Vol. 5 / Núm. 1 / Abril 2021, pp. 35-49
SahuarUS

Construcción de función como relación entre magnitudes variables: diseño de enseñanza desde la teoría APOE

Román Gpe. Esquer Armenta[1] y César Fabián Romero Félix[2]
e-mail: [1]ing.romanrgea@hotmail.com, [2]cesar.romero@unison.mx
Universidad de Sonora

Resumen
Se presenta un reporte de experiencia en el aula, como parte de un proyecto de intervención didáctica para favorecer la construcción del concepto de función a partir de la unión significados parciales. Se plantea construir este objeto matemático como la coordinación de varios significados, apoyados en diversas representaciones; de manera acorde al enfoque de Cálculo Cualitativo y en contraste con la marcada prioridad a la Teoría de Conjuntos y el uso de expresiones analíticas. Enfocados en el aprendizaje de alumnos de ingeniería y ciencias aplicadas, se analiza la problemática del aprendizaje de funciones a partir del análisis de libros de texto y la implementación de un instrumento diagnóstico; se concluye la necesidad de una intervención didáctica que facilite el desarrollo de uno de los significados parciales y la coordinación de los distintos procesos mentales asociados al concepto de función, en términos de la teoría APOE.
Palabras clave: Función, Diseño de enseñanza, APOE, GeoGebra

Recibido 24 de febrero del 2021
Aceptado 13 de abril de 2021

Introducción

El siguiente reporte muestra los resultados de una experiencia áulica, como parte de un proyecto de intervención didáctica sobre el concepto de función, dirigida a estudiantes de Cálculo Diferencial en el nivel educativo superior, particularmente en el área de Ingeniería. Aunque existe abundante literatura sobre investigaciones e intervenciones didácticas desde hace alrededor de medio siglo, los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo continúan siendo atendidos, ya que se sigue observando bajo desempeño académico en esta rama de las matemáticas, así como dificultades en su aprendizaje, algunas de estas atribuibles a un pobre entendimiento del concepto de función.

Uno de los elementos asociados a las dificultades de aprendizaje del tema es la complejidad del concepto en términos de la diversidad de concepciones y representaciones con las que se enfrentan los estudiantes, a quienes eventualmente se les exige el uso simultáneo de las mismas; así como el tránsito entre sus representaciones. En algunos estudios se analiza esta diversidad en términos de significados asociados al concepto a lo largo de su historia (Parra, 2015), mientras que en otros se analizan las definiciones o *imágenes mentales* que utilizan los estudiantes (Vinner & Dreyfus, 1989), en nuestro caso, reinterpretamos esta problemática a partir de los procesos mentales movilizados para resolver distintos tipos de problemas, observando que las manipulaciones específicas a distintos tipos de objetos matemáticos implican distintos esfuerzos mentales a realizar para resolver problemas asociados al concepto de función. De tal manera, proponemos definiciones de algunos significados parciales, en términos de tales procesos, y analizamos la complejidad de su aprendizaje en términos de su desarrollo de forma aislada o articulada por parte de los estudiantes.

Para mostrar la complejidad del aprendizaje de los distintos significados de función en el panorama actual de la enseñanza del Cálculo, partimos de un análisis de las distintas maneras en que aparece el concepto de función, en términos de las manipulaciones de otros objetos matemáticos; e identificamos su presencia en libros de texto, con lo que encontramos una exposición muy desbalanceada en términos de cuáles

Los contenidos de este artículo están bajo una licencia de Creative Commons Atribución No Comercial - Sin Obra Derivada 4.0 Internacional

significados se favorecen, así como las relaciones entre ellos. A partir de este análisis, planteamos la necesidad de actividades de enseñanza para favorecer uno de los significados parciales menos atendido, *función como relación entre magnitudes variables* ya que nos parece que este significado es de los más útiles para estudiantes de ingeniería; y posteriormente atender las relaciones entre los diversos significados.

Antecedentes

Encontramos diversas publicaciones relacionadas con la dificultad que se presenta en estudiantes de nivel superior para aprender Cálculo, por citar algunos tenemos el de Artigue (1995), quien afirma que los problemas del acceso al cálculo se pueden organizar en tres grandes grupos: el primero asociado con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones), el segundo asociado a la conceptualización y formalización del límite y el último vinculado a la ruptura que debe realizarse entre el pensamiento algebraico y el trabajo técnico del cálculo. A la vez, declara que las dificultades asociadas al concepto de interés se relacionan con:

- Identificar lo que realmente es una función
- La identificación de la función depende directamente del registro de representación
- El enfoque conjuntista de la noción de función
- Los registros diferentes en la que se puede manipular este concepto

Esta lista de tipos de dificultades ilustra la complejidad del aprendizaje de funciones. En particular, en este artículo nos concentramos en la dificultad para distinguir qué es y qué no es una función y en que el enfoque conjuntista genera por sí mismo dificultades para los estudiantes.

Por otro lado, Dubinsky y Wilson (2013) describen también tipos de dificultades para el aprendizaje de función, analizando sus propiedades, definiciones, representaciones y manipulaciones, presentando las siguientes cuatro categorías:

Distinguir lo que es función, de lo que no es función

Sierpinska (1992) reporta que los estudiantes, incluso los que muestran un buen desempeño en los cursos de álgebra superior, piensan que una función debe definirse por una sola fórmula analítica, por ejemplo $f(x) = 5x - 2$ o $x^2 + y^2 = 49$. A su vez, investigaciones como la de Carlson (1998) y Clemente (2001), identificaron que la mayoría de los estudiantes forman la idea de que todas las funciones se pueden representar mediante el uso de una fórmula.

Otras dificultades asociadas al concepto, es la incapacidad de reconocer la función como representación de una colección de puntos discretos situados en el plano cartesiano (Markovitz, Eylon, & Bruckheimer, 1986), (Figura 1). Estas dificultades provocan un trazo erróneo de la curva correspondiente a la relación, lo anterior impacta al tratar de definir las regularidades que se presentan en la colección de puntos, así mismo, el comportamiento general de los puntos descritos.

