

Intervención didáctica para el aprendizaje de números complejos en modalidad virtual

Daniela Romero Robles¹, Mario Alberto Quiñonez Ayala² y Ana Guadalupe del Castillo Bojorquez³

e-mail: ¹daniela.romero@unison.mx, ²mario.quinonez@unison.mx, ³ana.delcastillo@unison.mx

Universidad de Sonora

Resumen

El presente reporte de intervención didáctica expone los resultados de la adaptación e implementación de una secuencia de actividades didácticas sobre el tema de números complejos que se ajustó a necesidades de la modalidad virtual, y que había sido trabajada previamente en un modelo presencial. Las actividades se llevaron a cabo en un curso de Álgebra con dos grupos de estudiantes de primer semestre de ingeniería de la Universidad de Sonora. Los análisis y resultados presentados se fundamentan teóricamente en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, haciendo uso de las nociones de sistemas de prácticas, conflictos semióticos e idoneidad didáctica. Asimismo, se resaltan los beneficios y áreas de oportunidad sobre las implementaciones presencial y virtual, con la intención de brindar elementos que permitan incorporar adecuaciones a la propuesta, para un posible trabajo híbrido, en experiencias posteriores.

Palabras clave: números complejos, educación virtual, educación universitaria, intervención didáctica, actividades con GeoGebra, plataforma Moodle.

Recibido 30 de enero de 2021

Aceptado 18 de abril de 2021

Introducción

En este artículo se presentan algunos resultados de una experiencia de la adaptación a modalidad virtual de una secuencia didáctica para el estudio de los números complejos en educación superior que previamente fue implementada de manera presencial. Se comparten algunos antecedentes, así como las consideraciones generales para modificar y adecuar la secuencia. Como parte central del trabajo, se retoman algunos errores y dificultades manifestados en las implementaciones didácticas en forma presencial previas y se reconocen las nuevas áreas de oportunidad detectadas durante la puesta en escena en modalidad virtual, con dos grupos de ingeniería de la Universidad de Sonora.

En el primer apartado se presenta el planteamiento del problema, donde se precisan las condiciones del estudio de números complejos en los programas de ingeniería que ofrece la Universidad de Sonora y algunos antecedentes sobre las aportaciones de la Matemática Educativa en la misma temática. Para cerrar la sección, se presentan los objetivos del trabajo.

En el segundo apartado, se incluyen los elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, que fundamentan este trabajo, tales como práctica matemática, objetos, significados, conflicto semiótico e idoneidad didáctica. Se incluyen también algunos elementos de la educación virtual y del e-learning. Los componentes del marco teórico son utilizados para la descripción, análisis y valoración de la secuencia y su implementación en modalidad virtual.

En la tercera sección del escrito, se muestran los aspectos metodológicos considerados. Aquí se presenta la estructura de la secuencia didáctica adaptada a la modalidad virtual. Se describen las condiciones de la implementación de la secuencia original en formato presencial y los ajustes realizados para su adaptación al trabajo virtual. Como cierre de la sección y referencia para el análisis, se presenta un resumen de errores y

dificultades reportados en la implementación presencial, así como la valoración del trabajo en tales condiciones.

En el siguiente apartado, se retoman los conflictos manifestados por los estudiantes durante el trabajo de la propuesta en forma presencial, los cuales se convierten en insumos para las modificaciones de la versión virtual. En la misma sección se profundiza sobre el efecto de las modificaciones incorporadas y se expone una nueva valoración de la propuesta didáctica.

En el último apartado, se comparten las conclusiones del trabajo y se realiza una valoración general de la experiencia. Como parte de la sección se incluyen consideraciones para una implementación posterior.

Planteamiento del Problema

El estudio de los números complejos, tema de este trabajo, se aborda en un curso de Álgebra del primer semestre, dirigido a estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora. El programa de la asignatura lo incluye como el contenido inicial, para el que se sugiere un tiempo de 10 horas (dos semanas) y se orienta a establecer el concepto de número y la naturaleza para el estudio de raíces de una ecuación de grado n en una incógnita (teorema fundamental del álgebra). Como objetivos específicos, se declara la relevancia de conocer el sistema de los números complejos y sus operaciones en un ambiente numérico y gráfico.

Diversos trabajos en el campo de la Matemática Educativa (Bagni, 2001; Pardo y Gómez, 2007; Sada, 2008) coinciden en el desafío que representa la introducción del estudio de los números complejos en el currículo escolar. Las dificultades que se han reportado involucran el uso del símbolo i como unidad imaginaria y características relacionadas con las operaciones, propiedades, representaciones y aplicaciones, que se diferencian de las que son asociadas por los estudiantes al conjunto de los números reales, lo que implica reconocer que el contenido compite con el entrenamiento que han recibido los alumnos sobre la imposibilidad de extraer raíces cuadradas de números negativos. Aunado a lo anterior, también se debe reconocer que el estudio de los números complejos en el primer semestre de educación superior complica la inserción de problemas de modelación, ya que las aplicaciones de las distintas áreas en las que pueden involucrarse los números complejos, y que pueden abordarse en esta etapa, son limitadas; sin embargo, su presentación desde una perspectiva estructural como sistema “ampliado” para resolver problemas intramatemático, es factible.

