerrada como una región regular sin frontera.

Ahora podemos enunciar el Teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 2 (Teorema de Gauss-Bonnet (do Carmo, 1994, §4.5)). *Sea R una región regular de una superficie orientada y sean C_1, \dots, C_n las curvas regulares a trozos cerradas y simples que forman la frontera ∂R de R . Supongamos que cada C_i está orientada positivamente y sean $\theta_1, \dots, \theta_p$ el conjunto de todos los ángulos externos de las curvas C_1, \dots, C_n . Entonces*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \iint_R K \, d\text{vol} + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R). \quad (2)$$

donde s denota la longitud de arco de C_i y la integral sobre C_i significa la suma de las integrales que corresponden a los arcos regulares de C_i .

Si consideramos a una superficie cerrada como una región regular sin frontera, en la fórmula no hay contribución por la frontera ni por ángulos exteriores obteniendo el siguiente corolario.

Corolario 1 (Teorema de Gauss-Bonnet (do Carmo, 1994, §4-5)). *Sea S una superficie cerrada, conexa y orientada. Entonces*

$$\iint_S K \, d\text{vol} = 2\pi\chi(S),$$

con $\chi(S)$ la característica de Euler-Poincaré.

Este teorema relaciona fuertemente la geometría y topología de la superficie. Por ejemplo, si la curvatura K de S es estrictamente positiva, entonces la integral es estrictamente positiva, lo que implica que $\chi(S) > 0$. Como vimos, la esfera es la única superficie cerrada orientada

con característica de Euler-Poincaré positiva. Por lo tanto, la curvatura impone restricciones a la topología de la superficie.

Ahora consideremos un *triángulo geodésico* T en una superficie S , es decir, una región simple con sólo tres vértices, tal que los arcos regulares de su frontera sean geodésicas de S . Como una región simple es homeomorfa a un disco, tenemos que $\chi(T) = 1$ y como la frontera está formada por geodésicas, la curvatura geodésica es cero, por lo tanto, en la fórmula la primera integral es cero. Expresando a los ángulos exteriores en términos de los ángulos interiores obtenemos.

Corolario 2. *Sea T un triángulo geodésico en una superficie orientada S . Entonces*

$$\iint_R K \, d\text{vol} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \pi,$$

donde η_i , $i = 1, 2, 3$, son los ángulos interiores de T .

Si S es el plano euclidiano, T es un triángulo euclidiano, cuyos lados son segmentos de recta (geodésicas en el plano), tenemos $K = 0$, la integral es cero y obtenemos el conocido resultado de *geometría euclidiana* que la suma de los ángulos interiores de T es igual a π . Si S es la esfera unitaria, T es un triángulo esférico, cuyos lados son segmentos de círculos máximos, tenemos $K = 1$, la integral es estrictamente positiva y obtenemos que la suma de los ángulos interiores de T es mayor a π , esto corresponde a la *geometría elíptica*. Si S es el plano hiperbólico, tenemos $K = -1$, la integral es estrictamente negativa y obtenemos que la suma de los ángulos interiores de T es menor a π , esto corresponde a la *geometría hiperbólica*.

Un espacio de Alexandrof (X, d) es un espacio métricos geodésico con una noción sintética de curvatura acotada inferiormente, la cual se define comparando triángulos geodésicos en X con triángulos euclidianos, elípticos o hiperbólicos. Los espacios de Alexandrof es un área muy activa de investigación actual, para saber más al respecto recomiendo el artículo (Moguel, 2021).

En 1944 Chern (Chern, 1944) generalizó el Teorema de Gauss-Bonnet para variedades diferenciables cerradas orientadas de dimensión $2n$, expresando la característica de Euler-Poincaré como la integral de cierto polinomio de su forma de curvatura.

9.3. Superficies mínimas

Una superficie S es *mínima* si localmente *minimiza su área*. Una superficie S es mínima sí y sólo sí su curvatura media es cero ($H = 0$) (do Carmo, 1994, §3-5). Ejemplos de superficies mínimas son las formadas por películas de jabón como la mostrada en la Figura 20¹⁰.



Figura 20: Superficie mínima de Costa.

Si el lector desea saber más sobre las superficies mínimas recomiendo el artículo (Galaz-García, 2004).