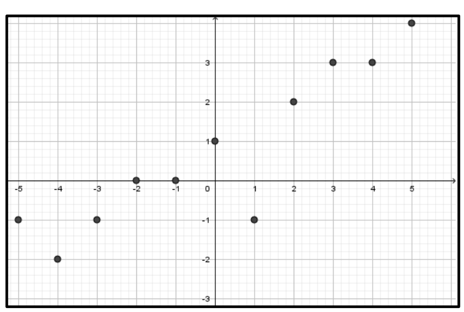


Figura 1 Grafica de dispersión de una relación

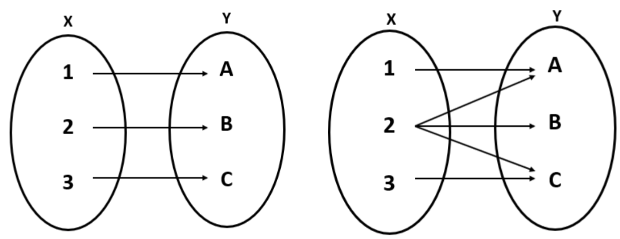
También está la creencia de que las funciones constantes no son funciones, como $f(x) = 5$, y la noción de que una función debe definirse mediante una única fórmula analítica y no por partes, de modo que una expresión como:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ x & si\ x = 0 \end{cases}$$

representa dos funciones (Carlson, 1998; Vinner & Dreyfus, 1989).

Entendimiento de la propiedad uno a uno

Existen investigaciones que afirman que los estudiantes necesitan que los elementos de dos conjuntos estén en una correspondencia de uno a uno, para determinar que existe una relación funcional. Lo anterior, muestra que hay confusión entre la condición de univalencia en la definición de función y la condición de singularidad en la propiedad uno a uno (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990; Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986), por ejemplo, para decidir si las relaciones ilustradas en la siguiente figura pueden ser funciones.

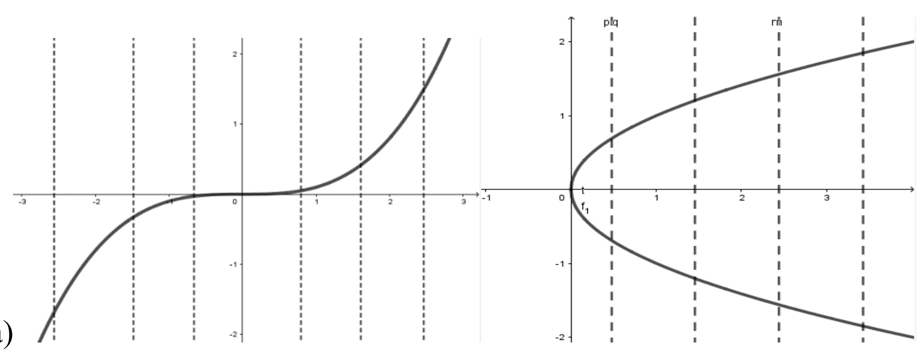


a) b)

Figura 2 a) Conjunto con relación funcional y b) Conjunto que guarda una relación

Prueba de la línea vertical

La mayoría de los estudiantes creen que la prueba de línea vertical es una definición de función; lo anterior puede ocasionar dificultades conceptuales, como no poder interpretar la gráfica de una parábola que abre horizontalmente, $x = y^2$ (figura 3b), como una función, bajo la consideración de que la variable "y" representar un elemento del dominio y "x" un elemento del rango (Breidenbach et al., 1992).



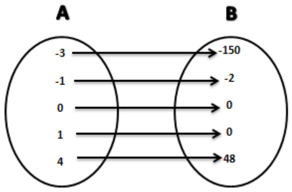
a) b)

Figura 3 Aplicación del criterio de la recta vertical

Representaciones de la función

Las múltiples representaciones asociadas al concepto de función, como el diagrama sagital, expresión analítica, tabla y gráfica (figura 4), la manipulación de cada una de ellas, que exige distinto grado de abstracción, además, el manejo de distintas representaciones al mismo tiempo y el traspaso de una a otra, son las principales dificultades ligadas el concepto. (Thompson, 1994, p. 39).

a) Conjuntista



b) Tabular

x	y
-5.0	-150.0
-4.0	-80.0
-3.0	-36.0
-2.0	-12.0
-1.0	-2.0
0.0	0.0
1.0	0.0
2.0	4.0
3.0	18.0
4.0	48.0
5.0	100.0

c) Algebraica

$$y = x^3 - x^2$$

d) Gráfica

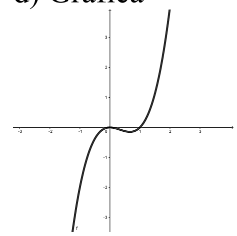


Figura 4 Representaciones asociadas al concepto de función, a) Conjuntista, b) Tabular, c) Algebraica y d) Grafica

Notación de función

Vinner y Dreyfus (1989) reportan dificultades por parte del estudiante con la notación funcional. Declaran que muchos estudiantes no están familiarizados con la terminología ni sus relaciones con los aspectos conceptuales de la noción matemática de la función. En particular, los estudiantes a menudo no entienden el concepto de variable y la notación $y = f(x)$, que en particular se manifiesta con la interpretación como producto de una variable "*f*" por una variable "*x*".

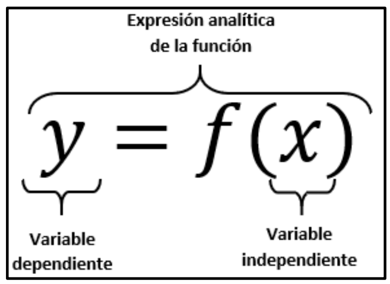


Figura 5 Notación de función y sus componentes

Complejidad del significado de función

Observando las diferencias entre las distintas representaciones y manipulaciones del concepto de función, y las dificultades asociadas a éstas, coincidimos con Ramos, citado por Parra (2015, p.24) en que la noción de función es actualmente uno de los objetos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora. No obstante, es un concepto complejo debido a la multiplicidad de significados y de registros representativos que generan distintos niveles de abstracción.