Con el fin de superar las dificultades señaladas y la resistencia que los estudiantes exhiben sobre este tema (Pardo y Gómez, 2007), se diseñó una secuencia de actividades didácticas para el estudio de este tema, en la que el estudiante opera y es capaz de identificar relaciones, diferencias y/o similitudes entre las propiedades de sus operaciones y las de los números reales (Romero y Del Castillo, 2011).

Las actividades diseñadas involucran diferentes formas de representación de los números complejos y sus operaciones, se utiliza el software GeoGebra para vincular las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas. Se materializa en una secuencia didáctica de 13 hojas de trabajo y 33 applets elaborados con el software GeoGebra, las cuales están disponibles en la dirección electrónica www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos. El diseño de las indicaciones y preguntas, asumen la participación activa del docente como facilitador del aprendizaje en un modelo presencial, siendo el responsable de orientar la actividad matemática y promoviendo discusiones entre los estudiantes para construir un significado personal más profundo de los números complejos y sus operaciones.



Sin embargo, el reconocimiento de las nuevas condiciones de intervención docente que emergen como respuesta a la contingencia sanitaria mundial, por la pandemia de Covid-19, ha obligado a incorporar nuevas estrategias de enseñanza y mecanismos para favorecer el aprendizaje, además de sensibilizarnos sobre la necesidad de reflexionar sobre la mejora continua. En el campo educativo, las investigaciones se han orientado a productos relacionados con el aprendizaje a distancia, por lo que conceptos como educación virtual y e-learning se han popularizado en tiempos actuales, además de la urgencia por precisar las condiciones que el docente debe considerar en el diseño de sus cursos. Martínez (2008) destaca algunos elementos diferenciadores entre los ambientes de aprendizajes presenciales y virtuales, tales como el reconocimiento del trabajo independiente, los medios de acceso, interacción y control de que dispone el alumno para regular su aprendizaje.

Objetivos

Las condiciones del trabajo a distancia y las aportaciones realizadas por la comunidad de Matemática Educativa, se convierten en el punto de partida para nuevas reflexiones sobre las modificaciones en intervenciones didácticas sobre contenidos matemáticos específicos, tales como el estudio de los números complejos. Reflexiones de esta naturaleza se vuelven más relevantes en programas académicos que no fueron diseñados para el trabajo a distancia, como es el caso de los programas de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

En el presente trabajo se presenta una adaptación de la referida secuencia didáctica para el estudio de números complejos (Romero y Del Castillo, 2011) considerando las condiciones de la educación virtual y las herramientas de las que dispone el docente en la Universidad de Sonora; además, se comparten algunos resultados con la finalidad de brindar elementos que permitan refinar la propuesta de intervención, en modalidad virtual.

Así, los objetivos que guían el presente trabajo son los siguientes:

- Describir la adaptación de la secuencia didáctica referida, a un formato de trabajo virtual.
- Analizar y valorar los resultados y desempeño de los estudiantes que trabajan la propuesta didáctica de forma virtual.

Marco Teórico

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

El diseño original de la secuencia didáctica, para modalidad presencial, se fundamentó en algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), desarrollado por Godino y colaboradores (2009). Particularmente, se consideraron los sistemas de prácticas, los objetos personales e institucionales, sus significados sistémicos, los elementos básicos del significado, las relaciones que se establecen entre ellos (funciones semióticas) y los conflictos semióticos. Estas herramientas permiten analizar con detalle la actividad matemática y los objetos que se ponen en juego durante la misma.

Asimismo, se utilizaron tres niveles de análisis didáctico: *Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas*, el cual se orienta a estudiar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado; *elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos*, el cual se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también que emergen de ellas y, por último,



valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio, el cual constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

Tanto la secuencia original, como su adecuación a modalidad virtual, comparten los dos primeros niveles de análisis, es decir, no hay cambios profundos en los tipos de problemas, sistemas de prácticas, configuraciones de objetos y procesos. En general, la parte epistémica de la propuesta se preserva, pero, por cuestiones de espacio, no se hará una presentación aquí, por cuestiones de espacio.

Sin embargo, insertar la adaptación a modalidad virtual sí incide sobre la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio, esta parte se describirá con mayor detalle.

Particularmente, con respecto a la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio se consideran seis dimensiones, las cuales son:

- **Idoneidad Epistémica:** Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- **Idoneidad Cognitiva:** Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- **Idoneidad Interaccional:** Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado (conflictos semióticos) y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
- **Idoneidad Mediacional:** Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
- **Idoneidad Emocional:** Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.
- **Idoneidad Ecológica:** Grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinarias.

La noción de conflicto semiótico, que se da cuando ocurre una disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones), se utilizó para intentar impactar positivamente en las idoneidades cognitiva e interaccional.

Por otra parte, la adaptación a modalidad virtual hace necesaria la consideración de otros elementos adicionales, no considerados en la versión original.

Educación virtual y e-learning

Las nuevas prácticas académicas que se incorporan como parte de las estrategias para controlar la pandemia de Covid-19 a nivel mundial, han incidido en medidas de distanciamiento social e invitado a la comunidad docente a incorporar elementos de la educación virtual como parte de su desempeño habitual. Aunque la modalidad virtual reconoce modificaciones en la flexibilidad y disponibilidad de las actividades de aprendizaje, también asigna un protagonismo adicional a la tecnología, a través de métodos asincrónicos, sincrónicos y de autoformación.