10. Regresando a la motivación

Regresando a la motivación inicial del artículo, dado un plano P en \mathbb{R}^3 y un punto p en P , si tomamos cualquier otro plano Q perpendicular a P que pase por p , tenemos que la intersección de P y Q es una recta que pasa por p . Entonces todas las curvaturas normales de P en p son cero, y por lo tanto, la curvatura Gaussiana de un plano en todo punto es cero.

Por otro lado, consideremos la esfera unitaria \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 y un punto $p \in \mathbb{S}^2$. Si tomamos un plano Q ortogonal a la esfera que pase por p , la intersección de Q con \mathbb{S}^2 es un círculo máximo, el cual tiene curvatura 1. Entonces, todas las curvaturas normales de \mathbb{S}^2 en p son 1 y por lo tanto, la curvatura Gaussiana de la esfera es 1.

Como el plano y la esfera tienen diferente curvatura Gaussiana no podemos obtener un pedazo de esfera sin doblar, estirar o cortar una hoja de papel. Es por esto, que no podemos obtener un mapa perfecto.

11. Para saber más

Al lector interesado en saber más sobre las diferentes nociones de curvatura y de geometría Riemanniana en general, recomiendo el artículo (Río, 2002) y el libro (Muñoz, 2009). Para un estudio más formal, recomiendo los textos clásicos (do Carmo, 1992, 1994) y para una visión panorámica de la geometría Riemanniana el libro (Berger, 2003).

Notas

1. Imagen tomada de http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ehpp/ehpp.html.
2. Imagen tomada de https://www.researchgate.net/figure/THE-GAUSS-MAP-By-a-direct-application-of-a-classical-result-of-Linear-Algebra-which_fig1_330958425.
3. Imágen tomada de <https://plus.maths.org/content/get-grips-mobius-strip>.
4. Imágen tomada de <https://plus.maths.org/content/imaging-maths-inside-klein-bottle>.
5. Imágen tomada de <https://math.stackexchange.com/questions/2634214/visualising-pi-2s2-and-pi-2-mathbb{r}^2>.
6. Imágen tomada de <http://www.supermath.info/ZooOfMathematicalCreatures.htm>.
7. Imágenes tomadas de <http://www.earthdayenergyfast.org/IMAGES/earth.jpg>, <http://www.navworld.com/navcerebrations/Toroidal.htm> y <http://www.ehu.es/~mtwmastm/CD0506.pdf>.
8. Imágen tomada de <http://www.cnmat.berkeley.edu/Research/AES2006/speakerarray/icosaspeakers.htm>.
9. Imágen tomada de <http://www.math.cornell.edu/~mec/2003-2004/geometry/torii/torii.html>.
10. Imágen tomada de <http://bugman123.com/MinimalSurfaces/Costa-large.jpg>.

Referencias

- Berger, M. (2003). *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin.
- Chern, S.-S. (1944). A simple intrinsic proof of the gauss-bonnet formula for closed riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 45(4):747–752.
- do Carmo, M. (1992). *Riemannian Geometry*. Birkhauser.
- do Carmo, M. P. (1994). *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Alianza Editorial.
- Doyle, P. H. and Moran, D. A. (1968). A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Invent. Math.*, 5:160–162.
- Galaz-García, F. (2004). Superficies minimales. *Miscelanea Matemática*, 39:31–38.
- Moguel, M. C. (2021). Espacios de Alexandrov y el problema de Erdős-Perelman. *Miscelanea Matemática*, 71:63–81.
- Muñoz, J. L. (2009). *Riemann: una nueva visión de la geometría*. NIVOLA.
- Naveira, A. M. (2007). L curvatura de riemann a través de la historia. *Miscelanea Matemática*, 44:29–52.
- Osserman, R. (1990). Curvature in the eighties. *Amer. Math. Monthly*, 97(8):731–756.
- Palmas, O. (2020). Todo cabe en un jarrito: una invitación a la teoría de inmersiones isométricas. *Miscelanea Matemática*, 70:59–75.
- Río, E. G. (2002). Una introducción a la curvatura.
- S. William Massey (1967). *Algebraic Topology: an introduction*. Springer Verlag.
- Simanca, S. R. (2002). Geodésicas y curvatura: una introducción elemental. *Miscelanea Matemática*, 35:17–40.
- Spivak, M. (1979). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume II. Houston, Texas (U.S.A.), second edition.

Como citar este artículo: Cisneros Molina, J. L. Un recorrido por el concepto de curvatura. SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365, 5(2), 1–27. <https://doi.org/10.36788/sah.v5i2.120>