Otras investigaciones como la de Zandieh, Ellis y Rasmussen (2017) muestran que el concepto función es de gran importancia para las matemáticas y continúa siendo problemático para los estudiantes de educación superior. En su análisis identificaron que los estudiantes que no contaban con una construcción del concepto función no podían identificarlo, ni aplicar sus propiedades en otras ramas de las matemáticas; a partir de una caracterización de los distintos significados de función como: *ecuación*, *relación de asignación*, *gráfica* y *tipos de variación*. A su vez, Maharaj (2013) identificó que los alumnos que solo contaban con una comprensión de función y derivada hasta un nivel operacional difícilmente podían resolver problemas relacionados con estos conceptos, mientras que alumnos con un significado *más completo* podían efectuar las distintas transformaciones de las funciones y sus derivadas, necesarias para la solución de problemas de ecuaciones diferenciales.

Los trabajos citados muestran que algunas dificultades para construir el concepto de función están relacionadas con la multiplicidad de significados parciales que es necesario desarrollar. De tal manera, en diversas investigaciones se sugiere la creación de actividades orientadas a favorecer la comprensión del concepto de función en distintos contextos sustentados por medios tecnológicos (por ejemplo, Maharaj, 2013; Goldenberg, Lewis y O'Keefe 2010). A continuación, respaldaremos tal sugerencia mediante el análisis de los materiales didácticos más comúnmente usados y la aplicación de un instrumento diagnóstico, elaborados en términos de la teoría APOE.

Marco teórico

La teoría APOE se centra en modelos de lo que podría estar pasando en la mente de un individuo cuando él o ella está tratando de aprender un concepto matemático y utiliza estos modelos para diseñar materiales de instrucción y /o para evaluar los logros de los estudiantes y fallas en el manejo de situaciones de problemas matemáticos (Figura 6) (Arnon et al., 2014, p.1)

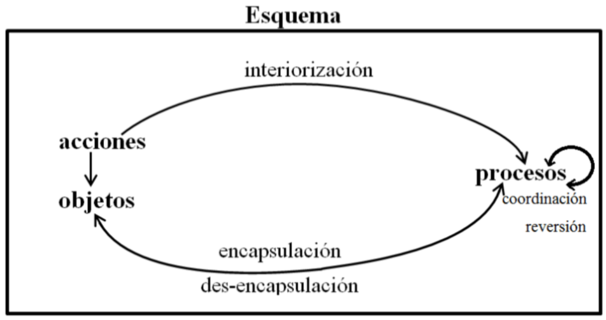


Figura 6 Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Traducida de Arnon et al., 2014, p. 18)

Se consideran cinco tipos de *abstracción reflexiva*: *interiorización*, *coordinación*, *reversión, encapsulación* y *des-encapsulación*. Estos son considerados mecanismos que dan lugar a las estructuras de tipo: *acción*, *proceso, objeto* y *esquema*. Una acción consiste en la transformación *externa* de objetos previamente concebidos, que requiere ser aplicada de forma explícita, en un orden fijo y guiada por instrucciones. Cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, ésta puede ser interiorizada en un proceso mental, lo cual consiste en construir una estructura mental que inicialmente obtiene el mismo resultado que el de la acción. Se dice que el individuo posee una concepción proceso del concepto cuando puede obtener o utilizar los resultados de los pasos de la acción, sin realizar las transformaciones externas (Arnon et al., 2014, p. 20).
Mientras que las acciones y procesos son transformaciones dinámicas de otro tipo de construcciones, los procesos pueden volverse entidades estáticas como resultado de la encapsulación. Cuando un individuo piensa en el proceso como un todo, susceptible de transformaciones sobre su totalidad, se dice que posee una concepción objeto, que se considera como el más importante para construir el conocimiento matemático (p. 21), al permitir la búsqueda de propiedades y relaciones con otros objetos.
A partir de ordenamiento coherente de las acciones, procesos y objetos surge la estructura *esquema,* la cual puede ser usada para dar soluciones a problemas en matemáticas. Esta estructura tiene la particularidad de ser concebida como un nuevo objeto; es decir de la misma manera cuando el proceso avanza y se coordina con otro proceso se logra concretar en un nuevo objeto, el esquema se logra cuando el objeto se tematiza y es considerado como un mecanismo que permite al individuo resolver un problema.
En este marco, una *descomposición genética* es un modelo hipotético y preliminar que describe el camino o los posibles caminos que puede seguir un individuo para construir el conocimiento matemático, en términos de las estructuras mentales y los mecanismos necesarios. Además, la descomposición genética es la base teórica para realizar diseño de intervención didáctica, los cuales a posteriori ayudaran a refinar la descomposición genética o validarla, siguiendo el ciclo de investigación APOE. (Arnon et al., 2014, p.27):

la descomposición genética se presenta comúnmente como el resultado de haber implementado el ciclo de investigación y en específico del análisis teórico.

Metodología

Este estudio se organiza con base en el ciclo de *investigación* de APOE, el cual consta de tres componentes: *análisis teórico*; *diseño e implementación de enseñanza*; y *recolección y análisis de datos* (figura 7) (Arnon et al., 2014, p.94).

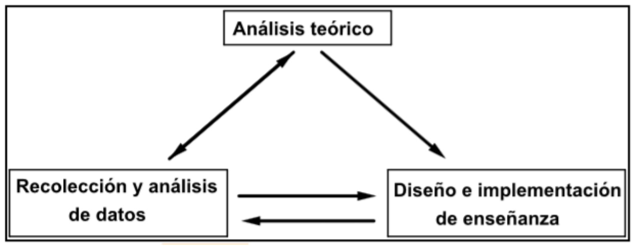


Figura 7 Ciclo de investigación (Traducida de Arnon et al., 2014, p.94)

Como lo indican las flechas en la figura anterior, los tres componentes del ciclo de investigación se influyen mutuamente. El análisis teórico impulsara el diseño y la implementación de la instrucción a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales declaradas requeridas por el análisis teórico. Las actividades y ejercicios están diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlas en procesos, encapsular procesos en objetos, y coordinar dos o más procesos para construir procesos nuevos. La implementación de la instrucción proporciona una oportunidad para la recopilación y el análisis de datos. Enseguida se muestra las etapas implementadas del ciclo de investigación y las actividades realizadas en cada una.