Tintaya (2003) sugiere que la educación virtual se basa en la inteligencia-imaginación del ser humano para interrelacionarse con nuevas tecnologías, mediante la creación de redes de comunicación que no se ajustan a las dimensiones de lugar, tiempo y espacio que se promueven en la educación presencial, además de



integrar tres dimensiones adicionales, tales como la interactividad, la tecnología y el control. En lo que respecta a la *interactividad*, se sacrifica la relación tradicional entre profesor y el alumno, sustituyéndola mediante la adición de elementos tecnológicos, haciendo posible el uso de herramientas mucho más sofisticadas que permiten que la interactividad sea síncrona o asíncrona. Sobre la dimensión de *tecnología*, se vincula con el uso de plataformas virtuales que permiten a los alumnos acceder una diversidad de materiales de aprendizaje, los cuales se adecuan a las habilidades, necesidades y disponibilidades de cada estudiante. En la dimensión de *control*, se asigna al alumno como el responsable de los tiempos de trabajo y la personalización del material al que accede.

En el mismo sentido, el *e-learning* es una forma o método de la educación a distancia que emplea Internet, plataformas virtuales, teléfono, entre otros, para su desarrollo. En esta forma de trabajo, el rol del profesor es de tutor *on-line*, además de la incorporación de instrumentos tecnológicos adecuados, que se ajusten a la infraestructura con la que se cuenta.

Acciones metodológicas

En esta sección se incluyen algunas acciones metodológicas que se llevaron a cabo para la adaptación de la secuencia de actividades referida y la descripción de las condiciones de la implementación durante la experiencia de trabajo virtual.

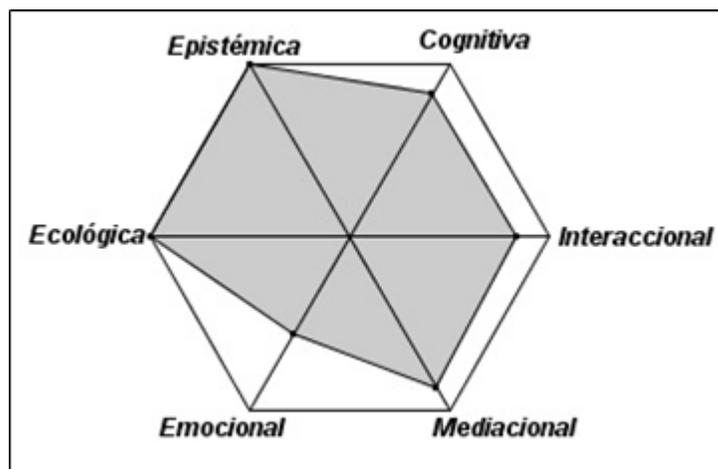
Adaptación de la propuesta

Como se mencionó previamente, el diseño original de la propuesta constó de 13 actividades y 33 applets elaborados con el software GeoGebra, las cuales están organizadas para favorecer el desarrollo de cuatro contenidos de interés; en el primero se presentan los *números reales* y consiste en el reconocimiento de los sistemas numéricos y sus operaciones, haciendo énfasis en la propiedad de cerradura como elemento de expansión de los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales e irracionales). En el segundo bloque, se presentan elementos gráficos de los números reales y su generalización para la construcción de la unidad imaginaria, el cual se denominó *números imaginarios*. Después de contar con un significado de la unidad imaginaria, además de las características del plano complejo, se procede al estudio de la representación de los *números complejos*, mediante sus formas polar y cartesiana. Posteriormente, se aborda el estudio de las *operaciones* (suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíces), incorporando el estudio de los conjugados como el apoyo para calcular cocientes en forma cartesiana.

En la presentación de las actividades, Romero (2013) también hace referencia a las idoneidades alcanzadas después de dos implementaciones, resaltando altos niveles en las dimensiones *epistémica* y *ecológica*, respaldados en la estructura y coherencia de la secuencia de actividades, además de la pertinencia de las temáticas y su relación con el programa de la asignatura. Sobre las dimensiones *cognitiva*, *interaccional* y *mediacional*, estas reciben una valoración media alta, por los prerrequisitos conceptuales de los estudiantes para trabajar en las actividades, la poca participación de algunos estudiantes durante las sesiones de institucionalización y la disponibilidad de centros de cómputo y equipos suficientes para el trabajo colaborativo, agregando que la implementación de la secuencia excedió el tiempo señalado en el programa. La dimensión emocional recibió una valoración media, atribuyéndose al interés cuestionable por el contexto intramatemático utilizado y la falta de aplicaciones en otros contextos. En la siguiente figura, se presenta un resumen de las idoneidades alcanzadas durante la puesta en escena en el formato presencial.



Figura 1. Valoración de la idoneidad didáctica en actividades presenciales.



Fuente: Romero (2013)

Con el antecedente de las experiencias presenciales, se procedió a incorporar las reflexiones a una propuesta que considere las condiciones de la educación virtual y las herramientas con las que se dispone en la Universidad de Sonora. Dado que las valoraciones epistémica y ecológica, se consideran altas, se conserva el significado institucional pretendido en la nueva propuesta. Sin embargo, se pone atención en las otras dimensiones, en las que el uso de ambientes virtuales seguramente tendrá mayor incidencia.