Análisis teórico

Durante el desarrollo de este apartado se pretende dar respuesta a los siguientes cuestionamientos: 1) *¿Qué significa comprender un concepto matemático?* y 2) *¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo?* La forma de dar una respuesta parcial a las preguntas es mediante el análisis de libros de texto, la experiencia de los investigadores y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que puedan contribuir al diseño de un camino viable en la construcción del concepto. Estos planteamientos proporcionarán las consideraciones necesarias para comprender el concepto matemático, así como las implicaciones necesarias para que este se construya (Arnon et al., 2014, p.94). El objetivo principal del análisis teórico consiste en diseñar una descomposición genética, esto para determinar un camino viable para que un estudiante desarrolle el concepto, tomando en cuenta las construcciones y mecanismos mentales necesarios.

Diseño e implementación de enseñanza.

La etapa de instrucción es guiada bajo el ciclo de enseñanza ACE: (A) actividades, (C) discusión en el aula y (E) ejercicios realizados fuera de clase (figura 8) (Asiala et al., 1996). Las actividades, que constituyen el primer paso del ciclo, están diseñadas para fomentar el desarrollo de las estructuras mentales por parte de los estudiantes mediante un análisis APOE. En el aula, el profesor guía a los alumnos a reflexionar sobre las actividades y su relación con los conceptos matemáticos que se estudian. Los estudiantes hacen esto realizando tareas matemáticas. El grupo, estudiantes y profesor, participa en una discusión sobre sus resultados y escuchan las explicaciones de los significados matemáticos de lo que están trabajando. En la misma etapa de discusión, el profesor puede formalizar los conceptos discutidos, presentando definiciones y el lenguaje o métodos sugeridos en el currículo, es decir, la institucionalización del conocimiento en clase.

Los ejercicios de tarea son problemas bastante estándar. Refuerzan los conocimientos obtenidos en las actividades y discusiones en el aula. Los estudiantes aplican este conocimiento para resolver problemas estándar relacionados con el tema que se está estudiando.

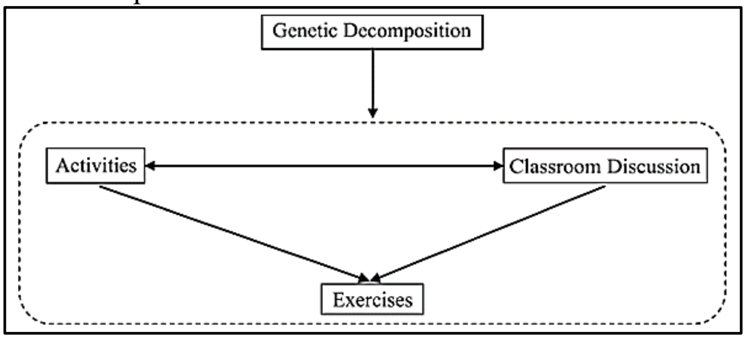


Figura 8 Ciclo de enseñanza ACE

Recolección y análisis de datos.

La etapa de análisis de datos debe girar alrededor de los siguientes cuestionamientos: 1) *¿Los estudiantes desarrollaron las construcciones mentales previstas por el análisis teórico?* y 2) *¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el contenido matemático?*

Dar respuesta a estos cuestionamientos permite evaluar tanto al modelo teórico de construcciones mentales como al diseño de enseñanza. También, brinda información sobre la necesidad de realizar refinamientos en la descomposición genética o la instrucción, lo que genera una nueva oportunidad para el análisis de datos. La reimplementación del ciclo proporcionara una descomposición genética refinada que cada vez se acerca más al desarrollo eficiente del concepto (Arnon et al., 2014, p. 94).

Flexibilidad del ciclo

Las relaciones entre las etapas del ciclo de investigación permiten diversos grados de libertad para la implementación de estudios sobre el aprendizaje y la enseñanza. En este reporte, se presenta una implementación del análisis teórico, recolección y análisis de datos, para el futuro diseño e implementación de actividades de enseñanza.

Análisis Teórico: Significados Parciales del concepto de Función

Como etapa inicial del análisis teórico, se han reinterpretado investigaciones previas sobre el *significado holístico* del concepto de función (Parra, 2015), donde se caracterizan seis significados parciales de función:

La función como ***correspondencia***: Es el proceso de asignar elementos de un conjunto a elementos de otro conjunto, mediante el desarrollo de ciertas operaciones que permite asociar a los dos conjuntos, “implícitamente en forma de correspondencias numéricas definidas por operaciones aritméticas” (Parra 2015, p. 4).

Un ejemplo que permite observar la función como correspondencia son las escalas de medidas de temperatura como los Fahrenheit y los Celsius, como se muestra en la siguiente tabla. En estas se puede percibir que a un componente del conjunto de los °C le corresponde un elemento de conjunto °F y dicha asignación de por medio de la ecuación antes mencionada.

Tabla 1 Conversión entre temperaturas de centígrados a Fahrenheit

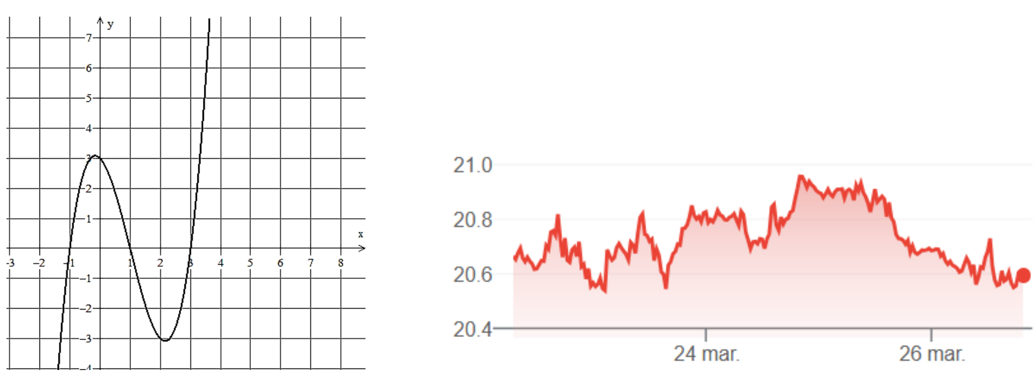
Temp. en °C	0	45	40	100	50	25
Temp. en °F	32	113	104	212	122	77