Se eligió la plataforma educativa AVAUS [Ambientes Virtuales de Aprendizaje], y la programación de sesiones virtuales sistemáticas y sincrónicas con el uso de una plataforma de trabajo colaborativo, estas últimas con la finalidad de institucionalizar las conclusiones obtenidas al trabajar con cada actividad de forma individualizada y con asignaciones extra-clase. Se reestructuraron las actividades en un total de 18 lecciones y 6 evaluaciones para que el estudiante ponga a prueba lo aprendido o lo refuerce, previo a las sesiones de institucionalización correspondientes.

La evidencia del trabajo de los alumnos se concentró de forma predominante en AVAUS, plataforma para gestionar entornos de enseñanza virtual con un ambiente de Moodle. Las lecciones se configuraron con diapositivas interactivas que se ajustan a las respuestas de los alumnos, aportando retroalimentación automatizada a los estudiantes que manifiestan errores durante el desarrollo de cada lección. Se incluyeron actividades de evaluación, para que los alumnos tengan la oportunidad de validar su aprendizaje y la medida en que se ajusta a las expectativas del curso. Tanto para las lecciones como para las evaluaciones, se configuró la opción de múltiples intentos, permitiendo a los estudiantes repetir las lecciones hasta que obtuvieran resultados satisfactorios o repasos adicionales que favorecen a la institucionalización. De este modo, se pretende incidir favorablemente en las dimensiones interaccional, cognitiva, mediacional y emocional, de la idoneidad didáctica.

En la siguiente tabla se presenta la estructura de la secuencia por actividades, tanto en la versión original, como las adecuaciones para el trabajo virtual, organizadas por el contenido de interés que se pretende abordar (primera columna).

Tabla 1: Comparativa entre secuencia de actividades en versión presencial y virtual

Contenido de interés	Actividades presenciales	Actividades virtuales (AVAUS)
Números reales	<ul style="list-style-type: none"> • Representación gráfica de los números reales 	<ul style="list-style-type: none"> • Números naturales • Números enteros • Números racionales • Conversión de fracciones a decimales
Números imaginarios		<ul style="list-style-type: none"> • Números reales • <i>Evaluación. Números reales</i>
Números complejos	<ul style="list-style-type: none"> • Unidad imaginaria • Representación gráfica de los números imaginarios 	<ul style="list-style-type: none"> • Módulos y argumentos • Leyes de los signos • Unidad imaginaria
Operaciones	<ul style="list-style-type: none"> • Forma polar • Forma cartesiana • Conversiones 	<ul style="list-style-type: none"> • Forma polar • Forma cartesiana • Conversiones • <i>Evaluación. Gráfica de números complejos</i>
	<ul style="list-style-type: none"> • Suma • Resta • Producto • Conjugados • División • Potencias • Raíces 	<ul style="list-style-type: none"> • Suma • Resta • <i>Evaluación. Suma y resta de números complejos</i> • Producto • Conjugado • División • <i>Evaluación. Operaciones básicas de números complejos</i> • Potencias • Raíces • <i>Evaluación. Operaciones con números complejos</i> • <i>Evaluación global. Números complejos</i>

Características y contexto de la implementación

La secuencia de actividades en su modelo virtual se implementó con dos grupos de estudiantes de Ingeniería durante el ciclo 2020-2, con objeto de identificar errores y/o limitaciones en el diseño de las actividades, así



como nuevos conflictos semióticos. En total se inscribieron 68 estudiantes en la plataforma AVAUS y la información fue procesada de forma integrada, mientras que las sesiones de institucionalización se realizaron en grupos separados, el primero con 36 alumnos y el segundo con 32 alumnos.

La implementación total de la secuencia requirió de 12 sesiones de institucionalización, las cuales se organizaron en tres reuniones semanales y se apoyaron en las asignaciones extra clase para la resolución de las lecciones y evaluaciones.

Análisis y valoración de la implementación en modalidad virtual

Los conflictos semióticos reportados por Romero y Del Castillo (2011) durante la experiencia presencial, se utilizaron como referencia para incorporar estrategias para la modalidad virtual, con el fin de favorecer la idoneidad didáctica, en sus dimensiones cognitiva e interaccional. Por tal motivo, el análisis se organiza en torno a estos y, además, se señalan conflictos semióticos adicionales detectados. Se incluye también una valoración de la idoneidad didáctica de la implementación en modalidad virtual y un balance general de la actividad.

5.1 Conflictos semióticos y estrategias de intervención

Dentro de las prácticas matemáticas esperadas en la secuencia de actividades realizada por Romero (2013), se detectaron algunos conflictos semióticos relevantes, entre los cuales se encuentran: la confusión de la parte imaginaria de un número complejo utilizando la notación i , limitaciones en los procesos de generalización evidenciado por el uso de ejemplos particulares para responder a preguntas generales, la consideración de módulos negativos, la determinación errónea de argumentos debido al uso rutinario de la fórmula para calcularlos, así como dificultades para la representación de la unidad imaginaria considerando su módulo y argumento.