La función como ***relación entre magnitudes variables***: Es una relación de covariación entre magnitudes de fenómenos físicos y por ser de esta índole las cantidades son variables; puesto que, si una de ellas cambia, esto provoca un cambio en la magnitud con la que existe una relación.
La forma en la que se puede percibir la relación entre magnitudes es, por ejemplo, considerando la situación en la cual un objeto es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s desde el suelo. Tomado en cuenta la ecuación $x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$ y consideramos, para efectos prácticos, que la aceleración debido a la gravedad es de 9.8 m/s, la ecuación que expresa la altura(metros) del objeto en términos del tiempo(segundos), es $x_f = 20t - 4.9t^2$. Para seguir la notación usual de los cursos de física, esta ecuación se puede escribir como $h = 20t - 4.9t^2$, en la que se ha usado la letra h en lugar de x_f. Lo anterior evidencia que si la magnitud temporal (tiempo) cambia, la posición (altura) del objeto también lo hace:

Tabla 2 Relación entre tiempo y altura

Tiempo (seg.)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
Altura (m)	0	8.77	15.10	18.97	20.40	19.37	15.50	9.97	1.60

La función como ***curva en el espacio***: Es un objeto en el plano o el espacio cartesiano, compuesto de puntos que plasman de forma visual la relación matemática entre determinados valores numéricos sobre los ejes. Por ejemplo, la gráfica de una función polinomial (figura 9a), se puede realizar mediante la obtención de una colección de puntos con coordenadas *(x, y)* relacionadas por medio de alguna expresión álgebra, digamos $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$; por otro lado, se podría tener una curva a la que no sea posible asignar una fórmula *y=f(x)*, como al valor del dólar (USD) con respecto al peso (MXN) pero que de la misma manera como objeto en el plano represente la relación entre la variación de una variable *y* con respecto a otra variable *x* (Figura 9b).

a)


b)

Figura 9 Función como curva en el plano

La función como ***expresión analítica***: Es un tipo de expresión algebraica que declara la relación entre variables y constantes.
En el siguiente caso es necesaria la construcción de función como expresión analítica, porque la expresión tiene la capacidad de mostrar las relaciones numéricas que se presentan en el problema. Por ejemplo, un sistema de cómputo tiene10 años de uso y su valor actual es de \$23000, pero hace cuatro años valía \$41400. Considere que el valor del sistema varía linealmente con el tiempo y determine:
La ecuación particular que relaciona el valor del sistema con el tiempo transcurrido.
$V(t) = -4600t + 6900$, al cumplir $V(10) = 23000$ y $V(6) = 41400$

La función como ***correspondencia arbitraria***: Es una relación abstracta entre dos conjuntos, sin conocer la forma en la que se realiza la asignación entre sus elementos.
Se puede presentar la noción de función como correspondencia arbitraria en el estudio meteorológico. Esto debido a que a cada hora del día le corresponde un porcentaje de humedad o velocidad del viento y esta asignación se realiza sin ninguna operación (figura 10).

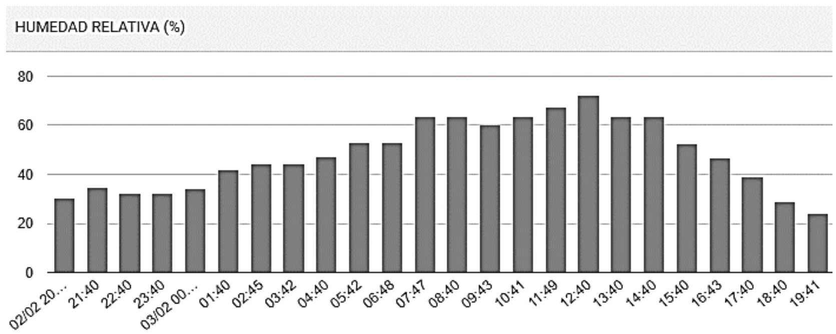


Figura 10 Gráficas de Tiempo Real en la estación Aeropuerto (www.meteored.mx/hermosillo/historico)

Es importante aclarar que la correspondencia arbitraria no es necesariamente graficable, por ejemplo, en el caso de las funciones definidas a partir de la distribución de números primos en la recta numérica.
La función a partir de la ***Teoría de Conjuntos***: Una función es una relación de una variable que cumple varias propiedades: un subconjunto R del producto cruz de X con Y ($R \subseteq X \times Y$) es una función de X a Y si para cada elemento que pertenece a X ($\forall x \in X$) existe exactamente una y que pertenece a Y ($\exists!\, y \in Y$), tal que la pareja (x, y) está en R (Hamilton, 1982).
Un ejemplo de la implementación de esta definición seria determinar si para los conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$, una relación $R = \{(1, a), (2, b), (2, d), (3, c), (4, b)\}$ puede ser considerada como función, e indicar cuál sería el dominio y el rango (figura 11).

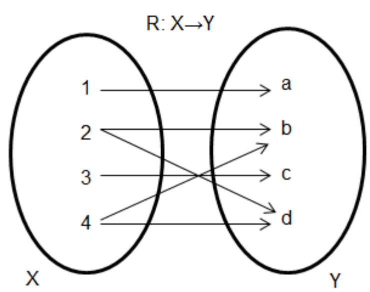


Figura 11 Diagrama sagital de función

Análisis de la Presencia de Significados Parciales en Libros de Texto
Dentro del análisis teórico, evaluamos la presencia de estos significados en libros de texto de Cálculo que son propuestos en la bibliografía básica del programa de la asignatura correspondiente de la Universidad de Sonora, como: *El cálculo* (Leithold, 1994), *Cálculo con geometría analítica* (Swokowski, 1988), *Cálculo diferencial e integral* (Ayres, 1971), *Cálculo con geometría analítica* (Edwards & Penney, 1994) y *Cálculo aplicado* (Hughes-Hallett, et al., 2004); identificando los significados que son favorecidos en cada uno, las relaciones que se establecen entre ellos, así como las representaciones que se utilizan. El análisis se centra en las definiciones, ejemplos y problemas propuestos en las primeras secciones de los libros, que son en las que se introduce este concepto, antes de conceptos más avanzados como el de derivada. El cual, es sintetizado en las siguientes gráficas.

En los materiales revisados, en particular encontramos la intención de utilizar todos los significados parciales asociados a este concepto, no obstante, existe una clara tendencia a favorecer el significado de relación entre conjuntos y el de expresión analítica, subordinado a estos, el de curva en el espacio y el de correspondencia. También se observó que, aunque existe la presencia de los significados parciales declarados anteriormente, en la parte inicial del análisis teórico, estos no son igualmente utilizados en el desarrollo del tema, siendo el significado de expresión analítica el que cuenta con mayor presencia, en todos los aspectos analizados; para ilustrar mejor lo declarado anteriormente, se proporciona el concentrado de este análisis en la (Figura 12).

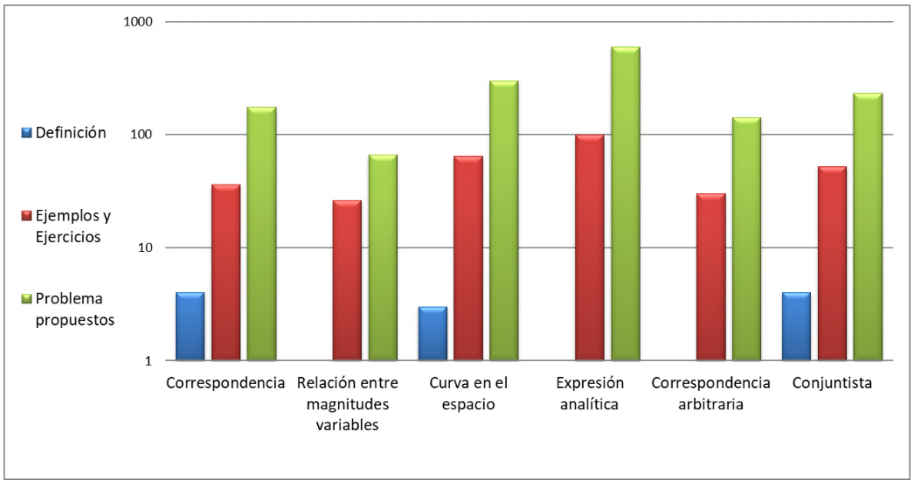


Figura 12 Significados presentes en los libros de texto

El significado de relación entre magnitudes variables es generalmente el menos atendido. Hay que mencionar que, en la articulación de los significados, se observa una tendencia global a subordinarlos al de expresión analítica, siendo la mayoría de las relaciones establecidas *desde y hacia* este significado; siendo nuevamente el de relación entre magnitudes el menos favorecido (figura 13).

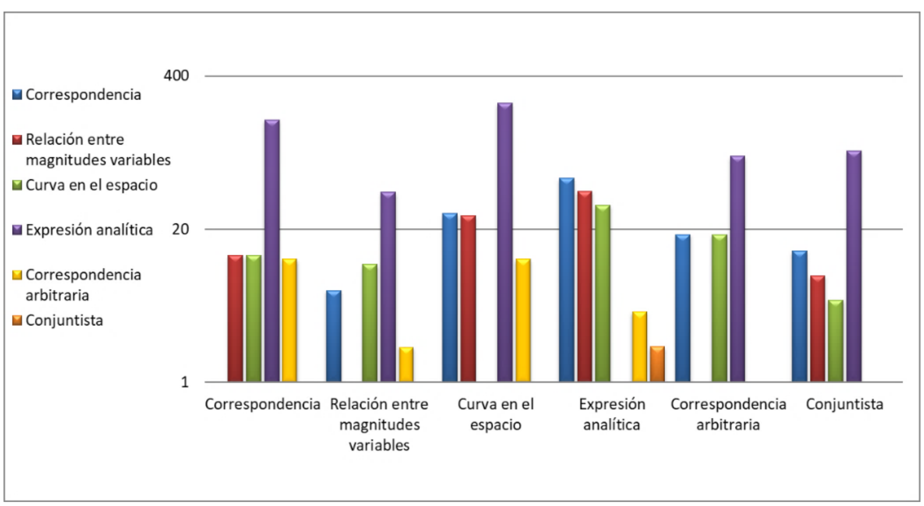
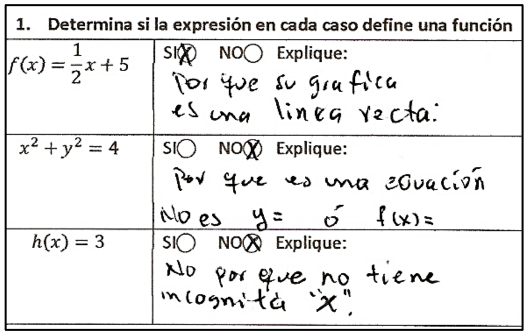


Figura 13 Relaciones entre significados abordadas en los libros de texto

Análisis y recolección de datos: Resultados de un cuestionario diagnóstico.

Se diseñó un cuestionario para exhibir el grado de conocimiento del concepto de función, el cual evalúa si los alumnos reconocen el significado de función como correspondencia, relación entre magnitudes variables,

expresión analítica, y como curva en el espacio en situaciones específicas. Al mismo tiempo, permite valorar el grado de construcción que se tiene del concepto, en particular, los niveles acción y proceso.
A continuación, se presenta uno de los ítems del examen diagnóstico, el cual pretende valorar si el alumno puede identificar a la función como expresión analítica, así mismo, el examen contiene otros reactivos para el resto de los significados parciales asociados al concepto en cuestión (figura 14).