El primer conflicto semiótico al que se hace referencia se da en la representación algebraica de los números complejos, donde la componente imaginaria del número $a + bi$ se señala por algunos estudiantes como bi . Para prevenir la aparición de este conflicto semiótico, se incorporaron preguntas donde el alumno tuviera que elegir las componentes, real e imaginaria, de un conjunto de opciones que no contienen al número i . Además, se incluyó retroalimentación automatizada en algunas actividades, para los estudiantes que manifesten, en sus respuestas, dicho conflicto.

El siguiente conflicto reportado hace alusión al uso de ejemplos particulares para responder cuestiones que solicitan procesos de generalización, lo cual se aprecia en las preguntas donde los estudiantes llevan a cabo distintas operaciones de números complejos que surgen a partir de exploraciones concretas, y que después deben explicarse en términos de las relaciones entre las partes reales e imaginarias, o los módulos y argumentos. Para registrar la aparición del conflicto semiótico en la propuesta virtual, cada pregunta que invita a un proceso de generalización incluye una diapositiva posterior donde se comparten opciones fijas, las cuales se plantean en un lenguaje que deja evidencia del carácter genérico de la situación y se incluye retroalimentación automatizada para cada caso. En la Figura 2 se presentan las respuestas a la diapositiva de la lección 12, titulada “Suma de números complejos”, la cual es posterior a un par de preguntas abiertas que solicitan la relación entre las partes reales e imaginarias de Z_1 y Z_2 con respecto al resultado de la suma $Z_1 + Z_2$.

Figura 2: Estrategia para atender el conflicto semiótico 2



Opción múltiple: Suma de números complejos 6	Estadísticas de clase
Pregunta: Si se considera a $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, donde los valores de a, b, c y d son cualquier número real. ¿Cuál de las siguientes expresiones describe algebraicamente como se efectúa la suma de números complejos dadas su parte real e imaginaria?	
Respuesta:	
<input checked="" type="checkbox"/> $Z_1 + Z_2 = (a+c) + (b+d)i$	100% Eligieron esta.
<input type="checkbox"/> $Z_1 + Z_2 = (a+b) + (c+d)i$	Nadie eligió esta.
<input type="checkbox"/> $Z_1 + Z_2 = (a+d) + (b+c)i$	Nadie eligió esta.
<input type="checkbox"/> $Z_1 + Z_2 = (b+c) + (a+d)i$	Nadie eligió esta.
<input type="checkbox"/> $Z_1 + Z_2 = (b+d) + (a+c)i$	Nadie eligió esta.
<input type="checkbox"/> $Z_1 + Z_2 = a+b+c+d$	Nadie eligió esta.

Sin embargo, previo a la pregunta de la Figura 2, en los espacios donde los alumnos tienen la oportunidad de generalizar argumentado sus respuestas, aparecen justificaciones con ejemplos particulares (las cuales fueron organizadas en la Tabla 2). No obstante, las respuestas que requieren la discriminación entre opciones que explican el cálculo de operaciones de números complejos se realizan de forma adecuada, tal como se expone en la Figura 2, donde todos los alumnos lograron elegir la respuesta correcta, inclusive cuando algunos no lograron expresar indicios de generalización en sus ensayos previos.

Tabla 2: Recopilación de respuestas que explican la operación suma y se basan en casos particulares o ejemplos

	Respuesta a la relación entre las partes reales de Z_1 , Z_2 y la suma $Z_1 + Z_2$	Respuesta a la relación entre las partes imaginarias de Z_1 , Z_2 y la suma $Z_1 + Z_2$
Estudiante 1	<i>Las partes reales de Z1 y Z2 se sumarán o restarán de acuerdo a los signos que se encuentren antes de su valor. Si la parte real de Z1 es: -6 y, la parte real de Z2 es: 3 (positivo). El resultado que se obtendrá entre la suma de Z1+Z2 en la parte real será... -6+3= -3 (Siendo el signo del número mayor quien se antepondrá al valor resultante, en este caso el negativo).</i>	<i>La relación entre las partes imaginarias es bastante parecida a la suma-resta entre las partes reales. Todo tendrá que ver con el signo "ganador" o el signo mayor del valor. Ej. En Z1 mi parte imaginaria es: +i. En Z2 mi parte imaginaria es: -2i. El resultado de Z1-Z2 en las partes imaginarias será de: +i-2i= -i Puesto que, al -2i le hemos quitado una i, al hacerse respetar la ley de los signos con respecto a la unión entre dos valores de distinto signo.</i>
Estudiante 2	<i>Se suman los números reales de Z1 y Z2, asimismo se suman los números</i>	



Estudiante 3	<p><i>imaginarios de $Z1$ y $Z2$, sin embargo, los signos definen si se suman o restan.</i></p> <p><i>Ejemplo: $(2+2i)$ y $(1+i)$</i></p> <p><i>Números reales $Z1: 2+1= 3$</i></p> <p><i>La parte real de $z1$ se suma con la parte real de $z2$ sin tomar en cuenta la parte imaginaria, un ejemplo sería $z1=2+2i + z2=1+i$, en este caso solo nos enfocamos en $2+1$ que es la parte real. Es igual para cualquier otro caso.</i></p>	<p><i>Ejemplo: $(7-6i) (3-4i)$</i></p> <p><i>Partes imaginarias: $Z1= -6i$ y $Z2= -4i$</i></p> <p><i>Suma de números imaginarios:</i></p> <p><i>$Z1+Z2= -6i-4i= -10i$</i></p> <p><i>La parte imaginaria de $z1$ se suma con la parte imaginaria de $z2$ sin tomar en cuenta la parte real, un ejemplo sería $z1=2+2i + z2=1+i$, en este caso solo nos enfocamos en $2i+i$ que es la parte imaginaria y daría como resultado $3i$, pasa lo mismo en otros casos, solo nos enfocamos en la parte imaginaria.</i></p>
-----------------	--	---