1. Determina si la expresión en cada caso define una función	
$f(x)=\frac{1}{2}x+5$	SI X NO Explique: Por que su grafica es una linea recta:
$x^2+y^2=4$	SI NO X Explique: Por que es una ecuación No es y= ó f(x)=
$h(x)=3$	SI NO X Explique: No por que no tiene incognita "x".

Figura 14 Identificación de función como expresión analítica

En el análisis de las respuestas del diagnóstico, se observó que la noción de función con mayor grado de construcción es el de curva, seguido por el de expresión analítica, esto posiblemente debido a que, en cursos previos, son estos a los que más tiempo se les asigna para que los jóvenes puedan desarrollar su significado. Además, se observa una tendencia a manipular el significado de función como correspondencia, siendo el significado más relegado el de relación entre magnitudes variables, posiblemente siendo estos dos los menos estudiados (Tabla 3).

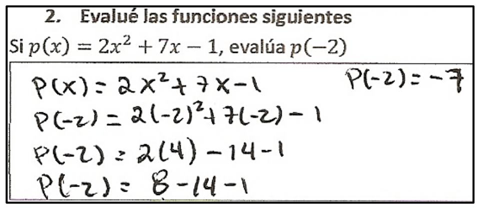
Tabla 3 Porcentaje de alumnos que logran reconocer los significados de función.

Significado	*Correspondencia*	*Relación entre magnitudes variables*	*Curva en el espacio*	*Expresión analítica*	*Núm. De alumnos*
Porcentaje (%)	*66*	*60*	*75*	*71*	*33*

En este apartado, se observó que los alumnos que lograban responder correctamente, tendían a utilizar únicamente criterios sobre la representación para decidir si lo planteado es o no función, como casos específicos: en lugar de utilizar el significado de expresión analítica se limitaban a evaluar la representación de identidad algebraica; igualmente utilizaron la forma de la curva en el plano, su representación gráfica, para tomar la decisión, en lugar de usar la noción de que para cada valor de x existe un único valor de y tal que $y = f(x)$. En contra parte, los alumnos que tendieron a responder incorrectamente no reconocían a la función si la expresión analítica no tenía variables. Mencionaban que existe una relación, sin declarar las características de ésta y si la expresión era lineal, declaraban que ésta es función, aunque fuera una expresión de una sola variable o de más de dos variables.
En el caso del significado como curva en el espacio, algunos alumnos mostraron la presencia de éste al argumentar que, *para cada valor de x, hay un solo valor de y*, y al aplicar el *criterio de la recta vertical*; sin embargo, no argumentaron porque esto es válido. En el caso en que los alumnos respondían incorrectamente, se notó que los alumnos utilizaban la idea de continuidad del trazo para decidir si una curva es función o no, o aplicaron erróneamente el criterio de unicidad ligando el grado del polinomio que genera la curva para decidir.

El último significado que se analizó es el significado de función como relación entre magnitudes variables, los alumnos que pudieron identificar a la función en este significado, solo lograban argumentar su respuesta con el hecho de que existe una variable para cada magnitud, en el caso contrario, los alumnos externaban que, si la relación mostraba un comportamiento creciente, eso basta para tomar la decisión. En la mayoría de los casos, una supuesta *proporcionalidad entre las magnitudes* fue utilizada como sinónimo de relación funcional, apoyándose en la percepción de que, si una magnitud crece la otra también, y viceversa.

Para la evaluación del nivel acción en los significados, se elaboraron ítems como el que se muestra a continuación (Figura 15), los cuales pretenden valorar si el alumno tiene la capacidad de trabajar en casos particulares, evaluando la expresión en valores definidos.



2. Evalué las funciones siguientes

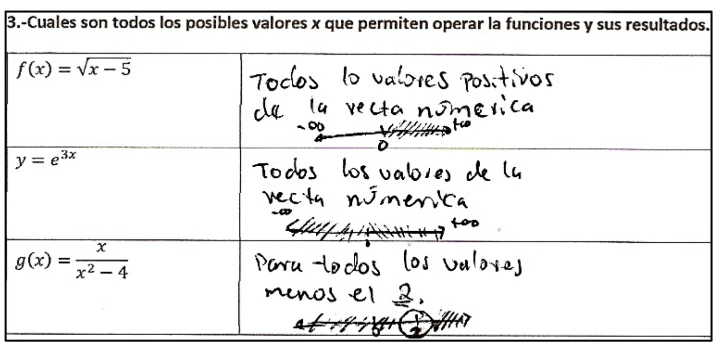
Si $p(x) = 2x^2 + 7x - 1$, evalúa $p(-2)$

$P(x) = 2x^2 + 7x - 1$ $\quad P(-2) = -7$
$P(-2) = 2(-2)^2 + 7(-2) - 1$
$P(-2) = 2(4) - 14 - 1$
$P(-2) = 8 - 14 - 1$

Figura 15 Reactivo de nivel acción del significado de función como expresión analítica.

De estos reactivos, se infiere el nivel de desarrollo de las concepciones de tipo acción para los distintos significados de función, se percibe una relación entre el porcentaje de alumnos que identifican el significado función y el porcentaje del grado de construcción de acción que poseen.

De manera similar, se diseñaron ítems con el objetivo de verificar el grado de construcción del significado, a un nivel proceso, los cuales evalúan si los alumnos tienen la capacidad de generalizar las propiedades de cada uno de los significados, ejemplo de estos, se muestra en la figura 16.



3.-Cuales son todos los posibles valores *x* que permiten operar la funciones y sus resultados.	
$f(x) = \sqrt{x-5}$	Todos lo valores positivos de la recta númerica $-\infty \quad 0 \quad +\infty$
$y = e^{3x}$	Todos los valores de la recta númerica $-\infty \quad +\infty$
$g(x) = \frac{x}{x^2-4}$	Para todos los valores menos el 2.