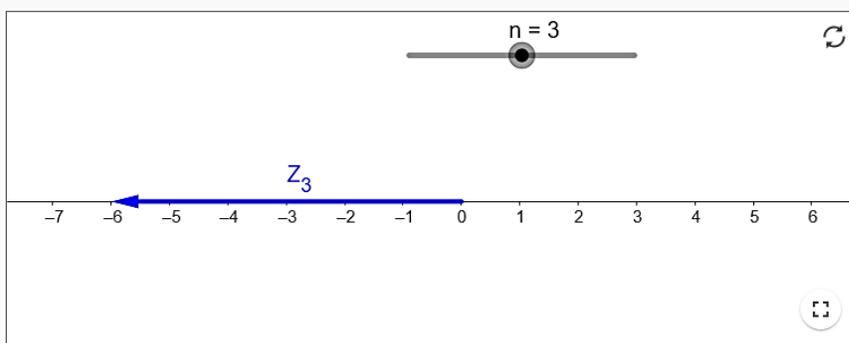
Otro conflicto semiótico consiste en la asignación de valores negativos a los módulos, por lo que no se hace evidente la noción de longitud de los segmentos dirigidos o distancia. Como estrategia se diseñó la lección 6, cuya finalidad es el estudio de módulos y argumentos en la recta real, además de permitir la construcción de la unidad imaginaria y la convención sobre un argumento menor (90°) para definirla. En la lección se trabajan con números reales positivos y negativos, además de que las diapositivas incluyen comentarios de retroalimentación cuando la respuesta del estudiante manifiesta el conflicto, tal como se observa en la Figura 3.

Figura 3: Estrategia para atender el conflicto semiótico 3



Módulo y argumento 4.1

Utiliza la información del *applet*, manipulando el *deslizador*, para indicar el *módulo* de Z_3 . Recuerda que *módulo* se define como la longitud del segmento dirigido.



Numérica

Respuesta 1
: 6

Comentario 1
:

Puntuación
: 1

Saltar
: Página siguiente

Respuesta 2
: -6

Comentario 2 La definición de módulo indica que equivale a la longitud del segmento y no se consideran distancias negativas.
:

Puntuación
: 0

Saltar
: Esta página

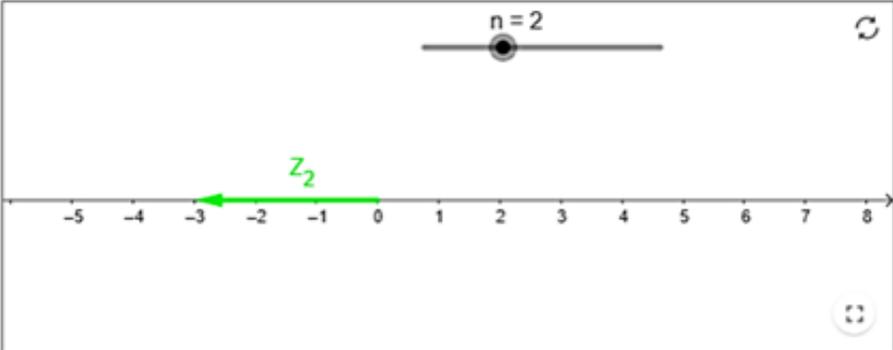
En cuanto a los resultados de la estrategia incorporada, las respuestas de los alumnos manifiestan pocos eventos con el conflicto. Por ejemplo, en la Figura 4 se presenta una solución con un módulo negativo. Cabe señalar que además se presentó un problema en la manipulación del *applet*, pues el alumno analizó el número Z_2 en lugar de identificar el módulo de Z_3 , pero se puede observar que consideró un módulo negativo.



Figura 4: Resultados de la estrategia implementada para atender el conflicto semiótico 3

Númerica: Módulo y argumento 4.1 **Estadísticas de clase**

Pregunta:
 Utiliza la información del *applet*, manipulando el *deslizador*, para indicar el *módulo* de Z_2 . Recuerda que *módulo* se define como la longitud del segmento dirigido.



Respuesta:

6	97.7% introdujo esto.
3	1.15% introdujo esto.
-3	1.15% introdujo esto.

Para atender otro conflicto semiótico reportado en la experiencia presencial, el cual se expone como la interpretación incompleta de argumentos por el uso rutinario de las fórmulas de conversión, se optó por focalizar el objetivo de la lección 11 en la construcción de las fórmulas de conversión y utilizar la sesión de institucionalización para la resolución conjunta de problemas de transformación. Entre los reactivos se incluyeron dos tablas con información parcial, para generar un debate sobre las modificaciones y ajustes a las fórmulas de conversión (Figura 5).

Figura 5: Estrategia para atender el conflicto semiótico 4

Completa la siguiente tabla, rellinando los espacios con la información faltante:

MÓDULO	ARGUMENTO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
3	75°	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/> °	2	-3
<input type="text"/>	15°	<input type="text"/>	1
<input type="text"/>	45°	6	<input type="text"/>
<input type="text"/>	30°	<input type="text"/>	1
<input type="text"/>	<input type="text"/> °	2	2
2	15°	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Considera que todos los valores están redondeados a una cifra significativa (después del punto decimal)



En cuanto a los nuevos conflictos identificados, se detectaron las respuestas de los estudiantes durante la lección de módulos y argumentos de números complejos, donde los alumnos confunden los significados de dichos objetos matemáticos entre sí, por lo que se recomienda un ajuste en las actividades que evite la presentación prematura de tales elementos (Figura 6). En el caso de la implementación se subsanó con la sesión de institucionalización de resultados.

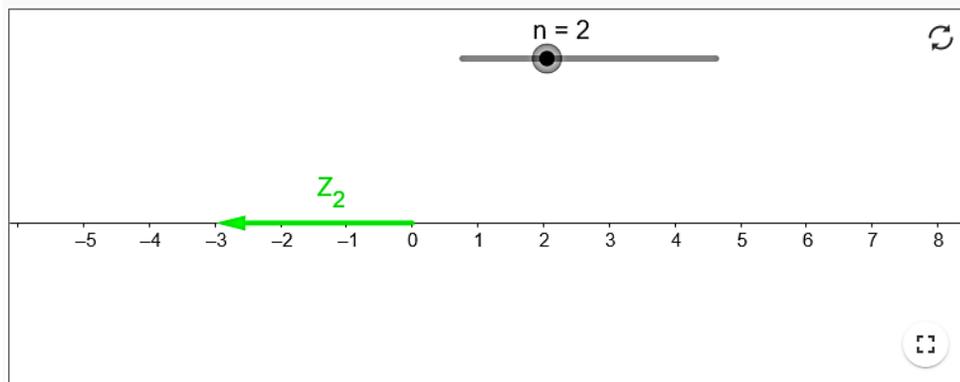
Figura 6: Conflicto semiótico 5

Respuesta corta: Módulo y argumento 3.2

Estadísticas de clase

Pregunta:

Utiliza la información del *applet*, manipulando el *deslizador*, para indicar el *argumento* de Z_2 . Recuerda que **argumento** representa el ángulo que forman los segmentos dirigidos con la parte positiva de la recta real.



Respuesta:

0	5.75% introdujo esto.
180	79.31% introdujo esto.
3	5.75% introdujo esto.
180°	3.45% introdujo esto.
-3	3.45% introdujo esto.
Cero grados	1.15% introdujo esto.
izquierda	1.15% introdujo esto.

Valoración de idoneidad didáctica

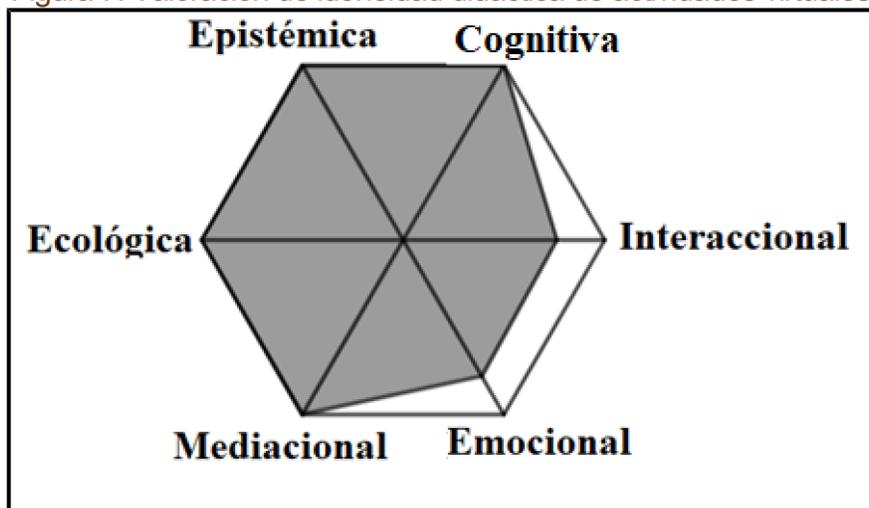
Como se mencionó anteriormente, se analizaron las idoneidades didácticas registradas durante la experiencia presencial para el ajuste de la secuencia a modalidad virtual. Como estrategia para incidir positivamente en la valoración de las dimensiones *emocional* e *interaccional*, el uso de la plataforma AVAUS y las evaluaciones adicionales, permiten un monitoreo en tiempo real del avance de cada estudiante y complementan el trabajo intramatemático con retroalimentación de los contenidos. Para la idoneidad *cognitiva*, se realizó una descomposición de las primeras tres actividades en ocho lecciones independientes, favoreciendo la autonomía en su resolución y homogeneizando los conceptos previos asociados a los conjuntos de números y su generalización hacia la presentación de la unidad imaginaria. Relacionado con la



dimensión *mediacional*, se realizó una encuesta inicial con los dos grupos de ingeniería asignados para el curso de Álgebra durante el ciclo virtual 2020-2, en la que se exploraban las condiciones de conectividad y los dispositivos a los que recurrirían para realizar sus actividades académicas. Se recibió la respuesta de 64 estudiantes y se destaca que el 98.43 % dispone de smarthphone con acceso a internet para sus actividades, el 93.25 % indica que el acceso a internet es propio, además de que la conectividad la clasifican entre aceptable y excelente (92.18%). Como parte de las decisiones tomadas con estos resultados, se resalta que el ambiente de Moodle de la plataforma AVAUS es compatible con computadoras y smartphone (iOS y android).