Figura 16 Reactivo de nivel proceso del significado de función como expresión analítica

Estos reactivos dieron indicadores de un bajo porcentaje de construcción a nivel proceso para el conjunto de los significados parciales, esto causado en la mayoría de los casos, porque los alumnos no han alcanzado a realizar las acciones para cada uno de los significas estudiados, evaluados y por ende los procesos (Tabla 4).

Los datos muestran que el nivel acción con mayor desarrollo, es para el significado de expresión analítica, esto no significa que los alumnos no presentaron algún grado de deficiencia con esta construcción. La acción del significado anterior es precedida por el de correspondencia y se presenta en situaciones muy similares; después, para curva en el espacio, los jóvenes apenas pudieron identificar puntos que pertenecen a la una curva; y finalmente, relación entre magnitudes variables se muestra como el más relegado (Tabla 4).

Tabla 4: porcentaje de alumnos que muestra una concepción acción o proceso del concepto función en sus distintos significados.					
Acción	***Correspondencia***	***Relación entre magnitudes variables***	***Curva en el espacio***	***Expresión analítica***	***Núm. De alumnos***
Porcentaje (%)	*60*	*54*	*59*	*78*	*33*
Proceso	*Correspondencia*	*Relación entre magnitudes variables*	*Curva en el espacio*	*Expresión analítica*	*Núm. De alumnos*
Porcentaje (%)	*57*	*54*	*65*	*9*	*33*

- Función como expresión analítica: los alumnos no pueden definir el conjunto de valores con la que es posible operar las expresiones.
- Función como curva en el espacio: no pueden predecir cuál será la forma que esta tendrá.
- Función como correspondencia: no pueden predecir cuál va a ser la tendencia de los datos.
- Función como relación entre magnitudes variables: no reconocen el tipo de relación que presentan las magnitudes que se está manipulado.

Conclusiones

Siendo numerosas las investigaciones sobre los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, ya que en esta rama de las matemáticas se sigue presentando un bajo rendimiento académico, identificamos esta problemática con un pobre entendimiento del concepto de función, en términos del desarrollo de los distintos significados parciales y sus relaciones.
Lo anterior coincide con lo exhibido en el desarrollo de la primera etapa del ciclo de investigación APOE, muestra que el concepto de función es complejo por su carácter unificador, en el sentido de que el proceso *general* de función unifica sus múltiples significados y representaciones. Según el marco APOE, esto se reflejaría en la necesidad de construir acciones y procesos para cada significado y luego coordinar estos procesos para poder tener un proceso de función que incluya a todos.
Por otro lado, la revisión de los materiales propuestos de apoyo en la bibliografía básica de un curso muestra que estos no promueven los significados equitativamente; especialmente el identificado como el más útil para las carreras de ingeniería, por su aplicabilidad en problemas de magnitudes físicas y químicas, el de función como relación entre magnitudes variables. También, se identifica que alumnos de un primer curso de Cálculo no cuentan con las construcciones de acciones y procesos para los distintos significados; lo cual impide que en el inicio del curso de Cálculo se trabaje a nivel proceso, o se suponga la existencia del proceso unificado. Es por ello y con la finalidad de avanzar en esta dirección, concluimos que es necesario el diseño de actividades que: 1) promuevan el significado más útil para las carreras de ciencias aplicadas; 2) favorezcan coordinaciones con los otros significados del concepto; 3) impulsen el uso de distintas representaciones y conversiones entre ellas para el concepto función; y 4) implementen el uso de tecnología como medio para apoyar la construcción del concepto de función de forma dinámica. Lo cual consideramos puede llevarse a cabo desde una perspectiva similar a la del *Cálculo Cualitativo* (Stroup, 2002), en la que el estudiante construye su compresión y desarrolla habilidades sobre los elementos de la disciplina, con actividades de manipulación de componentes concretos como antecedente al trabajo con elementos abstractos.

Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca número 638340 del programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education. Nueva York: Springer.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, *1*, 97-140.

Ayres, F. (1971). Calculo Diferencial e Integral. Madrid. España: Artes gráficas EMA.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics, 23, 247–285.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education III (pp. 114–162). Washington, DC: Mathematical Association of America

Dubinsky, E., & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 83-101.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del valle. (Traducido por Myriam Vega Restrepo).

Edwards & Penny (1996). *Calculo con geometría analítica*. Madrid. España: Prentice Hall Hispanoamericana.

Goldenberg, P., Lewis P. & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of an understanding of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 235-260). Washington: Mathematical Association of America.

Hamilton, A. G. (1982). *Numbers, sets and axioms: the apparatus of mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Hughes-Hallet, D., Gleason, A., Lock, P., Flath. D., … Trash, J. (2004). *Calculo aplicado*. DF. Mexico; Compañía Editorial Continental.

Leithold, L. (1994). *El cálculo*. DF. Mexico: Oxford University Press

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. Review of Educational Research, 60(1), 1–64. Lovell, K. (1971). Some aspects of the growth of the concept of a function. In M. F. Rosskopf, L. P. Steffe, & S. Taback (Eds.), Piagetian cognitive development

Maharaj, A. (2010). An APOS Analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras, 71*, 41-52.

Markovitz, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. For the Learning of Mathematics, 6(2), 18–24.

Parra Y. (2015). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función (Tesis de maestría no publicada). Universidad de los Lagos, Santiago de Chile.

Zandieh M, Ellis J. & Rasmussen C. (2017) Characterization of a unified notion of mathematical function: the case of high school function and linear transformation. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 21–38.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), The concept of functions: Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 25–28). United States: The Mathematical Association of America.

Stroup M. (2002). Understanding qualitative calculus: a structural synthesis of learning research, *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 7, 167–215.

Swokowski, E. (1988). *Calculo con geometría analítica*. DF. México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), Research in collegiate mathematics education (pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.

Cómo citar este artículo: Romero Félix, C. F., & Esquer Armenta, R. G. CONSTRUCCIÓN DE FUNCIÓN COMO RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES VARIABLES: DISEÑO DE ENSEÑANZA DESDE LA TEORÍA APOE. *SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS,* (5),1, pp. 31-49.