Como balance general y como aportación del reporte de intervención, se considera que la experiencia reporta altos niveles en las idoneidades *epistémica*, *ecológica*, *cognitiva* y *mediacional*, al rescatar las fortalezas del diseño original para modalidad presencial e incorporar estrategias de autoaprendizaje, mediante la retroalimentación en tiempo real y con indicadores que permitan dar seguimiento en tiempo real al trabajo de los estudiantes; en esta dirección también se destaca la pertinencia de la plataforma y su flexibilidad para ser utilizada en distintos dispositivos. Como elemento adicional a la dimensión *cognitiva*, se puntualiza que los prerequisites conceptuales pueden monitorearse con mayor eficiencia, además de que la configuración de repetir lecciones fortalece las afirmaciones de los estudiantes y le permite al docente la toma de decisiones para dirigir las sesiones de institucionalización. En cuanto a la idoneidad *interaccional*, se sigue manifestando poca participación de algunos estudiantes durante las etapas de institucionalización. Como herramienta auxiliar y para favorecer esta dimensión interaccional, se recomienda la creación de foros cuyas temáticas centrales sean las respuestas de los mismos estudiantes donde se les brinde la oportunidad de generalizar procesos involucrados en las actividades, lo cuales se recomiendan sean previos a la sesión de institucionalización. Por otra parte, la asignación de un nivel medio alto a la idoneidad *emocional* se mantiene como un área de oportunidad, ya que la secuencia sigue considerando un contexto intramatemático, pero se valora que la plataforma y su monitoreo se convierten en un motivador adicional (Figura 7).

Figura 7: Valoración de idoneidad didáctica de actividades virtuales.



Conclusiones

En el planteamiento del problema se reconoce que el ajuste de la propuesta presencial a la modalidad virtual responde a las condiciones de trabajo que impone la contingencia sanitaria (Covid-19). Con ese antecedente,

es importante reflexionar sobre los aspectos rescatables de ambas experiencias. En cuanto al trabajo virtual, el uso de la plataforma Moodle permite el monitoreo del avance de los estudiantes y le ayuda al docente preparar las sesiones de institucionalización con una estructura que considere los errores y dificultades manifestados por los alumnos. Una aportación adicional del uso de la plataforma es que permite personalizar la participación de los estudiantes, ya que el docente tiene la oportunidad de hacer referencia a respuestas específicas de alumnos, promoviendo su participación en las sesiones de institucionalización como generadores de debate o para respaldar afirmaciones.

De la experiencia presencial se reconocen las facilidades del uso de la página web durante las sesiones de institucionalización, permitiendo que las afirmaciones de los estudiantes sean más autónomas, por no estar influenciados por instrucciones que se organizaron para favorecer un autoaprendizaje.

Un elemento común, pendiente en ambas modalidades, es la administración del tiempo y las complicaciones de ajustarse a lo propuesto en los programas de estudios. Con esta consideración, es factible trabajar las lecciones en Moodle como actividades extra-clase, incorporando cambios en los applets para que no se trabajen las mismas situaciones de la página web de la secuencia original. La modificación sugerida permitiría hacer uso de la versión web como herramienta de institucionalización, sin obstaculizar las conclusiones generadas en las lecciones de plataforma.

Referencias

- Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (pp. 45-61).
- Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*
- Godino, J.D., Batanero, C., & Font, V. (2009). Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino J. D., Bencomo D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf
- Martínez C (2008). La educación a distancia: sus características y necesidad en la educación actual [Revista]. *Educación*, Vol. 17 N° 33, pp. 7-27. Recuperado de: <http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/educacion/article/view/1532/1477>
- Pardo, T., Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario. *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 3-15). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España.
- Romero, D., Del Castillo, A.G. (2012). Actividades Didácticas en Línea con Geogebra para el Aprendizaje de Números Complejos. En Hitt, F., Cortés, C. (Eds.) *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 200-211) Canadá: Loze-Dion éditeur inc.
- Romero D. (2013). Números Complejos: Actividades Didácticas con Representaciones Dinámicas. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora.
- Sada, M. (2008). Números Complejos: representación gráfica. Ejemplos diversos de webs interactivas de Matemáticas. Recuperado el 23 de enero de 2011 de <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/>
- Tintaya, E. (2003). Desafíos y fundamentos de educación virtual. Material de enseñanza. Bolivia: Universidad Mayor San Andrés, Ciencias de la Educación.

Cómo citar este artículo: Romero Robles, D., del Castillo Bojorquez, A. G., & Quiñonez Ayala, M. A. Intervención didáctica para el aprendizaje de números complejos en modalidad virtual. *SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS*, 5 (1), pp. 112-126

